



Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

Juegos matemáticos para la enseñanza de álgebra en el segundo ciclo de la ESO

Presentado por: Oriol Esteve Tomàs
Línea de investigación: Recursos didácticos de la especialidad
(Matemáticas)
Director/a: Pedro Aurelio Viñuela Villa
Ciudad: Barcelona
Fecha: 15 de mayo de 2014

Resumen

El presente trabajo versa sobre el uso de los juegos matemáticos en la enseñanza del álgebra en el segundo ciclo de la ESO. El marco teórico contiene una revisión de la literatura existente tanto en lo relativo al uso del juego en el aprendizaje en general como en el de las Matemáticas, las dificultades de la enseñanza-aprendizaje del álgebra en el segundo ciclo de la ESO, así como el lugar que ocupa esta área dentro del currículum escolar del MEC y del currículum de Cataluña. El estudio de campo consta de los resultados de las entrevistas efectuadas a tres reconocidos expertos en el ámbito de la didáctica de las matemáticas y juegos matemáticos: Deulofeu, Mallart y Gairín. Tras esta recopilación, se elabora una propuesta didáctica fundamentada en la teoría revisada en la primera parte y en la información extraída del trabajo de campo. En ella, se propone el desarrollo de una unidad didáctica perteneciente al bloque del álgebra (sistemas de ecuaciones) que incluye juegos matemáticos. El trabajo efectuado permite concluir que el uso adecuado de juegos didácticos, tanto en los momentos del proceso de enseñanza precisos como en el modo en que el profesor los utiliza, favorece una mejora en el aprendizaje del álgebra superando algunas de las dificultades identificadas.

Palabras clave: juegos didácticos, álgebra, educación secundaria, juegos matemáticos, propuesta didáctica

Abstract

The present work is about the use of mathematical games in the algebra's area of Compulsory Secondary Education (CSE). The current literature related to both the use of games in general learning and, specifically, in Mathematics, as also those studies about the difficulties of the algebra's learning in CSE and its ranking position within both the school curriculum of MEC and Catalonia, has been revised. In this field study, interviews to three experts in mathematical education and games have been organized, summarized and analyzed. After this collecting, an educational proposal has been drafted based on the studied theory from the first part and on the information extracted from the field study. This one proposes the preparation of an algebra's teaching unit (systems of equations), including mathematical games. On the basis of the information gathered, it can be concluded that the use of appropriate teaching games gradually improves algebra's learning, overcoming the identified difficulties in the theory.

Key words: educational games, algebra, secondary school, math games, educational proposal

Índice de contenidos

Índice de cuadros	5
Índice de figuras	5
1.Introducción	6
1.1. Justificación y problema.....	6
2.Planteamiento del problema	8
2.1.Objetivos	8
2.2.Metodología	9
2.3. Justificación de la bibliografía utilizada	12
3. Marco teórico.....	14
3.1. Marco legislativo	14
3.2. El Informe PISA, PIRLS y TIMSS y los resultados de Matemáticas en España	17
3.3. Sobre la importancia de las Matemáticas en la sociedad del siglo XXI	18
3.4. La enseñanza-aprendizaje del álgebra en la ESO	19
3.4.1. Sobre el concepto e importancia del álgebra	19
3.4.2. Sobre las dificultades y errores en la enseñanza- aprendizaje del álgebra	21
3.4.3. Metodología y estrategias de enseñanza del álgebra	24
3.5. Los juegos matemáticos	26
3.5.1. El juego como actividad de enseñanza-aprendizaje: juegos didácticos	26
3.5.2. Tipos de juegos educativos.....	28
3.5.3. Importancia de la perspectiva lúdica en el aprendizaje de las Matemáticas	30
3.5.4. Conceptualización de juego matemático.....	30
4. Estudio de campo	32
4.1.Resultados de las entrevistas	32
4.1.1. Resultados relacionados con el álgebra en el currículum de matemáticas de la ESO	32
4.1.2. Resultados relacionados con los juegos matemáticos.....	35
4.1.3. Resultados relacionados con las orientaciones didácticas	38
5.Propuesta didáctica: El uso de los juegos en la unidad de álgebra de 3º de ESO.	40
5.1.Introducción y justificación	40
5.2.Metodología	41
5.3.Actividades.....	42
5.4.Evaluación	42
5.5.Unidad temática que se desarrolla de 3º de ESO: Sistemas de ecuaciones	43
5.5.1. Contenidos, objetivos y competencias	43
6.Aportaciones del trabajo.....	48
7.Discusión.....	49
8.Conclusiones	50

9.Limitaciones del estudio.....	52
10. Líneas de investigación futuras	53
11.Bibliografía	54
11.1. Referencias	54
11.2. Bibliografía complementaria	58
12.Anexos.....	59
12.1. Anexo 1. Juegos seleccionados y analizados para la enseñanza del álgebra ..	59
12.2. Anexo 2. Fichas de análisis y evaluación de juegos.....	64
12.3. Anexo 3. Transcripción de las entrevistas.....	72
12.3.1. Entrevista al Dr. J. Deulofeu.....	72
12.3.2. Entrevista al Dr. A. Mallart	75
12.3.2. Entrevista al Dr. J.M. Gairín	78
12.4. Anexo 4. Síntesis de los juegos analizados.....	82

Índice de cuadros

Cuadro Nº 1. Relación entre objetivos e instrumentos y metodologías para lograrlos.....	8
Cuadro Nº 2. Ficha de análisis y evaluación de juegos	9
Cuadro Nº 3. Perfil de los expertos entrevistados.....	10
Cuadro Nº 4. Dificultades en la enseñanza-aprendizaje del álgebra.....	14
Cuadro Nº 5. Comparación entre los contenidos de álgebra de la legislación estatal y la de Cataluña.....	15
Cuadro Nº 6. Competencias básicas de matemáticas.....	20
Cuadro Nº 7. Clasificación de juegos de Decroly y Monchamp (1983)	27
Cuadro Nº 8. Guión y justificación de las entrevistas efectuadas a los expertos.....	32
Cuadro Nº 9. Objetivos, competencias básicas y contenidos de 3º de la ESO en álgebra.....	40
Cuadro Nº 10. Criterios de evaluación	42
Cuadro Nº 11. Objetivos, competencias y contenidos de "Sistema de ecuaciones"	43
Cuadro Nº 12. Programación detallada de las sesiones de "Sistemas de ecuaciones"	43

Índice de figuras

Figura Nº 1. Algebra Puzzle.....	45
Figura Nº 2. Cuadrados mágicos en orden creciente de dificultad.....	45
Figura Nº 3. Ejemplo de tarjetas factorizadoras.....	60

1.Introducción

1.1. Justificación y problema

Muchos estudiantes de ESO, a pesar de que en general van bien en Matemáticas, muestran un considerable fracaso en la parte del álgebra.

El Informe Cockcroft (1985, p. 3) señala que “la notación simbólica que capacita a las matemáticas para que se usen como medio de comunicación, y así ayuda a hacerlas útiles, puede también hacer las matemáticas difíciles de entender y usar” refiriéndose a la dificultad que supone cualquier proceso de generalización de la aritmética y de la complejidad del concepto de variable.

El álgebra representa un pensamiento abstracto al cuál los alumnos de ESO no están acostumbrados cuando aprenden aritmética. Los primeros pasos que se dan hacia el razonamiento algebraico corresponden a la aritmética generalizada (Godino y Font, 2003). El alumno experimenta sus primeras dificultades con la variable, el signo igual y el uso de notaciones.

Los procesos de pensamiento algebraico surgen de la naturaleza lógica del álgebra. Tall (1989) reflexiona sobre los obstáculos en el desarrollo de la matemática. En primer lugar cita los obstáculos relativos al propio desarrollo de la matemática (conceptos o teorías que aún no se conocen o no son del todo correctas), en segundo lugar los obstáculos del tipo didáctico y en tercer lugar los obstáculos cognitivos que surgen de la necesidad de ir explicando conceptos de forma gradual (transposición didáctica) y de la estructura interna que va generando con ellos.

Estos obstáculos, a diferencia de los errores, se manifiestan a través de los errores cometidos por los alumnos. Estos errores no se han cometido por un descuido, son errores persistentes y repetitivos.

El SESM en Reino Unido investigó entre 1980 y 1983 a niños entre 13 y 16 años y concluyó que los errores que cometen los alumnos en secundaria se pueden clasificar entorno a cuatro grandes categorías:

- a) la razón de ser del álgebra y la naturaleza de la solución
- b) las convenciones y el uso de la notación en álgebra
- c) el significado de las letras como incógnitas y variables
- d) tipos de relaciones y métodos utilizados en aritmética (Booth,1988)

La literatura revisada respecto al papel del juego en la cultura (Huizinga, 1968) y en la enseñanza-aprendizaje (Tomàs,1997, Bishop, 1998, Corbalán, 1994) así como la propia experiencia sustentan la influencia que puede ejercer el juego en la mejora del aprendizaje del álgebra.

A nivel de juegos matemáticos, las investigaciones realizadas por Mallart (2008) o Gairín (1990) nos ponen de relieve esta vía de mejora de la enseñanza en las matemáticas.

La inclusión de juegos matemáticos en la programación del álgebra supone al profesor una innovación en su docencia y al alumno un incentivo para aprender. Ello supone, en cierta manera, cambiar el rol tradicional del profesor y del alumno lo que puede ayudar a acabar con el tópico de que la matemática es una asignatura difícil y aburrida.

Por todo ello, en este trabajo se plantea realizar una propuesta de enseñanza del álgebra de 3º de ESO incluyendo juegos que puedan contribuir a la mejora del aprendizaje.

2.Planteamiento del problema

El problema que se pretende abordar mediante este trabajo se podría definir de la siguiente forma: la enseñanza-aprendizaje del álgebra en la ESO presenta dificultades y necesita mejorar a la luz de indicadores diversos tales como los Informes PISA (2013), PIRLS y TIMSS (2011), investigaciones realizadas al respecto (Socas, 2011) así como nuestra propia experiencia en la realización de las prácticas o impartiendo clases particulares. Por ello las preguntas que se plantean en este estudio son:

- ¿Cuáles son las razones por las que la enseñanza-aprendizaje del álgebra es insatisfactoria en la ESO?
- ¿El uso de juegos matemáticos en este proceso de enseñanza-aprendizaje podría mejorar la comprensión del álgebra en ESO?

A través de este trabajo se quiere contribuir a disminuir estas dificultades, que vienen siendo crónicas, en el aprendizaje del álgebra a través de su enseñanza mediante juegos matemáticos.

2.1.Objetivos

A partir de la justificación del problema, el objetivo principal de este trabajo es el siguiente:

Elaborar una propuesta de enseñanza de álgebra en el segundo ciclo de ESO que incluya a los juegos matemáticos como recurso didáctico.

Para conseguir este objetivo se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Revisar y exponer las principales aportaciones existentes en la literatura sobre juegos de álgebra en segundo ciclo de ESO.
- Estudiar las principales características y aplicaciones educativas de los juegos matemáticos en el segundo ciclo de ESO.
- Recopilar y clasificar juegos de álgebra para su uso en segundo ciclo de ESO.

2.2. Metodología

Este trabajo consta de una revisión de la literatura sobre los juegos matemáticos y la enseñanza-aprendizaje del álgebra, de una revisión, clasificación y selección de juegos para la enseñanza del álgebra y un estudio de campo consistente en 3 entrevistas en profundidad a expertos en Didáctica de las Matemáticas. La síntesis de la información extraída de todo ello ha servido de base para realizar una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje del álgebra en 3º de ESO.

Cuadro N° 1. Relación entre objetivos e instrumentos y metodologías para lograrlos.

Objetivos	Instrumentos o medios
Revisar y exponer las principales aportaciones existentes en la literatura sobre juegos de álgebra en segundo ciclo de ESO	Bibliografía seleccionada y proporcionada por el director
Estudiar las principales características y aplicaciones educativas de los juegos matemáticos en el segundo ciclo de ESO	Bibliografía seleccionada y proporcionada por el director Entrevistas a expertos
Recopilar y clasificar juegos de álgebra para el segundo ciclo de ESO	Ficha de elaboración propia

Nota: Relación entre objetivos e instrumentos y metodologías para lograrlos Fuente: Elaboración propia.

Para la revisión bibliográfica se han utilizado las siguientes fuentes y recursos para obtener, recoger y seleccionar la información bibliográfica:

- La biblioteca de Humanidades de la UAB
- La biblioteca virtual de la UNIR
- La base de datos DIALNET
- Blogs de Internet
- Portales educativos
- Google académico

Se han utilizado como criterios de búsqueda y selección las palabras clave en el campo de estudio: matemática, álgebra, juego matemático y educación secundaria. Siempre que se ha podido se han consultado referencias primarias aunque en algunas ocasiones se han utilizado de secundarias.

Para la revisión, selección y clasificación de juegos en el área de álgebra se ha elaborado un modelo de ficha a tal fin (Cuadro N° 2).

Cuadro Nº 2. Ficha de análisis y evaluación de juegos.

FICHA DE ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE JUEGOS						
Datos de identificación						
Título del juego						
Referencia						
Curso			Tiempo necesario			
Tipo de material	on-line		Software		vivencial	
Contenidos tratados						
Conceptuales						
Procedimentales						
Actitudinales						
Competencias	TIC		Inglés		Trabajo en equipo	
	Motrices					
Descripción						
Observaciones						
Características técnicas						
Grado de complejidad	Baja		Media	✓	Alta	
Función	Motivadora		Adquisición de dominio	✓		
Momento didáctico	Inicial		Desarrollo	✓	Final	
Dificultad	Baja		Media	✓	Alta	
Capacidad lúdica	Baja		Mediana	✓	Alta	
Nivel de autonomía	Baja		Mediana	✓	Alta	
Accesibilidad	Baja		Mediana	✓	Alta	
Registro de rendimiento	Baja		Mediana	✓	Alta	

Nota: Ficha de análisis y evaluación de juegos. Fuente: Elaboración propia.

La ficha de evaluación y de análisis del juego pretende sistematizar y recoger la información didáctica, las características técnicas y las fuentes adecuadas para poder acceder fácilmente al recurso cuando se convenga. En el primer apartado de la ficha, correspondiente a los datos de identificación, se recoge el título del juego y la referencia de donde se ha extraído. En el segundo apartado de la ficha, se recoge la información didáctica más relevante. Primeramente se recoge el curso en el que se debería utilizar el juego según la actual ordenación de estudios, el tiempo necesario para su correcta utilización, el agrupamiento de personas necesario para realizar el juego (puede ser de una persona a la totalidad de la clase) y el tipo de material que se utiliza, ya sea on-line, software, material o vivencial. A continuación, se mencionan los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudes donde se circunscribe el juego y las competencias que trabaja. A continuación hay una descripción detallada del juego y unas

observaciones del mismo para indicar ideas claves del mismo. Finalmente, se caracterizan en un escala subjetiva (alto, medio, bajo) los siguientes criterios: grado de complejidad, dificultad, capacidad lúdica, nivel de autonomía, accesibilidad y registro de rendimiento (si queda o no un registro del desempeño de los alumnos) y en una taxonomía estos otros: función (motivadora, integradora, social) y momento didáctico (inicial, desarrollo, final).

La entrevista a expertos, que forma parte del trabajo de campo, se ha obtenido la autorización expresa para difundir en el presente trabajo las entrevistas. La realización de éstas debe contribuir a conocer el punto de vista de los especialistas en didáctica de las matemáticas acerca de la enseñanza del álgebra y el uso de juegos matemáticos en la educación secundaria, sus dificultades, métodos y aspectos en general a tener en cuenta

Se han realizado entrevistas a tres expertos cuyos perfiles profesionales son los indicados en el Cuadro N° 3.

Cuadro N° 3. Perfil de los expertos entrevistados.

Cuadro N.º 3. Perfil de los expertos entrevistados.				
Expertos		Jordi Deulofeu	Alberto Mallart	José M ^a Gairín
Currículum	Universidad	Universitat Autònoma de Barcelona	Universitat de Barcelona	Universidad de Zaragoza
	Sexo	Hombre	Hombre	Hombre
	Edad	60 años	33 años	64 años
	Titulación	Doctor	Doctor	Doctor
	Materias que imparte	Enseñanza de la Didáctica de las matemáticas en el Máster de secundaria	Matemáticas a ESO y Bachillerato	Jubilado
		Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	Didáctica de las matemáticas a la UB	
Experiencia docente	Situación contractual	TU	Asociado	TU
	Antigüedad de la universidad	35 años	4 años	24 años
	Antigüedad en la función docente	38 años	7 años	38 años
	Antigüedad en la función investigadora	30 años	4 años	32 años

Nota: Perfil de los expertos entrevistados. Fuente: Elaboración propia.

Las entrevistas se han realizado por videoconferencia a tres expertos en Didáctica de las Matemáticas, previo envío del guión. Los expertos han sido especialmente elegidos considerando su trayectoria investigadora en juegos matemáticos.

2.3. Justificación de la bibliografía utilizada

Para la realización del presente trabajo se ha utilizado bibliografía relevante, de prestigio académico y de autores reconocidos como expertos en la materia a tratar (didáctica de las matemáticas, del álgebra, uso de los juegos en el aprendizaje de las matemáticas y del álgebra). La bibliografía se puede separar en la utilizada para hacer la fundamentación teórica y aquella para encontrar ejemplos de juegos y aplicaciones didácticas.

A continuación, referente a la primera parte, se comenta la bibliografía utilizada para realizar cada apartado perteneciente al marco teórico.

En relación al capítulo del marco legal se ha consultado la legislación vigente o sea la LOE y la LOMCE en tanto que ley aprobada aunque todavía no vigente y los decretos que desarrollan el currículum tales como el Real Decreto 1631/2006 y el Decreto 143/2007 de la Comunidad Autónoma de Cataluña en los aspectos relativos a contenidos, objetivos y competencias del álgebra en el segundo ciclo de la ESO.

Para contextualizar la situación actual de los resultados en educación matemática y en álgebra en España se han utilizado los informes internacionales de PISA, PIRLS y TIMSS. Dichos Informes aportan datos recientes de los resultados de aprendizaje de los alumnos en la enseñanza obligatoria en matemáticas. El primero de ellos nos proporciona dicha información desde una perspectiva internacional y el Informe PIRLS y TIMSS desde una perspectiva nacional y de una autonomía.

El subcapítulo sobre la importancia de las matemáticas se ha apoyado en Vázquez (2004) y en de Guzmán (2007). El subcapítulo de la didáctica de las matemáticas se ha fundamentado en de Guzmán (2001) y Socas (1989) donde se han extraído las características esenciales de la Matemática a tener en cuenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Booth (1983) se ha extraído la columna vertebral de los subcapítulos: *dificultades para el aprendizaje del álgebra* y *Errores comunes* ya que el autor recoge datos precisos sobre los errores más frecuentes en la transición al álgebra.

En relación a los juegos en general, el presente trabajo se ha apoyado en Huizinga (1995) quien aporta una visión antropológica general e histórica sobre el

juego y Tomàs (1997) que describe las características didácticas del juego en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por lo que se refiere a los juegos matemáticos, en los apartados conceptualización de juego matemático, importancia de la perspectiva lúdica en el aprendizaje de las Matemáticas, tipos de juegos educativos y el juego como actividad de enseñanza-aprendizaje, se han considerado los trabajos de Gairín (1990, 2001, 2002), en los que demuestra la importancia y los efectos de la utilización del juego en matemáticas. También se ha consultado a Deulofeu (1999) quien reflexiona sobre las recreaciones y juegos en las actividades matemáticas y Mallart (2008) quien nos aporta su visión sobre los juegos en la resolución de problemas matemáticos.

Finalmente, para la concreción didáctica se ha realizado una búsqueda de recreaciones, juegos y aplicaciones, algunas basadas en bibliografía académica (por ejemplo Corbalán (1994, 1996)) y otras a través de blogs o webs cuya referencia se puede consultar en el apartado de referencias bibliográficas.

3. Marco teórico

En este apartado se pretende exponer las ideas esenciales sobre la importancia de la matemática para la formación de un ciudadano del siglo XXI, el papel del álgebra dentro de la matemática, así como describir sucintamente uno de los recursos didácticos para la enseñanza obligatoria como son los juegos matemáticos. También presentamos las directrices generales de la enseñanza-aprendizaje del álgebra.

3.1. Marco legislativo

La LOE establece el marco general de la enseñanza en España y la LEC es la ley de educación de Cataluña, que complementa todo aquello que es competencia exclusiva. Estas leyes desarrollan en Reales Decretos o Decretos el currículum escolar. En el Cuadro N°4 describimos los contenidos de álgebra del Real Decreto 1631/2006 y del Decreto 143/2007 de 26 de junio de la Comunidad Catalana.

Por otra parte, el Decreto 143/2007 de 26 de junio de 2007 (Diario Oficial de la Generalitat de Cataluña de 29 de junio de 2007, núm. 4915) concreta y desarrolla, en principio, los puntos anteriormente expuestos.

El grupo coordinado por Burgués y Sarramona (2013) establece 12 competencias en el ámbito matemático. Un análisis de las competencias en las que se trabaja “Lenguaje y cálculo numérico” muestra que 10 de ellas se consiguen, en parte a través del contenido curricular “Lenguaje y cálculo algebraico” lo que indica la importancia de este contenido. Se pueden ver las competencias desarrolladas en el Cuadro N° 5.

Finalmente, para completar este apartado, hace falta mencionar la Ley orgánica 8/2013 de 9 de diciembre (LOMCE). Todavía no se han desarrollado muchos aspectos de esta ley que ya marca las directrices principales. En el preámbulo de la misma se hace referencia a la necesidad de mejorar los resultados obtenidos por los alumnos en las pruebas de evaluación internacionales como, por ejemplo, PISA-2009. Se hace referencia, entre otras materias, a los resultados manifiestamente mejorables de matemáticas.

En su articulado se establece que habrá matemáticas en ambos cursos del primer ciclo de ESO (art. 24.1.e). Como novedad, en el mismo artículo se establece que, como ocurre actualmente en cuarto curso de ESO, en adelante, ya en el tercer curso se estudiarán *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas* o, alternativamente, *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas*, a elección

de los padres, madres o tutores o, en su caso, de los propios alumnos. De momento, no se han establecido los contenidos de cada una de estas modalidades.

Cuadro Nº 4. Comparación entre los contenidos de álgebra de la legislación estatal y la de Cataluña.

Decreto 143/2007	Real Decreto 1631/2006
• Utilización del álgebra simbólica en la representación de situaciones y la resolución de problemas particularmente los que representan relaciones de proporcionalidad directa e inversa. • Identificación y utilización de formas equivalentes de expresiones algebraicas sencillas y resolución de ecuaciones lineales. • Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas lineales con fluidez. Interpretación gráfica. • Análisis de funciones de una variable: dominio de definición, crecimiento/ decrecimiento y puntos de corte con los ejes incluyendo las funciones lineales y de proporcionalidad inversa. • Construcción de la gráfica de una expresión simbólica a partir de una gráfica más simple. • Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos • Resolución de ecuaciones de 1º y 2º grado y sistemas de ecuaciones lineales con fluidez. Interpretación gráfica. • Utilización del álgebra simbólica en la representación de situaciones y en la resolución de problemas, particularmente los que presentan relaciones lineales.	• Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos. • Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas. • Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas. • Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. • Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. • Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales. • Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.

Nota: Comparación entre los contenidos de álgebra de la legislación estatal y la de Cataluña. Fuente: Elaboración propia.

Cuadro N° 5. Competencias básicas de matemáticas.

Competencia 1	Traducir un problema en lenguaje matemático o una representación matemática utilizando variables, símbolos, diagramas y modelos adecuados.
Competencia 2	Utilizar conceptos, herramientas y estrategias matemáticas para resolver problemas.
Competencia 3	Mantener una actitud de investigación ante un problema ensayando diversas estrategias.
Competencia 4	Generar preguntas de tipo matemático y plantear problemas.
Competencia 5	Construir, expresar y contrastar argumentaciones para justificar y validar las afirmaciones que se hacen en matemáticas.
Competencia 6	Emplear el razonamiento matemático en entornos no matemáticos.
Competencia 7	Usar las relaciones que existen entre las diversas partes de las matemáticas para analizar situaciones y para razonar.
Competencia 8	Identificar las matemáticas implicadas en situaciones próximas y académicas y buscar situaciones que puedan relacionarse con ideas matemáticas concretas.
Competencia 9	Representar un concepto o relación matemática de varias maneras y usar el cambio de representación como estrategia de trabajo matemático.
Competencia 10	Expresar ideas matemáticas con claridad y precisión y comprender las de los demás.
Competencia 11	Emplear la comunicación y el trabajo colaborativo para compartir y construir conocimiento a partir de ideas matemáticas.
Competencia 12	Seleccionar y usar tecnologías diversas para gestionar y mostrar información, y visualizar y estructurar ideas o procesos matemáticos.

Nota: Competencias básicas de matemáticas. Fuente: Elaboración propia.

3.2. El Informe PISA, PIRLS y TIMSS y los resultados de Matemáticas en España

Entre las principales conclusiones que señala el Informe PISA 2012 para España tenemos que:

- El rendimiento educativo de España en matemáticas, lectura y ciencias permanece justo por debajo de la media de la OCDE a pesar de haber incrementado en un 35% el gasto en educación desde 2003 y de los numerosos esfuerzos de reforma a nivel estatal y regional.
- El rendimiento educativo de España está por debajo de la media de la OCDE en matemáticas, con una puntuación media de 484 puntos y se sitúa entre los puestos 31 y 36 de los 65 países y economías que participaron en la evaluación PISA 2012.

En concreto, dentro de las diferentes áreas de matemáticas los alumnos tienen fortalezas diferentes en las diferentes áreas evaluadas de las matemáticas. Así entre las conclusiones se tiene:

- De los tres procesos matemáticos que se miden en PISA 2012, los alumnos españoles obtienen mejores resultados en interpretar, aplicar y evaluar los resultados matemáticos (11 puntos por encima de la puntuación media de España en matemáticas) y peores en la utilización de conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemáticos (3 puntos por debajo) y en formular situaciones matemáticamente (8 puntos por debajo)
- Si comparamos las cuatro áreas de contenido que se miden en PISA 2012, los alumnos españoles obtienen mejores resultados en cantidad (7 puntos por encima de su puntuación media de España en matemáticas), resultados similares en incertidumbre y datos (2 puntos por encima) y cambio y relaciones (3 puntos por debajo), y peores resultados en espacio y forma (7 puntos por debajo).

Así los datos de PISA nos corroboran la necesidad de mejorar los resultados en lo relativo a los temas del álgebra.

Si nos fijamos en los estudios PIRLS y TIMSS (2011) cuyos países participantes se han seleccionado para la realización de este informe los pertenecientes a la Unión Europea (UE) ya la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), además de aquellos que tienen mayor interés para España, por razones de proximidad geográfica, socioeconómica o cultural y año de escolarización de los alumnos en el momento de realizar la prueba. Además,

en el caso de PIRLS, se recogen los resultados relativos a las comunidades autónomas de Andalucía y Canarias, que ampliaron la muestra para obtener resultados representativos propios.

El capítulo se estructura en cuatro apartados independientes: resultados en comprensión lectora, en matemáticas y en ciencias, y una breve conclusión. Para cada uno de ellos se distinguen los promedios globales, los niveles de rendimiento y los resultados.

En matemáticas y ciencias, por dominios de contenido, España ha logrado 482 puntos, lo que está por debajo de la media de la OCDE. Rumania y Polonia son los únicos países europeos que tienen menor puntuación media que España, aunque las diferencias no son significativas. La diferencia con países anglosajones como Inglaterra o Estados Unidos es de unos 60 puntos. La distancia con la puntuación de Hong Kong China, el país con mayor media, es de 120 puntos.

En el caso de España la variabilidad entre dominios de contenido y puntuación global (482) es pequeña, con mejores resultados en “números” (487) que en “formas y mediciones geométricas” (476). En “representación de datos” (479) la diferencia no es significativa.

Estas diferencias pueden reflejar que no se dedica idéntica atención a los tres dominios en la clase de matemáticas, además de la dificultad intrínseca de cada uno de ellos, entre otras posible causas.

3.3. Sobre la importancia de las Matemáticas en la sociedad del siglo XXI

La plena conciencia de la razón por la que se enseñan unos contenidos curriculares es clave para que un profesor dé sentido pleno a los contenidos que trabaja en sus clases. Una de estas razones estriba en comprender la importancia que tiene la matemática para el posterior desarrollo de nuestros alumnos como ciudadanos. Dos son las razones importantes de esta inclusión: la aplicabilidad que tienen las matemáticas en la gran mayoría de campos del conocimiento y también el desarrollo cognitivo que supone el trabajar los conceptos matemáticos y los procedimientos tales como la resolución de ecuaciones.

Vázquez (2004) nos presenta un recorrido y análisis del papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia y la tecnología. Al respecto afirma que uno de los motivos que han guiado la innovación matemática en los siglos pasados ha sido el deseo de entender cómo funciona la Naturaleza. La matemática forma, junto con el método experimental, el esquema conceptual en que está basada la ciencia moderna y en el que se apoya la tecnología, existiendo estrechas

interacciones entre ellas. Sobre estas bases nació la sociedad industrial hace varios siglos, y la nueva sociedad de la información se construye en el presente siguiendo las mismas pautas.

La matemática juega un papel fundamental en la ciencia moderna, tiene una marcada influencia sobre ella y a su vez se ve influenciada por la ciencia de una manera esencial. Estas son, brevemente presentadas, las dos concepciones que simbolizan las maneras diferentes de ver el gran edificio que es la matemática actual según Vázquez (2004).

Parte importante de las matemáticas que son enseñadas en las universidades de todo el mundo se consagra a la educación de ingenieros, físicos, químicos, biólogos, informáticos, economistas y profesionales de otras varias disciplinas. Sin embargo, creemos que tal aprecio no hace justicia al papel que las matemáticas juegan en la sociedad. Sostiene Vázquez (2004) que el papel de la Matemática que es aplicada en diversos contextos sociales va más allá de esta descripción y es más esencial.

3.4. La enseñanza-aprendizaje del álgebra en la ESO

3.4.1. Sobre el concepto e importancia del álgebra

La Enciclopedia británica (2013) define el álgebra como la rama de las matemáticas en donde las operaciones aritméticas y las manipulaciones formales se aplican a símbolos abstractos en vez de números concretos. La Real Academia Española (2013) la define como la parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se llama *incógnita*.

En este trabajo se entiende que el álgebra es una de las principales ramas de las matemáticas. Algunos la consideran una generalización abstracta de la aritmética puesto que permite obtener valores desconocidos mediante operaciones aritméticas. Y realmente, hasta el siglo XVII el álgebra no fue más que una generalización de la aritmética.

El álgebra clásica puede considerarse un simple instrumento para resolver ecuaciones. Por otro lado, más modernamente, el álgebra ha centrado la atención en las estructuras algebraicas. Una estructura algebraica es un conjunto bien definido con una o varias operaciones claramente definidas entre sus elementos

(operaciones internas) o entre sus elementos y elementos de otros conjuntos (operación externa).

El papel del álgebra en las Matemáticas se manifiesta en el lenguaje y los procesos de pensamiento algebraico y nuevos aspectos del desarrollo matemático.

El estudio de la sintaxis algebraica como especificidad de la sintaxis matemática, al considerar el álgebra simbólica como el lenguaje básico de la Matemática, es abordado en los trabajos del modelo de Kirshner (1985 y 2001). Su propuesta teórica, interpreta las manipulaciones algebraicas como un lenguaje en el sentido de Chomsky (1957) y adapta los modelos de la lingüística generativa transformacional al estudio del álgebra.

El álgebra utiliza una serie de notaciones novedosas para los alumnos como por ejemplo las variables y las expresiones algebraicas. Los párrafos que siguen se refieren a ella.

En muchas ocasiones, en el momento de plantear un problema no se conoce el valor de alguno de los datos intervinientes. Este dato de valor desconocido suele denominarse incógnita. En otras ocasiones, especialmente en la geometría y en la física, el valor de una magnitud no es fijo, sino que varía. Esta magnitud recibe el nombre de variable. Para representar estos datos desconocidos, incógnitas o variables, que no tienen asignado un valor numérico explícito se utilizan letras.

Una expresión algebraica es la expresión matemática de un conjunto de operaciones entre números, que son los datos conocidos, y letras que representan las incógnitas y variables.

Una expresión algebraica puede tener un término o más. Cada término está separado del siguiente por los signos $+$ o $-$. Las expresiones algebraicas se denominan también polinomios. Un polinomio de un solo término se denomina monomio; si tiene dos términos, binomio. El número posible de términos no está limitado.

Dos expresiones algebraicas relacionadas por el signo $=$ constituyen una igualdad algebraica. Existen dos tipos de igualdad algebraica: las ecuaciones y las identidades. Una ecuación es una igualdad algebraica que se cumple solo para algunos valores determinados de la incógnita. Estos valores que la cumplen se llaman soluciones. En cambio, una identidad se cumple para cualquier valor.

Existen estudios sobre la interacción del lenguaje algebraico con otros lenguajes. Destacan los estudios de Filloy (1991 y 1993) y Filloy y Rojano (1991) en los que se analizan problemas de traducción de lenguajes, del natural al algebraico y viceversa, en el marco de tendencias cognitivas presentes en el aprendizaje de conceptos más abstractos.

3.4.2. Sobre las dificultades y errores en la enseñanza-aprendizaje del álgebra

Las dificultades y los errores en el aprendizaje del álgebra son cuestiones importantes aún no resueltas que preocupan al profesorado de la matemática, así como a los investigadores de la enseñanza-aprendizaje de ella.

El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones.

Es frecuente que en el momento de dar el salto al álgebra desde la aritmética, alumnos con facilidad para los cálculos aritméticos se encuentren con dificultades. Esto se debe, principalmente, al superior nivel de abstracción del álgebra con respecto a la aritmética. Estas dificultades (Cuadro N°6) pueden durar un tiempo más o menos largo y, como consecuencia, generar un rechazo para el álgebra y las matemáticas en general.

Cuadro N° 6. Dificultades en la enseñanza-aprendizaje del álgebra.

Kieran y Filloy (1989)

- 1) La forma de ver el signo igual
- 2) Dificultades con las convenciones de notación
- 3) Dificultades con los métodos de simbolizar
- 4) Dificultades con las variables
- 5) Dificultades con las expresiones y ecuaciones
- 6) Dificultades con la resolución de ecuaciones
- 7) Dificultades con las funciones y sus gráficas

Nota: Dificultades en la enseñanza-aprendizaje del álgebra. Fuente: Elaboración propia.

Chorques (2013) señala que existen unas creencias establecidas entre los estudiantes que suponen una dificultad a la hora de la enseñanza del álgebra tales como:

- a) la identificación de una ecuación como un procedimiento para resolverla.
- b) averiguar si un número es solución de una ecuación dada, es decir, comparar el valor dado con el obtenido al resolver la ecuación, en lugar de reemplazar dicho valor en la ecuación.
- c) que se empleen letras en matemáticas no tiene ningún uso específico; se emplean simplemente para dotarlas de una mayor complejidad, haciéndolas más incomprensibles.

d) crear una solución que tenga el número 2 es una expresión del tipo $ax+b=2$, mezclando el concepto solución con el número escrito a la derecha del signo igual.

Chorques (2013) a su vez concluye diez tipos de dificultades:

- falta de habilidad en operaciones con números enteros,
- en operaciones de potencias, fracciones y operaciones combinadas con paréntesis,
- comprensión del concepto igualdad y ecuación,
- dificultad para interpretar enunciados verbales,
- dificultad para identificar la variable incógnita,
- traducción de enunciados verbales a lenguaje algebraico,
- dificultad para establecer relaciones entre enunciados.

La investigación sobre la didáctica del álgebra ha pasado por diferentes etapas según Radatz (1980) y Rico (1995): en una primera etapa la investigación consistía, prioritariamente, en hacer recuentos del número de soluciones incorrectas a una variedad de situaciones problemáticas y en hacer un análisis de los tipos de errores detectados, para proceder a una clasificación que permita examinar cómo éstos surgen a partir de la solución correcta, y, hacer inferencias sobre qué factores, especialmente del contenido matemático, pueden haber conducido al error.

En una segunda etapa, se toma conciencia de que el error es algo normal en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Ello supone indagar sobre los errores, no únicamente desde cuestionarios generales, sino, además, profundizar en el mismo proceso de construcción de los objetos matemáticos por parte de los alumnos como recurso para saber en qué están pensando. Por ejemplo en Brousseau, Davis y Werner (1986), se describe que los errores que cometen los alumnos muestran, en algunos casos, un patrón consistente; los alumnos tienen con frecuencia concepciones inadecuadas (“misconceptions”) sobre los objetos matemáticos; a veces, estas concepciones inadecuadas los conducen a usar procedimientos equivocados que no son reconocidos como tales por sus profesores; llegan a utilizar, en algunos casos, métodos propios ignorando el método propuesto por el profesor. Esto les lleva a señalar posibles caminos en los que el error puede presentarse: los errores como consecuencia de concepciones inadecuadas, los errores como la aplicación correcta de un procedimiento sistematizado que es inapropiado, los errores como consecuencia del uso de métodos propios del estudiante, en general informales, entre otros. Esta segunda etapa se caracteriza

por reconocer que los errores son también producto de otras variables del proceso educativo: profesorado, currículo, contexto (sociocultural, institucional) y de sus interacciones, Mulhern (1989), lo que pone de manifiesto la complejidad para analizar los errores en el aprendizaje de las Matemáticas, y la necesidad de tener marcos teóricos para el análisis y la explicación de los mismos, como señalaba Radatz (1979).

En una tercera etapa, encontramos estudios en los que se abordan globalmente las dificultades y errores que se dan en el aprendizaje del lenguaje algebraico en la Educación Secundaria.

Las dificultades pueden organizarse en cinco grandes categorías: *complejidad de los objetos de las Matemáticas, procesos de pensamiento matemático, los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.*

A continuación enumeraremos, sin ánimo de ser exhaustivos, algunos de los errores que, más frecuentemente, cometen los alumnos:

- En un primer momento, algunos alumnos pueden confundir la letra x , utilizada como incógnita o variable, con el signo de multiplicar. En este sentido, para evitar confusiones, puede ser conveniente utilizar siempre el símbolo ‘ $\cdot$ ’ para la multiplicación y, al menos al principio, no omitirlo en ningún caso. Si en la expresión $7 \cdot x$ omitiéramos el punto de la multiplicación escribiríamos simplemente $7x$. A partir de las notaciones y sintaxis propias de la aritmética, algunos alumnos podrían pensar que estamos refiriéndonos a un número de dos cifras, en base 10, en el cual el ‘7’ es la cifra de las decenas y ‘x’ la cifra de las unidades que, en este caso, es desconocida. A partir de la notación propia de la aritmética, la solución de la ecuación $7x=70$ sería $x=0$ en vez de $x=10$; la solución de $7x=77$ sería $x=7$ en vez de $x=11$, etc. Además, puede ser conveniente cada vez que leamos la expresión $7 \cdot x$, que digamos ‘7 veces x’.
- Tal como señalan McGregor y Stacy (1997), en aritmética, en geometría o en matemática aplicada, la notación de conceptos suele coincidir con la inicial de los mismos. Por ejemplo a los alumnos se les ha enseñado que el área de un rectángulo, en metros cuadrados, se obtiene multiplicando la longitud de la base, en metros, por la longitud de la altura también en metros. Suele escribirse *Área = base altura* o simplemente utilizando las iniciales $A = b a$

Pero los alumnos no están acostumbrados a que una letra represente un número cualquiera sin que esta letra tenga que representar necesariamente la inicial de algún concepto.

Socas (2011) pone de manifiesto la categorización de los errores fundamentándose, exclusivamente en el conocimiento matemático; en segundo lugar, que en las investigaciones que combinan resultados empíricos con algunos supuestos sobre las estructuras mentales y ciertas leyes generales del procesamiento de la información, es posible predecir algunos patrones comunes de los errores, es decir, que las interpretaciones que toman como base teórica algunos principios del procesamiento de la información ofrecen versiones más completas de las clasificaciones de los errores; en tercer lugar, que a partir de estos informes sobre la clasificación de los errores y su frecuencia, desafortunadamente, no se puede explicar su origen y en consecuencia no podemos aportar un trato sistemático a los mismos.

Los errores se analizan desde tres ejes, no disjuntos, que permiten estudiar el origen del error. De esta forma se sitúan los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos: *Obstáculo* (cognitivos, didácticos y epistemológicos), *Ausencia de sentido* (semiótico, estructural y autónomo) y *Actitudes afectivas* (emociones, actitudes y creencias) (Socas, 1997, 2001 y 2007).

3.4.3. Metodología y estrategias de enseñanza del álgebra

Teniendo en cuenta la obligatoriedad de la etapa educativa a la cual nos referimos conviene que el profesorado de matemáticas se marque el reto de mostrar la utilidad de las matemáticas a la propia vida del alumnado. Cuando se explica álgebra, esta relación es a veces poco visible, pero no por ello se debe renunciar a mostrarles el álgebra como una herramienta muy útil para resolver problemas de la vida cotidiana.

Por otro lado, de un modo general, la enseñanza del álgebra no puede quedar al margen de los avances en psicología del aprendizaje. Por ello conviene recordar los modelos más vigentes al respecto:

a) *Modelo histórico social de Vigotsky*. De acuerdo con este modelo, para cada estudiante existe una zona de desarrollo próximo, dentro de la cual es capaz de aprehender nuevos conocimientos y fuera de la cual no es capaz de hacerlo.

Adecuando este modelo al aprendizaje específico de la matemática, se puede decir que dicha zona depende de varios factores:

- El contexto escolar, familiar y social donde interactúa el estudiante

- Sus capacidades innatas para la matemática
- Sus conocimientos previos sobre los temas de estudio
- El grado de motivación e interés que el estudiante presente en el aprendizaje de la misma y el grado de motivación que el docente logre crear en él.

b) *El modelo pedagógico del aprendizaje significativo de Ausubel.*

Según este modelo los conocimientos se deben presentar al alumno por parte del docente, utilizando hasta donde sea posible: recursos, conocimientos, herramientas, y otras ayudas que de alguna manera sean significativos para él, es decir, que él esté familiarizado con ellos y ya los maneje. Estas ayudas deben ser seleccionadas por el docente, teniendo en cuenta el nivel de desarrollo del pensamiento del estudiante y el contexto social en el cual interactúa de acuerdo a su edad.

c) *Teoría de las inteligencias múltiples de Gardner.*

Al aplicar la metodología propuesta, el estudiante desarrolla la inteligencia espacial, la motricidad, la inteligencia lógico-matemática y la inteligencia interpersonal al interactuar con otros estudiantes en los juegos propuestos.

Y ya centrándonos más en cuestiones del contenido del álgebra, se señala a continuación una serie de avances que se han producido al respecto.

Rojano (1994) muestra la investigación de la Matemática escolar considerada como lenguaje en los años 80 y 90, frente a las tendencias de los 70, que estuvo más centrada en la construcción de conceptos. La autora plantea algunas de las implicaciones didácticas de esta nueva localización de la Matemática escolar y, en especial, se refiere al lenguaje algebraico por ser el álgebra simbólica el lenguaje básico de la Matemática. La autora pone de manifiesto como en las dos últimas décadas, se va despertando el interés por los aspectos semánticos y sintácticos de la Matemática para poder explicar las observaciones hechas acerca de las interpretaciones y usos que los estudiantes hacen de los símbolos matemáticos, y, se va observando un cambio significativo en la educación matemática que lleva a considerar esta disciplina como un lenguaje.

En relación con los procesos del pensamiento algebraico: la sustitución formal, la generalización y la modelización, son los procesos característicos del lenguaje algebraico.

Las investigaciones realizadas sobre el pensamiento algebraico ponían de manifiesto que la aritmética es primordial para acceder al álgebra. Ahora bien, la búsqueda de esta relación entre la aritmética y el álgebra nos ha llevado a dos posiciones diferentes.

Una la podemos ilustrar tomando como referencia el trabajo de Drijvers y Hendrikus (2003), entre otros autores, en la que el álgebra tiene sus raíces en la aritmética y depende fuertemente de su fundamentación aritmética, puesto que la aritmética tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente.

La otra posición sugiere que se debe promover, en la educación primaria, el desarrollo de los aspectos algebraicos que ya posee el pensamiento de los niños, o bien, que debemos fomentar cambios en la forma de pensar de los niños que les conduzca al pensamiento algebraico y que estos pueden ser promovidos mediante el uso de ciertas herramientas, como notaciones, diagramas o gráficos que impliquen un nivel más elevado de generalidad desde la educación primaria (Lins y Kaput, 2004).

Siguiendo a Socas (1989), para minimizar errores y para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje puede ser adecuado utilizar y trabajar con los cuatro lenguajes básicos implicados: aritmético, verbal, algebraico y geométrico. Los valores pertenecen al lenguaje aritmético; las fórmulas al algebraico; el lenguaje geométrico está constituido por representaciones semióticas visuales y, finalmente, el lenguaje verbal aparece al describir las conclusiones o cuando se explica un concepto con palabras.

Palarea (1999) señala cinco perspectivas para enfrentar las dificultades de los alumnos con el álgebra: la complejidad de los objetos algebraicos, los procesos de pensamiento algebraicos, los procesos de enseñanza, los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra.

La investigación realizada sobre los errores que los alumnos cometen en álgebra nos proporciona conocimiento válido sobre cómo abordar la enseñanza del álgebra teniendo en cuenta los errores más comunes que se han estudiado.

3.5. Los juegos matemáticos

En este apartado se presenta un primer punto en el que se explica la importancia del juego para el desarrollo del alumno, las funciones educativas del mismo y una tipología de juegos, para luego centrarse en el juego matemático.

3.5.1. El juego como actividad de enseñanza-aprendizaje: juegos didácticos

Una obra de referencia universal sobre el tema del juego es la de Huizinga. Sitúa el juego como motor de la cultura cuando nos señala su convicción de que la

cultura humana proviene del juego y en él se desarrolla. Afirma "El espíritu de concepción del juego es, como impulso social, más antiguo que la cultura misma y se extiende por todas las etapas de la vida como un fermento cultural..." (Huizinga, 1968, p.145). De ahí la importancia del juego en toda actividad humana, siendo esta una de las razones por las que se piensa que la enseñanza-aprendizaje debe considerarlo.

El juego puede contribuir o intervenir de una manera directa como medio facilitador de la adquisición y repetición de ciertos conocimientos indispensables, gracias a procedimientos de autoeducación y de individualización según Tomàs (1997).

El niño cuando juega (sin dirección del adulto) conoce lo que le rodea, cuáles son sus capacidades, cómo las debe modificar para conseguir mejores resultados. En definitiva, el niño, jugando, aprende. El centro educativo no puede ignorar de ninguna manera la realidad del alumno y debe integrarlo dentro de su ámbito. Con esto queremos decir que la escuela, en su planificación debe contemplar el papel que ocupará el juego.

Los juegos educativos tienen como finalidad principal ofrecer al niño objetos susceptibles de favorecer el desarrollo de ciertas funciones mentales, la iniciación de ciertos conocimientos y también permitir repeticiones frecuentes en relación a la capacidad de atención, retención y comprensión.

Si bien los juegos educativos contribuyen a la educación general del niño o adolescente, los juegos didácticos son aquellos que proporcionan un mejor tratamiento, estudio o comprensión de temas de las diversas áreas del currículum escolar. Así podemos mencionar los juegos matemáticos, juegos de expresión corporal, escrita, etc.

Los juegos didácticos permiten y favorecen un aprendizaje más lúdico, menos rutinario, más placentero pero su finalidad no está en el juego sino en el aprendizaje de aquella parcela del currículum escolar. Así, con frecuencia, puede resultar difícil distinguir entre juego didáctico y actividad académica. Las diferencias las debemos buscar más en el espíritu, percepción o talante con que se realiza la actividad que en la misma actividad.

Por todo ello existen una serie de recomendaciones que debemos tener en cuenta para la utilización de juegos de enseñanza- aprendizaje (Tomàs, 1997):

- crear condiciones espaciales adecuadas delimitando zonas de juego para las diferentes actividades
- cuidar la ambientación de la clase

- ofrecer juegos adecuados a la capacidad de movimiento y percepción del niño
- ofrecer el material necesario
- el material debe estar accesible
- el material debe estar ordenado y ser fácilmente identificable
- hay que conservar bien el material

Además, los materiales de juegos deben ser estéticamente vistosos y agradables y deben reunir condiciones de seguridad.

3.5.2. Tipos de juegos educativos

No existe una única clasificación de juegos sino tantas como autores estudian el tema del juego; nosotros señalaremos tres clasificaciones de los juegos, según diferentes criterios: *el temporal*, *el de número de sujetos implicados en el juego* y *el referente a la propia naturaleza del juego*.

La primera tipología de juegos que señalaremos es la de Piaget. Considera tres estructuras fundamentales del juego ligadas a una serie: *juego-ejercicio*, *juego simbólico* y *juego con reglas*. Los tres tipos son formas conductuales en los que predomina la asimilación; su diferencia está en la realidad, en que cada etapa de desarrollo es asimilada según diferentes esquemas.

Decroly y Monchamp (1983) clasifican los juegos según su naturaleza en: juegos de percepción sensorial y motriz y juegos de ideas generales (Cuadro N° 7).

Cuadro N° 7. Clasificación de juegos de Decroly y Monchamp(1983).

Naturaleza	Percepción sensorial y aptitud motriz			Ideas generales		
Número de alumnos:	Visuales motores	Motores y auditivos	Visuales Rel. Espaciales	Asociación ideas	Dedución	Inducción
Individual						
Pequeño grupo (pareja, trío)						
Colectivo						

Nota: Clasificación de juegos de Decroly y Monchamp. Fuente: Decroly y Monchamp (1983).

Los juegos visuales motores fijan la atención y la mantienen mediante una serie de ejercitaciones sensoriales. Desarrollan también la lógica elemental mediante la constatación natural de los errores cometidos. Son ejemplos de estos tipos de juegos: los bloques, los cubos, las clasificaciones, los encajes, los bastidores, los palets, las cajas de sorpresa, los juegos de acoplamiento lógico, juegos de construcción y de montaje y los juegos mecánicos.

Los juegos motores y auditivos pretenden concienciar al niño de sus movimientos y de las sensaciones de las que ellos mismos son punto de partida. Sirven a tal finalidad los juegos de bolsas de objetos, los juegos de selección y las cajas sonoras.

Los juegos visuales son todos aquellos que contribuyen a desarrollar las aptitudes sensoriales y a discriminar las cualidades de los objetos. Son ejemplos los juegos de parejas de familias, que consisten, esencialmente, en aparejar.

Los juegos de relaciones espaciales se refieren a la orientación y la perspectiva o más exactamente a la aptitud para reconocer de forma abstracta, en un plano, la tercera dimensión. Obedecen a este tipo de juegos el reconocimiento de posiciones, un objeto móvil respecto un objeto fijo.

Los juegos de ideas generales o de asociaciones inductivas y deductivas permiten crear en el niño relaciones que no son solamente espaciales o sensoriales sino que tienen un valor mental más elevado y hacen intervenir otros factores como el tiempo, el fin, el medio, la causa, el instrumento, el origen. etc.

Los juegos de deducción desarrollan la capacidad de abstracción y de generalización. No sólo establecen las relaciones causa-efecto sino que buscan las relaciones entre conjuntos de objetos o entre cualidades pertenecientes a diversos objetos. Por ejemplo: los objetos que faltan, juegos de clasificación combinada, etc. Atendiendo al número de alumnos que intervienen podemos clasificar los juegos en colectivos, individuales o de pequeño grupo.

Una clasificación dicotómica sencilla que nos ofrecen Martín, Muñoz y Oller (2009) es:

- a) *juegos de conocimiento*. Se clasifican así los juegos cuyos contenidos son los tópicos clásicos de las Matemáticas. En este sentido, los juegos de álgebra, que trabajamos en este estudio, pueden incluirse en este tipo.
- b) *juegos de estrategia o de pensar* (Gairín, 2001). Su práctica demanda a los estudiantes, la utilización de técnicas heurísticas similares a las que se emplean para la resolución de problemas. Estos juegos se caracterizan por tres elementos diferenciados:

- unas condiciones iniciales acerca de los materiales que intervienen (el tablero, las fichas, las cartas, etc.) y el número de jugadores que participan
- unas reglas acerca de cómo hay que actuar sobre el juego, y
- un objetivo final que consistirá en vencer al propio juego (en el caso de los jugadores solitarios) o en vencer al oponente (en el caso de los juegos bipersonales).

3.5.3. Importancia de la perspectiva lúdica en el aprendizaje de las Matemáticas

Los juegos matemáticos son un buen recurso didáctico en la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (Corbalán, 1994).

Los juegos matemáticos ejercen tres funciones:

- 1) *la función motivadora*, en tanto que, una adecuada y bien implementada introducción de juegos en el aula rompe la rutina que pueda suponer la explicación tradicional de los temas.
- 2) *la función socializadora*, en tanto que la mayoría de veces los juegos se llevan a cabo en parejas o grupos (pequeños, medianos y grandes) y suponen una interacción entre iguales o una interacción entre alumno y profesor. La interacción supone una relación con el otro, una aceptación o reconocimiento del otro y contribuye sin duda a desarrollar la competencia social.
- 3) *la función integradora*, en tanto que ocasiona una oportunidad para trabajar la diversidad. Bishop (1998) señala que “los juegos existen en todas partes y cuando se enseña en una situación multicultural necesita conocer juegos que sean universalmente conocidos y practicados. Por eso los juegos pueden constituir un punto de contacto entre niños de grupos culturales y lingüísticos distintos que quizás no tengan otro punto de contacto” (p.20).

3.5.4. Conceptualización de juego matemático

Definir en qué consiste un juego matemático no está exento de dificultades. Vamos a intentarlo a fin de comunicar mejor aquello de lo que hablamos. Por ejemplo, Deulofeu(1999) distingue entre juego y recreación matemática.

Tomaremos la definición de Gardner (1983): "juego matemático (...) son Matemáticas cargadas de una fuerte componente lúdica; pero poco aclaramos así,

porque las ideas de “juego”, “recreación” y “lúdico” son aproximadamente sinónimas” (p.1).

Bright, Harvey y Wheeler (1985) identifican tres variables para caracterizar un juego:

- 1) *características del juego*: formato, restricciones impuestas del juego, necesidad de reacción, tiempo y espacio
- 2) *objetivos educativos del juego* (contenido del juego, nivel instruccional y nivel taxonómico: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación)
- 3) *interacciones de aprendizaje* durante el juego (nivel competitivo, igualdad entre estudiantes).

Gairín (1990) constata que mediante los juegos matemáticos podemos estimular el interés y desarrollar actitudes positivas hacia las matemáticas y que puede ayudar a los propósitos siguientes:

- Desarrollar conceptos o estructuras conceptuales matemáticas.
- Proporcionar ejercicios tanto para la práctica de algoritmos como para fomentar la experimentación.
- Desarrollar habilidades de percepción y razonamiento.
- Crear ocasiones para utilizar el pensamiento lógico y de emplear técnicas heurísticas apropiadas para la resolución de problemas.

También Guzmán (2007) nos señala la estrecha vinculación de la actividad matemática con la actividad lúdica. El autor ve en la actividad matemática muchos de los rasgos que tiene el juego. Huizinga (1995) considera que la matemática, por su naturaleza misma, es un juego. Eso sí, un juego que implica otros aspectos científicos, instrumentales, filosóficos, que juntos hacen de la actividad matemática uno de los verdaderos ejes de nuestra cultura.

4. Estudio de campo

4.1. Resultados de las entrevistas

En este apartado se sintetizan las aportaciones de las entrevistas realizadas a los expertos. Se divide en tres secciones: respecto el álgebra, respecto los juegos matemáticos y respecto las orientaciones didácticas. A su vez, dentro de cada sección se describen y organizan las respuestas alrededor de conceptos sobre los que se ha tratado anteriormente. Se escribe en cursiva el indicador que se trata. De todas formas, en el Anexo N° 2 se pueden leer las entrevistas transcritas. En el Cuadro N° 8 se muestra el guión seguido.

4.1.1. Resultados relacionados con el álgebra en el currículum de matemáticas de la ESO

En este apartado se describen los resultados de las 3 entrevistas en relación a la importancia que le dan al álgebra dentro de las matemáticas, a la dedicación temporal y a las dificultades y errores que el alumnado encuentra cuando se enfrenta a su estudio en la ESO.

Respecto a la *importancia* del álgebra los autores entrevistados consideran el álgebra muy importante. Deulofeu señala que "es uno de los momentos en los que se distingue la matemática elemental de la superior" y que consecuentemente "es muy importante enseñar álgebra en la ESO". Mallart, por su lado, señala que "es un paso necesario para la abstracción [...]. No podemos referirnos a conceptos abstractos con las otras ramas estudiadas".

Deulofeu hace hincapié en la importancia del cómo se hace esta introducción y como se gradúa a lo largo de la ESO ya que el álgebra trata de modelizar problemas, por lo que es importante "que se tengan los conocimientos suficientes de geometría o de aritmética".

Gairín añade un argumento a la importancia del álgebra que consiste en "conocer ramas de la matemática tan importantes y útiles como el análisis funcional o la geometría analítica". Además reflexiona "con la aritmética un ciudadano puede resolver buena parte de los problemas que se encuentra en su vida cotidiana; con el álgebra ese ciudadano estará en disposición de acceder a ramas de la matemática necesarias para resolver sus problemas profesionales".

Cuadro Nº 8. Guión y justificación de las entrevistas efectuadas a los expertos.

Entrevista a expertos		
Justificación	Indicadores	Preguntas
Concretar los contenidos y los aspectos del álgebra que ofrecen más dificultades a los alumnos para poder orientar y establecer una relación con los factores que provocan esas dificultades	Dificultades de E-A en Álgebra	1.1 ¿Nos puede explicar desde su punto de vista cuáles son las principales dificultades que se encuentran los alumnos de segundo ciclo de la ESO en los temas de Álgebra?
		1.2.¿Qué área del álgebra de la ESO opina que supone mayor dificultad para los alumnos?
Determinar los errores que más se repiten entre el alumnado en el ámbito del álgebra para ver que juegos pueden ser más adecuados.	Errores	2. ¿Cuáles son los errores más comunes de los alumnos en álgebra?
Determinar las razones por las que son importantes los juegos didácticos en álgebra.	Utilidad de los juegos en Álgebra	3. ¿Considera que pueden ser útiles los juegos para la enseñanza del Álgebra? En caso afirmativo, ¿nos puede indicar los motivos?
Detectar la función que realizan los juegos en la enseñanza de matemáticas.	Función didáctica (motivadora, integradora, socializadora)	4. ¿Qué función desarrollan los juegos en la enseñanza de las Matemáticas?
Determinar el tipo de juego más adecuado en álgebra	Tipología	5. ¿Qué tipo de juegos le parecen más adecuados?
Detectar la opinión de los expertos sobre la importancia del álgebra en la ESO	Importancia álgebra	6 ¿Qué importancia considera que tiene el álgebra en el área de matemáticas en la ESO?
Indicar qué recursos recomiendan para la enseñanza de las matemáticas	Recursos	7. ¿Qué recursos (juegos...) considera más adecuados para enseñar álgebra?
Conocer la importancia que el profesor da al álgebra cuanto al tiempo que se le dedica.	Tiempo	8. ¿Cree que en el segundo ciclo de la ESO se dedica el tiempo suficiente a impartir el bloque de álgebra?
Orientaciones didácticas para enseñar Álgebra	Orientaciones a la programación didáctica	9. ¿Qué orientaciones daría a un profesor de Matemáticas en la programación didáctica del Álgebra?
Orientaciones didácticas para enseñar a través de juegos	Orientaciones para la programación de juegos	10. ¿Qué orientaciones daría a un profesor de Matemáticas para utilizar juegos matemáticos?

Nota: Guión y justificación de las entrevistas efectuadas a los expertos

Fuente: +Elaboración propia.

En cuanto al *tiempo* que se dedica a la enseñanza del álgebra, señalan que no es tan importante el tiempo sino la metodología de la enseñanza. Así, sobre la suficiencia del tiempo dedicado a la enseñanza-aprendizaje del álgebra, Deulofeu se centra en la importancia de trabajar el álgebra en otros temas y materias más que en el tiempo que se dedica a esta área. Señala que "el álgebra debería ir apareciendo en todos los temas" y añade que "cuando se están haciendo áreas y volúmenes, si siempre se pide el resultado de las áreas y volúmenes a partir de los otros datos, no estoy haciendo álgebra, pero sí en cambio yo tengo un problema si como datos doy alguna de las longitudes y el área, se deberá despejar la variable, y por lo tanto, se estará haciendo álgebra".

Mallart considera que "se tendría que dedicar más tiempo a trabajar todos los temas" pero que el álgebra "es un escalón que no podemos saltar" y "es una piedra que se tiene que poner muy firme" que condiciona la correcta enseñanza en Bachillerato por lo que respeta a análisis de funciones.

Las *dificultades* en el aprendizaje del álgebra son reconocidas por los tres expertos, si bien cada uno matiza unas u otras. Deulofeu afirma que el principal problema respecto a la enseñanza del álgebra radica en que el álgebra es "un nuevo lenguaje [...] que es difícil de aprender fundamentalmente por un problema de semantización de este lenguaje, es decir, de dar significado al lenguaje, a la sintaxis de este lenguaje y al significado de los símbolos. Lo más complicado es dar significado a lo que los alumnos hacen cuando manipulan expresiones algebraicas" y añade que "les resulta difícil entender que la sintaxis del álgebra es de aquella manera por una cuestión de significado y les es difícil dar significado, les resulta difícil el lenguaje del álgebra, les es difícil dar significado a las letras como números".

El citado autor añade que los alumnos además de tener dificultades en esta área, tienen dificultades previas en la aritmética, en la geometría y de medida y esto hace que se reproduzcan los problemas que no han sido suficientemente consolidados.

El profesor Deulofeu concluye que "el álgebra es especialmente difícil porque es un lenguaje completamente nuevo; es un lenguaje muy general que utiliza letras para representar incógnitas o para representar, sobre todo, variables, y por lo tanto no sólo es necesario conocer muy bien este nuevo lenguaje sino que también es necesario conocer muy bien el lenguaje anterior porque los alumnos ya han utilizado los símbolos de las operaciones, el símbolo igual, y muchas veces lo que constatamos es que el conocimiento que tenían de estos símbolos no era suficiente y esto se refleja en el momento de trabajar en el álgebra".

Mallart argumenta que las dificultades concretas en la enseñanza de álgebra en segundo ciclo de la ESO, son aquellas que no se han podido resolver en 2º de ESO, que es cuando se empieza a trabajar el álgebra. Es por eso que "en 3º de ESO se suele empezar con un repaso del temario anterior y se profundiza un poco más".

Gairín, destaca que la mayor dificultad está en "la traslación al lenguaje algebraico de enunciados formulados en el lenguaje materno".

Otro tema sobre el que se recabó su opinión fue el de los *errores*. Deulofeu, afirma que los errores se derivan de las dificultades del lenguaje del álgebra, "por lo tanto son errores de sintaxis". El autor compara el aprendizaje del álgebra con el aprendizaje de una lengua extranjera completamente distinta.

Asimismo, señala dos tipos de errores fundamentales: "inicialmente los errores de tipo sintáctico" ("por la falta de semantización") y los errores "al traducir del lenguaje verbal al lenguaje matemático".

Mallart señala como principales errores los de "traducción del lenguaje" y, "los de operar con fracciones" (algebraicas).

Gairín, al igual que Mallart, coincide en la diferenciación entre los errores al pasar a lenguaje algebraico y en la manipulación de expresiones algebraicas. En los errores para el paso de lenguaje algebraico destaca: "identificar las letras como abreviaturas de sustantivos de objetos (en vez de como sustitutos de cantidades de dichos objetos)", identificación "del signo igual como un signo de correspondencia (en vez de como un signo de igualdad entre cantidades numéricas)" y "convertir cada oración del lenguaje verbal en una ecuación, cambiando las palabras claves por símbolos de forma secuencial de izquierda a derecha". En los errores de manipulación el alumno se "encuentra dificultades para controlar la veracidad o falsedad de sus actuaciones: usa entes abstractos sometidos a leyes formales y, por lo tanto, actúa de acuerdo a los dictados de su memoria y no tiene referentes en el mundo físico que le permitan dar sentido a las relaciones y operaciones algebraicas."

4.1.2. Resultados relacionados con los juegos matemáticos

En este apartado se describen los resultados de las entrevistas con respecto a la tipología y funciones de los juegos matemáticos.

Los juegos matemáticos se consideran recursos que utiliza el profesor para hacer más eficiente el aprendizaje. En este sentido se distinguen dos *tipologías de juegos*. Deulofeu, considera que hay dos tipos de juegos interesantes, los juegos de conocimiento, "que pueden ser interesantes para que los alumnos practiquen la

sintaxis del álgebra", y "aquellos problemas que dan un paso más y utilizan el álgebra para resolver problemas" (los cuáles considera más interesantes).

Por su parte, Mallart, considera se está investigando respecto al tipo de juegos más adecuados. Señala que los trabajos manipulativos "pueden ayudar bastante [...] pero en secundaria se olvida bastante". Como ejemplos de recursos lúdicos para la enseñanza del álgebra, el autor propone "un instrumento manipulativo como construir un puzle y que las fichas de éste sean la solución de una ecuación y en el otro lado una ecuación" y "un juego tipo Trivial donde la solución de la pregunta sea a través de la resolución de una ecuación".

Deulofeu discrimina entre los juegos de conocimiento y los de estrategia siendo menos útiles los primeros. "A mí los juegos de conocimiento, aun pareciéndome interesantes, me parecen menos interesantes que los juegos de estrategia. ¿Por qué? Porque los juegos de conocimiento se convierten en un recurso que nos permite practicar rutinas, pero su papel es limitado. En cambio, cuando los alumnos ya tienen cierto dominio de la materia, es en este momento cuando se ponen en marcha estrategias que son habilidades de carácter superior y que tienen relación con las habilidades necesarias para resolver problemas y con las competencias matemáticas".

Mallart aporta la clasificación de juegos matemáticos distinguiendo juegos *pre-instruccionales*, *co-instruccionales* y *post-instruccionales*, dependiendo de la instrucción que se imparta en clase. Se podrían clasificar en: juegos en que interviene la pura suerte, juegos mixtos que tengan algo de habilidad y algo de suerte, juegos de pura habilidad y juegos automáticos, pero también se podría incluir otra manera de pensar como son las diversiones aritméticas y algebraicas, también geométricas o topológicas, o problemas donde haya una influencia fuerte de la lógica".

Gairín afirma que los juegos de conocimiento sirven para que los alumnos "se adiestren en el uso de técnicas de cálculo y para que fortalezcan su memorización de hechos matemáticos" y los de estrategia "son adecuados para la resolución de problemas, para el uso de estrategias y de razonamientos matemáticos (inductivos, deductivos y recursivos)".

Los dos autores consultados, consideran los juegos didácticos como una herramienta adecuada para la enseñanza del álgebra.

Deuloufeu considera que para aprender "un nuevo lenguaje" es importante practicarlo y "darle significado". Para darle significado, considera varias maneras de hacerlo: una de ellas, es a través de los problemas contextuales, y otra a través de los juegos. Estos últimos tienen la ventaja de que son motivadores y los alumnos

tienen que utilizar el álgebra con sentido. El autor considera mucho más interesante resolver un juego que resolver una página de ejercicios.

Mallart, por su parte, considera que se pueden trabajar problemas de álgebra en un contexto extramatemático con la finalidad de motivar al alumno ya que normalmente se incide en el mismo enfoque y esto hace que se pierda la perspectiva y los alumnos pierdan interés.

Respecto la *función de los juegos* Deulofeu lo sitúa en el contexto: "los juegos se pueden desarrollar como un contexto más, hoy en día se habla de la importancia de las matemáticas en contexto. Esto sirve para el álgebra o cualquier otro concepto matemático, y esto sirve para muchos contextos; contextos del álgebra en general, de otras ciencias, etc. y uno de estos contextos, bajo mi punto de vista es el juego. Mallart señala que un punto de vista para tratar la función de los juegos es desde la motivación, [...] hemos hablado de cómo resolver problemas, no sólo a nivel operativo sino cómo resolver un problema mediante la conversión al lenguaje matemático del enunciado. Esta conversión se puede trabajar, por ejemplo, con enigmas, regresiones matemáticas y con juegos. De hecho son como juegos o puzzles. Y la manera de trabajar así es mucho más cómoda, atractiva y fácil, trabajando igualmente con las matemáticas. Ayudas a la abstracción, a una representación simbólica, con una adivinanza, se pueden trabajar muchas cosas; las estrategias de resolución que se utilizan en problemas de matemáticas también se trabajan en las recreaciones. Si planificas los objetivos que quieres conseguir, puedes llegar a compaginar una cosa u otra, y conseguir que el alumno aprenda mejor. O sea, no es sólo la motivación sino también las estrategias que desarrolla para resolver los problemas".

Gairín, por su lado, afirma que "los juegos permiten a los alumnos entender las claves de la matemática como disciplina científica, con unos métodos y unas herramientas que le son propias y diferenciadas. El significado que tienen las definiciones o los axiomas es más fácilmente comprensibles en términos de juego. El papel que juegan en matemáticas las reglas, las operaciones, son similares a las reglas de los juegos: puede cuestionarse su adecuación o su origen, pero hay que aplicarlas en la forma que indica el enunciado, hacer una jugada no es más que aplicar las reglas del juego a los elementos que lo caracterizan. En la construcción de las matemáticas los axiomas y definiciones constituyen los cimientos en los que se asienta la correcta aplicación de las reglas con las que conseguir nuevas formulaciones, del mismo modo que aparece una nueva situación del juego después de cada jugada. No todas las jugadas son igualmente adecuadas en la práctica del juego, del mismo modo que no todas las construcciones o deducciones

matemáticas son pertinentes. Es más, la puesta en práctica de estrategias, de planes de resolución, pone de manifiesto, como igualmente ocurre en las matemáticas, que los caminos para alcanzar el objetivo pueden ser tortuosos o inadecuados".

Gairín, considera que los juegos de estrategia son adecuados para iniciar a los alumnos en el lenguaje algebraico: "se inician con situaciones particulares y se persigue alcanzar resultados generales (que se habrán de expresar en lenguaje algebraico)". Cuando los alumnos ya están iniciados, propone juegos de conocimiento "(como barajas, bingos, dominós, etc.) para que los alumnos practiquen las relaciones y operaciones con expresiones algebraicas".

4.1.3. Resultados relacionados con las orientaciones didácticas

En este apartado se describen los resultados de las entrevistas con relación a las orientaciones para la didáctica del álgebra y de los juegos matemáticos.

Respecto a las *orientaciones para la programación didáctica del álgebra* Deulofeu señala que hay una primera orientación que me parece fundamental y es: en toda la parte de introducción al álgebra el profesor debe comprender que el alumno está aprendiendo un lenguaje nuevo y tiene que ayudarlo a dar significado y a hacer entender que representan aquellos símbolos y signos y dejar en un segundo nivel las reglas sintácticas. Si se acaba utilizando el álgebra de una forma automática, sabemos, por experiencia y por investigaciones, que los errores tenderán a repetirse en el tiempo. Y hay una segunda orientación y es que el profesor debería reflexionar para qué sirve el álgebra. El álgebra es un lenguaje que sirve para la resolución de problemas, para generalizar. Finalmente el álgebra es una herramienta potente y fundamental para la introducción del análisis y del cálculo.

Mallart enfatiza más los aspectos de la programación didáctica, en general, señalando que "primero tener claro los objetivos de etapa porque depende del nivel al que nos referimos. A partir de ellos, desarrollamos unos contenidos que nos permitan llegar a los objetivos y desarrollar una serie de actividades. Esas actividades pueden ser para introducir el tema, de refuerzo, para investigar, de evaluación individual o grupal (trabajo cooperativo). También se pueden proponer trabajos como elaborar un material manipulativo vinculado con el álgebra, es decir, que cada grupo diseñe lo que crea conveniente siguiendo siempre los objetivos marcados en la unidad didáctica".

Gairín recomienda tener como objetivo prioritario los aspectos conceptuales (distinguir entre funciones, ecuaciones y expresiones algebraicas;

traducir correctamente del lenguaje materno al lenguaje algebraico y viceversa). En relación a los aspectos procedimentales, considera que deben tratarse con referencias al mundo físico en el que el alumno pueda valorar si las manipulaciones realizadas son correctas o incorrectas.

En cuanto a las *orientaciones para la utilización de juegos* señalan ambos la potencia e interés que despiertan los juegos por lo que su utilización la recomiendan ambos. Ahora bien Deulofeu advierte sobre la importancia del contexto para las matemáticas “le diría a un profesor que tiene que reflexionar sobre el hecho de que los juegos matemáticos son un contexto potente para hacer matemáticas, para hacer matemáticas relevantes y para hacer matemáticas curriculares. Por lo tanto el uso de un juego de una manera aislada porque sobra una hora, es muy poco relevante. No digo que no esté bien, pero es muy poco relevante. Lo que le diría a un profesor cuando esté desarrollando un tema de matemáticas es que, con toda probabilidad, existirán juegos adecuados para ser utilizados como actividades de aprendizaje de matemáticas especialmente adaptadas a aquel tema. El uso que le dé lo decide el profesor: en un caso será la introducción a un tema, la consolidación de un determinado concepto; en otro caso será la introducción de un concepto, en otro será la resolución de un problema”.

Y Mallart enfatiza más los aspectos relacionados con la actitud ante el juego. “Tener muchas ganas de jugar y pasarlo bien. Luego, siempre se dice en clase “vamos a jugar”, el chip de la clase cambia y la motivación es máxima. Para que la motivación no baje, las normas relacionadas con el juego tienen que estar clarísimas. No puede ser que haya dudas. También es necesario que se facilite al alumno que consiga llegar a la estrategia ganadora. A veces es con la repetición del juego que empezará a valorar si deduce la estrategia o no.

Garín, por su lado, recomienda al profesor conocer, resolver y analizar juegos, tanto de estrategia como de conocimientos, "el profesor debe conocerlos en profundidad para que le resulten de utilidad en sus clases". También recomienda la utilización de un nuevo juego en una de sus clases y, posteriormente, valorar las potencialidades y limitaciones de dicha actividad.

Se puede concluir de las entrevistas a los 3 expertos que conceden mucha importancia al álgebra dentro de la enseñanza de las matemáticas y coinciden en señalar el mismo tipo de dificultades y los errores más frecuentes de los alumnos.

En relación a los juegos, los tres expertos señalan su función motivadora y facilitadora del aprendizaje.

Las orientaciones que señalan los entrevistados son, por un lado, relativos a la competencia en programar la docencia y relativas a la forma de incorporar los juegos en el aula y la actitud que deben mostrar los profesores.

5.Propuesta didáctica: El uso de los juegos en la unidad de álgebra de 3º de ESO

5.1.Introducción y justificación

El objetivo de este trabajo es presentar la propuesta didáctica de enseñanza del álgebra en el segundo ciclo de ESO que incluya juegos matemáticos como recurso didáctico. Se ha visto a través de la revisión de la literatura que, por un lado, el uso de los juegos facilita la motivación del alumno para aprender y, por otro, que el aprendizaje del álgebra presenta dificultades por lo que se elabora una propuesta para la enseñanza-aprendizaje del álgebra que contemple las dificultades y proporcione recursos para superarlas.

Por ello en este apartado se describen todos los elementos que componen dicha propuesta: objetivos, competencias, contenidos, actividades y evaluación.

Dicha propuesta surge del estudio de los juegos matemáticos, del Decreto de currículum de la Generalitat de Cataluña así como de la literatura consultada concerniente a la enseñanza-aprendizaje del álgebra y de los juegos.

Los grupos a los que va dirigida dicha propuesta son de 3º de la ESO, grupos de unos 20-30 alumnos, cuya composición es heterogénea (cultura autóctona e inmigrante, sexo, aptitudes, nivel socio-cultural, etc.).

En síntesis se presenta una propuesta didáctica cuyos objetivos son:

- ofrecer una planificación del álgebra para el segundo ciclo de ESO que tiene en cuenta las dificultades y errores que nos proporcionan los resultados de la investigación al respecto e
- incorporar recursos y actividades expresamente seleccionados para hacer frente a estas dificultades, en especial los juegos matemáticos.

Cuadro N° 9. Objetivos, competencias básicas y contenidos de 3° en álgebra.

Objetivos	Competencias	Contenidos
Distinguir entre expresiones numéricas y algebraicas. Hacer operaciones algebraicas. Calcular el valor numérico de expresiones algebraicas. Expresar en lenguaje algebraico enunciados verbales. Resolver ecuaciones de segundo grado completas e incompletas. Representar algebraicamente la solución de una ecuación de segundo grado. Resolver problemas utilizando sistemas de ecuaciones. Resolver sistemas de ecuaciones utilizando los métodos algebraicos. Indicar el número de soluciones de un sistema de ecuaciones. Resolver sistemas de ecuaciones de más de dos incógnitas.	Competencia en comunicación lingüística. Competencia matemática. Competencia para aprender a aprender. Autonomía e iniciativa personal. Competencia en el Tratamiento de la información y competencia digital.	Análisis de funciones de una variable: dominio de definición, crecimiento/decrecimiento y puntos de corte con los ejes, incluyendo las funciones lineales y de proporcionalidad inversa. Construcción de una gráfica de una expresión simbólica, a partir de una gráfica más simple. Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos Relación entre expresiones simbólicas y gráficas lineales, poniendo especial atención en el significado de la ordenada en el origen y la pendiente. Resolución de ecuaciones de 1° y 2° grado y sistemas de ecuaciones lineales con fluidez. Interpretación gráfica.

Nota: Objetivos, competencias básicas y contenido de 3° en álgebra. Fuente: Elaboración propia.

5.2. Metodología

La metodología que se emplea en estas clases es mixta. Se combina la metodología tradicional de explicación de conocimientos con la metodología activa, de descubrimiento. Se alternan las sesiones participativas, sesiones de explicación del profesor, ejercicios y problemas así como actividades lúdicas a través de los juegos propuestos de diferente naturaleza. Por un lado se proporcionan juegos cuyo objetivo es inferir la ley general y, por otro, juegos de aplicación de los conceptos explicados o incluso juegos que permiten un diverso nivel de dificultad o de ritmo de aprendizaje.

Esta metodología pretende combinar el rol activo del discente de manera que se requiere de un nivel de implicación alto del alumno, por ejemplo, cuando participa en los juegos en los que debe interactuar con otros compañeros para ganar la partida, etc. Por otro lado ello requiere un rol del profesor acorde, es decir

el profesor no puede pretender que estén totalmente callados y atentos si la actividad requiere conversación de los alumnos. Por otro lado cuando el profesor explica un tema la actitud del discente debe ser de atención y silencio; es decir la interrelación entre profesor, alumno y entre alumnos debe adaptarse al tipo de actividad.

Se contempla el uso de material didáctico multimedia puesto que algunos juegos requieren el uso de Internet y, en algunas ocasiones la demostración mediante el uso de pizarra digital. En general se tiene la convicción de que los medios y recursos deben estar al servicio de la actividad, no el uso por el uso.

La estructura de cada tema de la unidad didáctica constará de tres tipos de actividades: explicación por parte del profesor, realización de actividades estándar y realización de juegos. Esta secuencia no es igual en todas las sesiones, en unas puede que se empiece por el juego si este tiene un carácter motivador o pretende iniciar con una secuencia de casos (como el cuadrado mágico) de más concreto a más genérico (tienen que substituir el número por una expresión algebraica). En otras puede empezarse con una explicación por parte del profesor y en otras por corregir los ejercicios que se han hecho en casa.

5.3.Actividades

Se programan actividades de diferente tipo a fin de que los alumnos consigan superar las típicas dificultades que encuentran los alumnos en el aprendizaje del álgebra. Dichas actividades pueden ser: ejercicios, problemas y juegos.

En este trabajo se enfatiza la bondad de los juegos por lo que se ofrece en el Anexo N° 1 una batería de ellos convenientemente seleccionados y analizados. Además contienen pautas de utilización, curso o contenido en el cuál puede utilizarse y observaciones. Se presentan juegos pueden servir para trabajar contenidos o para trabajar la estrategia; juegos para motivar ante un concepto nuevo o para afianzar un concepto ya aprendido, etc.

Se procura elaborar actividades con diferente nivel de dificultad a fin de tratar la diversidad de ritmos de aprendizaje o de otros aspectos que lo requieran.

5.4.Evaluación

Para la evaluación de cada unidad didáctica se tiene en cuenta que no hay que contradecir el criterio general que establece el Decreto de la comunidad así como los principios que establece el proyecto educativo de centro.

En este sentido, la manera de evaluar dicha unidad didáctica se corresponde con los criterios señalados en el cuadro siguiente. Se tiene en cuenta,

por un lado el trabajo individual y en equipo por considerar que es importante la adquisición de competencias de trabajo en ambos sentidos así como la capacidad de jugar utilizando estrategias diversas en función de la tipología de juego y normas de éste.

Cuadro N°10. Criterios de evaluación.

Tipo de tarea		Porcentaje	Criterios
Ejercicios y problemas estándar	Individuales	10%	Resultado de las tareas individuales y en equipo
	En equipo	10%	
Actividades con juegos	Individuales	10%	Resultado del aprendizaje mediante juegos individuales y en equipo
	En equipo	10%	
Prueba final		60%	Resultado de la prueba final de la unidad
Total		100%	

Nota: Criterios de evaluación. Fuente: Elaboración propia.

En este trabajo desarrollaremos una unidad didáctica de 3º perteneciente al bloque de contenidos de álgebra que es la resolución de sistemas de ecuaciones. Consideramos que la duración de esta unidad es de 6 sesiones de 45 minutos. Se programa cada sesión incluyendo actividades de refuerzo y de ampliación que permitan un tratamiento de la diversidad.

5.5.Unidad temática que se desarrolla de 3º de ESO: Sistemas de ecuaciones

A continuación se desarrolla la unidad didáctica “resolución de sistemas de ecuaciones” sesión por sesión.

5.5.1. Contenidos, objetivos y competencias

El siguiente cuadro incluye de forma detallada los diversos tópicos que se enseñan en esta unidad así como los objetivos específicos que se pretenden y como contribuye esta unidad a conseguir las competencias básicas.

Cuadro N° 11. Objetivos, competencias y contenidos de "Sistema de ecuaciones".

Contenidos de la unidad didáctica	Objetivos	Competencias
Resolución de sistemas de ecuaciones. Métodos de sustitución, igualación y reducción para resolver sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas.	Resolver sistemas de ecuaciones con métodos algebraicos Resolver sistemas de ecuaciones con más de dos incógnitas.	Competencia matemática. Competencia para aprender a aprender. Autonomía e iniciativa personal.
Clasificación de sistemas de ecuaciones	-Indicar el número de soluciones de un sistema de ecuaciones	Competencia matemática.
Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones	Resolver sistemas de ecuaciones utilizando métodos gráficos.	Competencia en el Tratamiento de la información y competencia digital. Competencia matemática.
Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones	Resolver problemas utilizando sistemas de ecuaciones	Competencia en comunicación lingüística. Competencia matemática.

Nota: Objetivos, competencias y contenidos de "Sistema de ecuaciones". Fuente: Elaboración propia.

5.5.2. Programación detallada de las sesiones

Se ha estimado que el tiempo necesario y que se puede dedicar a la enseñanza de los sistemas de ecuaciones es de 6 sesiones de 45 min. A continuación se distribuye entre estas 6 sesiones los diversos contenidos de sistemas de ecuaciones que se deben trabajar y las actividades que se van a llevar a cabo de forma pormenorizada en cada sesión. En el apartado siguiente se describe de forma más desarrollada dos de los juegos que se han seleccionado para estas sesiones.

Cuadro N° 12. Programación detallada de las sesiones de "Sistemas de ecuaciones".

Sesión	Contenidos	Actividades
1	Introducción a la resolución de sistemas de ecuaciones	Se inicia la unidad Didáctica con el enigma "Juan y Pedro" (anexo 4) cuya resolución se puede realizar aritmética o algebraicamente. (15 minutos). Presentación del Juego "Algebra Puzzle" (ver figura 1) como actividad de iniciación y motivación. La finalidad es la de dar significado y que se perciba el ahorro de tiempo que suponen los sistema de ecuaciones.(15 minutos) Se acaba la sesión con una puesta en común para reflexionar sobre el propio juego y hacer hipótesis de resolución. (15 minutos)
2	Método de	Al principio se realiza una breve explicación magistral

	sustitución	explicando el método de sustitución. (20 minutos) y se introducen las normas del juego “Cuadrado mágico de dos incógnitas con números enteros”. A continuación, se entregan individualmente, 5 cuadrados mágicos para resolver ordenados según el nivel de dificultad (el último cuadrado mágico puede ser de 3 incógnitas). Es obligatorio resolver el sistema mediante el método de sustitución.
3	Método de igualación	Al principio se realiza una breve explicación magistral explicando el método de igualación (20 minutos) y se introducen las normas del juego “Cuadrado mágico de dos incógnitas con números enteros”. A continuación, se entrega a grupos de tres personas 5 cuadrados mágicos para resolver ordenados según el nivel de dificultad (el último cuadrado mágico puede ser de 3 incógnitas). Es obligatorio resolver el sistema mediante el método de igualación.
4	Método de reducción	Al principio se realiza una breve explicación magistral explicando el método de reducción. (20 minutos) y se introducen las normas del juego “Cuadrado mágico de dos incógnitas con números enteros”. A continuación, se entrega a grupos de tres personas 5 cuadrados mágicos para resolver ordenados según el nivel de dificultad (el último cuadrado mágico puede ser de 3 incógnitas). Es obligatorio resolver el sistema mediante el método de reducción.
5	Resolución gráfica y discusión de sistemas de ecuaciones	Explicación de la clasificación de los tipos de sistemas: compatible determinado/indeterminado e incompatible y resolución gráfica de sistemas de ecuaciones mediante software (35 minutos). Resolución de manera participativa del juego "Juan y Pedro" (anexo 4) mediante un sistema de ecuaciones. (10 minutos). La finalidad es que se vea que los sistemas de ecuaciones son un método más rápido que el ensayo aritmético.
6	Evaluación	Realización de un examen individual en el que los alumnos resuelvan ejercicios variados de todos los contenidos.

Nota: Programación detallada de las sesiones de "Sistemas de ecuaciones".

Fuente: Elaboración propia.

5.5.3. Juegos incluidos en la unidad didáctica de Sistemas de ecuaciones

Juego 1-"Algebra Puzzle"

Este juego on-line consiste en la resolución de un sistema de ecuaciones de tres incógnitas mediante ensayo-error, en una presentación atractiva, como se puede ver en la figura 1. La finalidad del juego es que el alumno entienda el significado de los sistemas de ecuaciones, pero que sin embargo, perciba que tiene herramientas que le hacen muy ardua o larga la resolución.

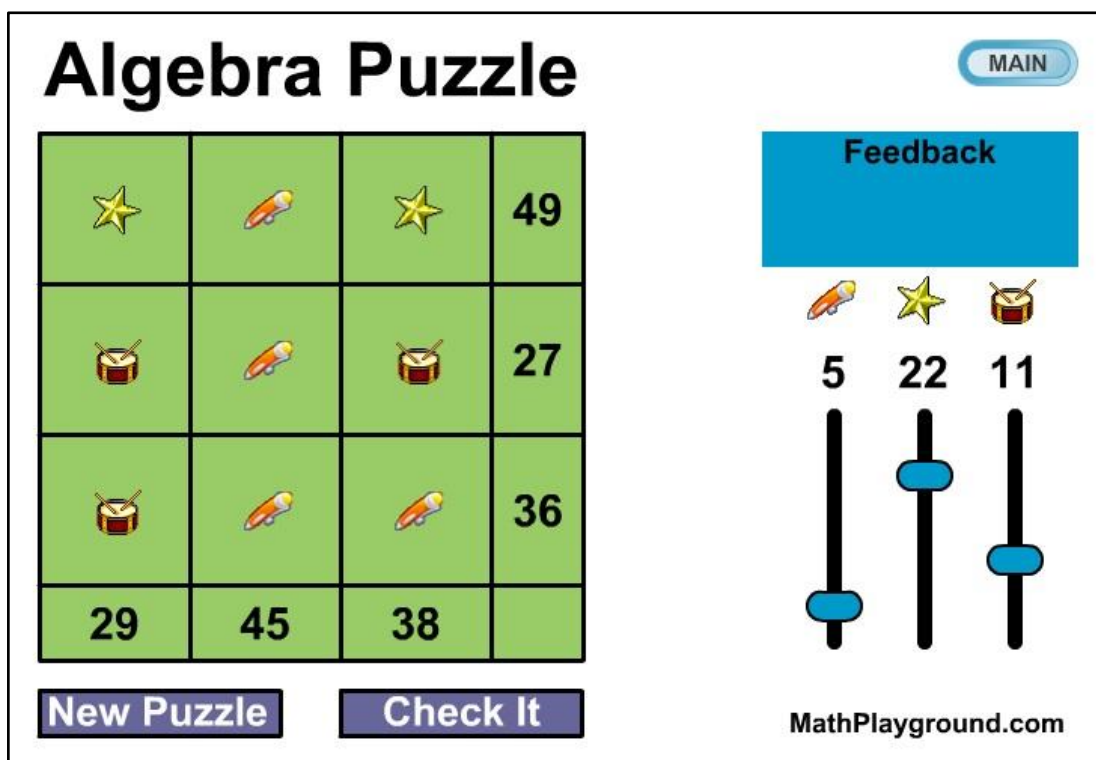


Figura N° 1. Juego "Algebra Puzzle". Fuente: MathPlayground (2014).

Juego 2-"Cuadrado mágico de sistemas de ecuaciones"

Este juego se puede aplicar en 3° de ESO. Contribuye a conseguir el objetivo "resolver sistemas de ecuaciones utilizando métodos algebraicos". Tal como está formulado el juego contribuye a adquirir las competencias 1, 2 y 3 del cuadro 4. Se estima que la actividad mediante este juego dura 25'. Se pueden formar grupos de tres estudiantes (o hacerlo individualmente) con la finalidad de que puedan interactuar entre ellos (con la finalidad de trabajar la competencia de autonomía). El aula debería facilitar el agrupamiento mediante sillas móviles.

1-Se entrega a los alumnos un ejemplo de cuadrado mágico y se anuncian sus propiedades.

2-Seguidamente tienen varios cuadrados mágicos con diferentes incógnitas aumentando el nivel de dificultad.

3- Para los grupos más avanzadas, tendrán finalmente cuadrados mágicos algebraicos multiplicativos.

4	a	2
b	5	7
8	1	6

a	b	c+4
c+1	b+4	27
b+3	c+7	c

Figura N° 2. Cuadrados mágicos. Fuente: Salcedo (2011)

Observación: es importante que el nivel de los cuadrados mágicos vaya aumentando paulatinamente. Debe haber ejercicios suficientes para no agotar el tiempo de la actividad.

La evaluación de la actividad correspondiente a este juego se distribuye de la siguiente forma: el 10% de la resolución de cuadrados mágicos que se proporcionan individualmente y el 10% restante a otros (más complejos) que se dan al grupo. La distribución de los cuadrados a los diversos grupos se hace atendiendo a la dificultad que presenta.

6. Aportaciones del trabajo

Se considera que este trabajo aporta lo siguiente:

- a) La opinión directa de personas expertas con una trayectoria investigadora destacada y además con experiencia en la enseñanza de las matemáticas y el uso de juegos didácticos. En este sentido, se ha podido constatar a través de sus opiniones sobre las dificultades y errores más comunes en el álgebra lo que la literatura proporciona.
- b) Un modelo de análisis de los juegos matemáticos elaborado a partir de los criterios y recomendaciones de la literatura y de las entrevistas realizadas. Este modelo, no solo es útil para estos juegos, sino que permite ser aplicado a cualquier otra actividad matemática.
- c) Una propuesta didáctica de la unidad didáctica: "Sistemas de ecuaciones" perteneciente al bloque de contenidos del álgebra en la que se especifica la metodología, paso a paso, que se sigue: tipo de juegos y actividades que se van a impartir, el rol del profesor y alumnos, la función que desempeña la actividad (motivadora, de desarrollo, etc.), así como el tiempo y condiciones espaciales que se requieren.
- d) Una propuesta de juegos de álgebra analizados desde una perspectiva didáctica, dentro del curso en el que se pueden utilizar, especificando los objetivos de aprendizaje a los que contribuye y condiciones didácticas recomendables.

En síntesis, los juegos matemáticos son una herramienta importante en la enseñanza-aprendizaje ya que facilitan la motivación del alumnado y ayudan a dar significado a la materia sobre la cual versan.

7. Discusión

Al final del trabajo de Máster sobre el uso de juegos en la enseñanza del álgebra en segundo ciclo de ESO y una vez realizado el estudio teórico, el estudio de campo y la propuesta didáctica se está en condiciones de comparar, contrastar y establecer una opinión sustentada al respecto de los tópicos del trabajo.

La discusión entre la importancia que se le da al álgebra en las indicaciones del Real Decreto y los expertos consultados se puede concluir que es muy pareja. Sin embargo alguna de las investigaciones más recientes realizadas por Socas (2011) indican un cambio metodológico y didáctico en la enseñanza del álgebra en el que se señala que el enfoque del álgebra debe tender hacia la enseñanza de un nuevo lenguaje más que como método para resolver el valor de las incógnitas, hecho que acaba siendo lo más importante en la práctica. Este enfoque no acaba de vislumbrarse en el propio desarrollo de los objetivos, competencias y contenidos que marca el Decreto 143/2007 de la Generalitat de Cataluña, por lo que convendría que hubiera mayor conexión entre el articulado de la ley y los avances científicos en la enseñanza de las matemáticas.

Respecto al beneficio del uso de los juegos matemáticos no se puede rebatir ni confirmar la bondad de su uso tal como afirman Gardner (1988), Gairín (2001), Corbalán (1994) y Mallart (2008) puesto que la propuesta didáctica realizada no se ha llevado a cabo en la práctica. Además, dicha propuesta didáctica basada en unos juegos concretos no nos permite deducir, en caso que consiguieran los objetivos propuestos, que se debe a ellos así como tampoco se puede deducir su perversidad puesto que depende de muchos otros factores contextuales que lo pueden hacer bueno o menos bueno.

De las entrevistas realizadas con los expertos se ha observado la importancia que le da Mallart al manejo y control del grupo clase lo que determina el éxito pedagógico del juego propuesto. Al respecto se deduce que la calidad del juego tiene importancia pero también la puesta en escena de éste. El que un juego contribuya a mejorar el aprendizaje depende de varios factores: la adecuación de este juego a los objetivos planteados, que las condiciones que requiere el juego (señaladas en las fichas de análisis de juego del Anexo Nº 2) se cumplan así como otros factores contextuales que no se pueden predecir.

8. Conclusiones

Las conclusiones de este trabajo las vamos a organizar en función de los objetivos planteados, es decir:

En cuanto al objetivo *revisar y exponer las principales aportaciones existentes en la literatura sobre juegos de álgebra para la segunda etapa de ESO* se ha constatado que existe coincidencia entre lo que nos señala la literatura revisada al respecto, lo que nos han manifestado las personas expertas en didáctica de las matemáticas y juegos y el análisis que hemos realizado de los juegos de álgebra. Estas coincidencias residen en el hecho de que los juegos favorecen:

1. La motivación de los adolescentes hacia las matemáticas y
2. Un aprendizaje más significativo.

También se ha observado un consenso en clasificar dos tipos de juegos: los meramente algorítmicos (algunos autores los denominan matemática recreativa) que son una modalidad de ejercicio algebraico y los juegos de estrategia en que se ejercitan las competencias propias de la resolución de problemas, donde la componente recreativa es mayor. Por tanto, se ha revisado y expuesto las principales aportaciones, y se han visto las principales ventajas en el proceso de enseñanza-aprendizaje con la utilización de los juegos matemáticos.

En cuanto al objetivo *estudiar las principales características y aplicaciones educativas de los juegos matemáticos en el segundo ciclo de ESO* se ha concluido que los juegos matemáticos promueven una función motivadora, socializadora e integradora puesto que, tal como se recoge de la opinión de los expertos y del análisis de los juegos seleccionados, algunos juegos requieren la colaboración entre alumnos diversos, otros sirven para motivar el interés por conocer el método matemático de resolución de ecuaciones, etc.

Sobre el objetivo *Recopilar, clasificar y realizar una propuesta didáctica de juegos de álgebra para el segundo ciclo de ESO* se considera que se ha logrado y queda avalado por la propuesta didáctica que se presenta de ocho juegos. La versatilidad de éstos es bastante alta permitiendo adaptarlos tanto a diversos grados de dificultad como de competencias. Los juegos permiten trabajar más competencias básicas que las propiamente matemáticas, por lo que les permiten ser interdisciplinarios. Los juegos seleccionados surgen de una colección mucho más amplia y han sido seleccionados para que cumplan las condiciones necesarias de acuerdo a los objetivos de aprendizaje a los que debe dar respuesta.

Finalmente y como consecuencia del cumplimiento de los objetivos específicos, se ha logrado el objetivo principal: *Elaborar una propuesta de enseñanza de álgebra en el segundo ciclo de ESO que incluya a los juegos*

matemáticos como recurso didáctico desarrollado, en el capítulo 5, a través de la programación de la unidad didáctica "sistemas de ecuaciones" en cuyo despliegue se desarrollan dos juegos matemáticos. Esta propuesta tiene en cuenta la legislación educativa de la cuál parte, lo manifestado por los expertos y profesores de matemáticas en la ESO y la literatura al respecto. Se han programado seis sesiones que integran el uso de juegos cuyas finalidades están de acuerdo a los objetivos establecidos para la unidad didáctica de "sistemas de ecuaciones" y las orientaciones que han señalado los expertos respecto a las condiciones que se deben contemplar a la hora de plantear un juego al grupo-clase: momento, tiempo que se requiere, espacio y mobiliario, etc.

En síntesis, se considera que la realización de este trabajo ha permitido ha permitido aprender a elaborar una propuesta educativa fundamentada en información fidedigna y argumentada en base a los discentes a los que se debe aplicar.

9.Limitaciones del estudio

A lo largo de la realización del estudio han aparecido distintas limitaciones, cada una de ellas procedentes de razones de orden diferente, que se han tenido que asumir.

En primer lugar, la limitación técnica que ha conllevado la necesaria acotación del estudio de campo. En este sentido, la posibilidad de llevar a la práctica las sesiones de álgebra como la realización de los juegos, que no se ha podido efectuar, aportaría a la investigación un enriquecimiento de datos. Probablemente, hacer unas observaciones en clases de matemáticas hubiera completado la adecuación de los juegos propuestos. Es decir, aunque las cuestiones técnicas teóricas relativas a las propuestas didácticas son absolutamente necesarias, la puesta en práctica de dichas propuestas nos daría mucho mayor *feedback* sobre la validez de éstas.

En segundo lugar, otro factor importante es la limitación temporal, puesto que la calidad del trabajo no sólo viene determinada por el número de horas dedicadas sino también por la distribución temporal de las mismas. El conocimiento requiere de una sedimentación ya que la información debe ser contrastada y depurada, ordenada y estructurada estableciendo nuevas relaciones significativas.

En tercer lugar, las propias auto-limitaciones de formación investigadora y didáctica. Si bien se han adquirido conocimientos en las asignaturas cursadas en este máster, éstos se van a sedimentar con el tiempo de práctica como profesor. Lo mismo sucede en el caso de la experiencia investigadora. Se tienen las nociones teóricas sobre metodología pero no experiencia en la práctica investigadora lo que hace que no siempre se hayan elegido los mejores procedimientos para la realización del proyecto.

Finalmente, cabe mencionar las limitaciones auto-impuestas derivadas de las limitaciones temporales y de recursos mencionadas anteriormente, que son: enmarcar el presente trabajo en un solo ciclo de enseñanza, en un solo bloque de contenidos (álgebra) y hacer una propuesta didáctica de una sola unidad didáctica (Sistemas de ecuaciones).

10. Líneas de investigación futuras

A continuación se mencionarán y explicarán las líneas de investigación ordenadas de más asequibles e inmediatas, a más ambiciosas y costosas en recursos de todo tipo.

La línea más inmediata y concreta a seguir, es la de poner en práctica la propuesta diseñada y evaluarla. Ello significa verificar el grado de adecuación de la propuesta en términos de tiempo previsto y real, dificultad de las actividades y juegos, grado de aprendizaje conseguido, validez de la evaluación planteada, etc. Con todo ello, la propuesta se modificaría en todo aquello que se hubiera valorado como poco adecuado considerando que el objetivo principal de cualquier propuesta es la de mejorar la enseñanza-aprendizaje y su eficiencia.

Por otro lado, cabe también considerar el estudio de los juegos matemáticos en otros cursos o con otros contenidos, ya que el marco teórico y los beneficios de los juegos matemáticos pueden amoldarse a cualquier de los contenidos del currículum de matemáticas y a cualquiera de los cursos de la educación secundaria.

Otra línea de estudio, aunque un poco más amplia y quizás menos asequible, sería llevar a cabo esta experiencia didáctica de forma interdisciplinar puesto que como se ha observado muchos de los juegos propuestos promueven otras competencias más allá de la matemática. Por ejemplo, el trabajo en equipo, las competencias comunicativas, la competencia creativa, etc.

Otra investigación interesante que se nos ocurre está relacionada con el rol del profesor en los juegos matemáticos: ¿pueden suplir la clase magistral? ¿Son complementarios a ella? ¿Son similares a cualquier ejercicio o actividad de la programación? ¿Los impone o los sugiere? ¿Está reñido el carácter lúdico de los juegos con una estricta programación de contenidos curriculares? Estas preguntas, un tanto retóricas son, sin embargo, el inicio de posibles futuros estudios con el fin de profundizar sobre el papel de los juegos en matemáticas.

Finalmente, una propuesta más compleja y ambiciosa del campo de estudio que se ha iniciado y que puede tener mucho mayor recorrido y frutos está relacionada con la experimentación en las correspondientes aulas. Así, la experimentación, observación, evaluación y ampliación del abanico de juegos sería una continuación natural del presente trabajo y, por lo tanto, una posible investigación futura. En este sentido, interesaría hacer una observación sistemática del alumnado en el proceso de enseñanza-aprendizaje con la utilización de estos juegos matemáticos poniendo el foco en la evaluación de cualquiera de los beneficios atribuidos a los juegos matemáticos (motivación, concepción de las matemáticas, significatividad del aprendizaje, etc.).

11. Bibliografía

11.1. Referencias

- Bishop, A. (1998). El papel de los juegos en educación matemática. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 18, 9- 19.
- Booth, L.R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A.F. Coxford & A.P. Schulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearbook* (pp.44-58) Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Burgués, C. y Sarramona, J. (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*. Barcelona: Generalitat de Catalunya.
- Bright, G. W., Harvey, J. G., & Wheeler, M. M. (1985). Learning and mathematics games. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1, 1-189.
- Cockcroft, W.H (1985). *Las Matemáticas sí cuentan*. Madrid: Servicio de Publicaciones del MEC.
- Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis.
- Corbalán, F. & Deulofeu, J. (1996). Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 3(7), 71-80.
- Crespo, M. P. (1998). Bibliografía de matemática recreativa. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 18, 73-94.
- Chambadal, L. (1981). *Dictionaire de mathématiques*. París: Ed. Hachette.
- Chorques, M. (2013). *Metodología para enseñar álgebra a alumnos de 1º de la ESO basada en el aprendizaje cooperativo*. Trabajo Fin de Máster para obtener el grado de Máster Universitario en Formación del Profesorado de educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato por la Universidad Internacional de la Rioja (UNIR). Recuperado de <http://reunir.unir.net/handle/123456789/1952>

- De Guzmán, M. (2007). Y la Matemática. *Revista iberoamericana de educación*, 43, 19-58.
- De Guzmán Ozámiz, M. (2001). Tendencias actuales de la educación matemática. *Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria*, 19, 5-25.
- Decreto 143/2007 de 26 de junio de 2007, *ordenación de las enseñanzas de la educación secundaria obligatoria*. Diari Oficial de la Generalitat, 4915, de 29 de junio de 2007.
- Decroly, O. y Monchamp, E. (1983). *El juego educativo*. Barcelona: Ed. Morata.
- Deulofeu, J. (1999). Recreaciones, juegos y actividades matemáticas. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas*, 20, 89-101.
- Gardner, M. (1988). *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*. Barcelona: Labor.
- Gairín, J.M. (2001). Hacer Matemáticas: el juego como recurso. *Aspectos didácticos de Matemáticas 8, Educación Abierta*, 153, 55-116.
- Gairín, J. M. (2002). Aprender a demostrar: los juegos de estrategia. *Actas de las X Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, 1, 171-188.
- Gairín, J.M. (1990). Efectos de la utilización de los juegos educativos en la enseñanza de las Matemáticas. *Educación*, 17, 105-118.
- Godino, J. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada. Consultado el 13 de agosto de 2012. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf
- Huizinga, J. (1995). *Homo ludens*. Madrid: Alianza Editorial.
- Huizanga, J. (1968). *Homo ludens*. Buenos Aires-Barcelona: Emecé Editores.

- Kilpatric, J. (1990). Lo que el constructivismo puede ser para la educación de las matemáticas. *Educación*, 17, 37-52.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.
- Ley orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, *para la mejora de la calidad educativa* (2013, diciembre, 10). Boletín Oficial del Estado, 295,97858-97921 [En línea]. Consultado [28, abril, 2014]. Disponible en: https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2013-12886
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (2006, mayo, 4). Boletín Oficial del Estado, 106, 17158-17207. [En línea]. Consultado: [28, abril, 2014]. Disponible en: <http://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2006-7899>
- Mallart, A. (2008). *Estratègies de millora per a la resolució de problemes amb alumnes de segon d'ESO: ús de la matemàtica recreativa a les fases d'abordatge i de revisió* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.
- Martín, J., Muñoz, J.M., y Oller, A.M. (2009). Empleo didáctico de juegos que se matematizan mediante grafos. Una experiencia. *Contextos educativos*, 12, 137-164.
- Mathgames (2014). *Algebra Puzzle*. Consultado el 05 de mayo de 2014. Recuperado de: http://www.mathplayground.com/algebra_puzzle.html
- McGregor, M. y Stacy, K. (1997). Students understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1-19.
- Morales, J. M., Escolano, J. M. M., & Marcén, A. M. O. (2009). Empleo didáctico de juegos que se materializan mediante grafos: una experiencia. *Contextos educativos: Revista de educación*, 12, 137-164.
- Mullis, V. S., Martin, Michael O., Foy, Pierre y Arora, Alka (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Disponible

en:

http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_FullBook.pdf

OCDE (2013). *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do -Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I)*. PISA, OECD Publishing. Disponible en: <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-volume-I.pdf>

Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 40, 3-28.

Radatz, H. (1980). Students' Errors in the Mathematics Learning process: A survey. *For the Learning of Mathematics*, 1, 1-20.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, P.; Gómez, P. y Rico, M. (Eds.), *Educación Matemática* (pp.69-96). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Salcedo, S. (2011). *Solución de sistemas de ecuaciones, cuadrados mágicos*. Consultado el 05 de mayo de 2014. Recuperado de <http://sofiasalcedom.blogspot.com.es/2011/10/solucion-de-sistemas-de-ecuaciones.html>

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.

Socas, M. (2011). La enseñanza del algebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 5-34.

Tall, D. (1994). Computer environments for the learning of mathematics. En R. Biehler et al. (Ed.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp.189-199). Dordrecht: Kluwer.

Tomàs, M. (1997). El joc. En Gairín, J y Pérez, A. (Coordinadores) *Temari General. Oposicions al cos de mestres*. (pp.240-253) Barcelona: Ed. Estel.

Vázquez, J. L. (2004). Matemáticas, ciencia y tecnología: una relación profunda y duradera. En Rodríguez, R y Zuazua, E (coordinadores), *De la aritmética al análisis: historia y desarrollos recientes en matemáticas* (pp.183-244). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Vygotsky, L. S. (1973). Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. En Luria, Leontiev, Vygotsky y otros. *Psicología y Pedagogía*. Madrid: Akal.

Yuste, F. C. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis.

11.2. Bibliografía complementaria

Anzola, M y Vizmanos, J.M. (1996). *Matemàtiques*. Barcelona: Editorial Cruïlla.
Busquets, O; Castañer C. y Vicens, F. (1995). *Matemàtiques*. Barcelona: Editorial Barcanova.

Grande, M. (2013). *Matemàtiques 2*. Barcelona: Castellnou Edicions.

Rodríguez-Domingo, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólicos por estudiantes de secundaria* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada, Granada.

Tamayo, C. (2008). *El juego: un pretexto para el aprendizaje de las matemáticas*. Valledupar, Colombia: Asocoime.

12. Anexos

12.1. Anexo 1. Juegos seleccionados y analizados para la enseñanza del álgebra

A continuación, se describen 7 juegos para la enseñanza-aprendizaje del álgebra conforme a la ficha elaborada (Anexo N° 2).

1. Juego 1-Adivina el pensamiento

Este juego se puede aplicar en 3º de ESO. Contribuye a conseguir los objetivos "expresar en lenguaje algebraico enunciados verbales" y "resolver problemas mediante ecuaciones de primer grado" y trata los contenidos de: lenguaje algebraico y su cálculo de expresiones. Tal como está formulado el juego contribuye a adquirir las competencias 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10 y 11 del cuadro 4. Se estima que la actividad mediante este juego puede durar 45'. La organización del juego debe hacerse oralmente, mediante una dramatización que mantenga el interés del alumno y facilitando la participación y el debate. El aula deberá disponer de una pizarra para que los alumnos escriban sus propuestas.

La actividad tiene como objetivo asimilar la utilidad del uso del álgebra como generalización de la aritmética. Consiste en utilizar expresiones algebraicas para comprender el funcionamiento del problema aparentemente mágico. Si los alumnos utilizan el álgebra, las incógnitas se cancelan, pudiendo así determinar a priori el resultado del problema. Se pueden plantear infinitos ejemplos como punto de partida, pero mostraremos el siguiente. Es importante dramatizar la actuación como si se tuviera poderes de lectura de mente. Se pide a los alumnos que realicen las siguientes operaciones:

1) Piensa un número cualquiera, 2) Multiplícalo por 2, 3) Al resultado súmale 9, 4) Al resultado súmale el número que pensaste, 5) Al resultado divídelo por 3, 6) A lo que quedó súmale 4, y 7) Al resultado, réstale el número que pensaste.

El resultado de aplicar éstas operaciones es siempre 7 independientemente del número elegido.

A continuación, se dirige un debate, sobre el motivo por el cual pasa esto y se insta a los alumnos a utilizar alguna herramienta matemática para justificar el juego.

Finalmente, cuando se entienda que el álgebra nos facilita el juego mediante la cancelación de incógnitas, se pedirá que individualmente creen un juego parecido para contarlo a personas de su entorno.

2. Juego 2-Tarjetas factorizadoras

Este juego se puede aplicar en 4º de ESO. Contribuye a conseguir el objetivo "factorizar expresiones algebraicas" y trata los contenidos de: operaciones con polinomios. Tal como está formulado el juego contribuye a adquirir las competencias 4, 5, 10 y 11 del cuadro 4. Se estima que la actividad mediante este juego puede durar 20'. La organización del juego debe hacerse en parejas, mediante un material manipulativo. El aula deberá disponer de suficiente espacio para la movilidad de los todos los alumnos a la vez.

Anverso	Reverso	Anverso	Reverso
El M.C.D. de $(x + 1)$ y $x^2 - 1$	$2(x - 1)^2$	El producto $(x - 3)^2$	$(x + 1)$
$2x^2 - 50x$ factorizado	$x^2 + 9 - 6x$	$x^2 - 36$ factorizado	$2x(x - 25)$
El M.C.D. de $(x + 2)$ y $(x + 2)^3$	$(x - 6)(x + 6)$	La fracción $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$ simplificada	$(x + 2)$
$x^2 - 1$ factorizado	$x - 2$	El producto $3x(x - 2)$	$(x - 1)(x + 1)$
El producto $(x + 5)^2$	$3x^2 - 6x$	$4x^2 - 2x$ factorizado	$x^2 + 25 + 10x$

Figura N° 3. Ejemplo de tarjetas factorizadoras. Fuente: Contreras (2011)

Este juego trata la factorización de polinomios, máximo común divisor y mínimo común múltiplo, los cuadrados perfectos, las diferencias de cuadrados, factores comunes simples, etc. de expresiones algebraicas y contribuye a recordarlos. Se reparten unas tarjetitas en las cuales en el anverso hay un enunciado (por ejemplo: (x^2-1) factorizado) y en el reverso hay soluciones (en diferentes tarjetas). Los alumnos tienen que encontrar las parejas correspondientes, de tal forma que cuando dos alumnos se encuentren con pregunta-respuesta, deberán ir a la pizarra, chequearlo con el profesor, este comprobará el correcto emparejamiento, apuntará las expresiones en la pizarra y registrará los alumnos. Estos deberán continuar buscando parejas hasta que se agote el tiempo estipulado.

3. Juego 3-Lo tuyo y lo mío

El presente juego se puede aplicar en 3º de ESO, en grupos de refuerzo que tengan especial dificultad en plantear problemas algebraicos. Se trabaja la falta de comprensión de los enunciados verbales, que es una de las primeras causas de errores que se cometen en la resolución de problemas algebraicos. Contribuye a conseguir el objetivo "expresar en lenguaje algebraico enunciados verbales". Tal como está formulado el juego contribuye a adquirir las competencias 1 y 2 del cuadro 4. Se estima que la actividad mediante este juego puede durar 20'. La organización del juego debe hacerse con grupos de 3 alumnos, mediante un material manipulativo. El aula deberá disponer de sillas móviles y mesas grandes o móviles también para poder jugar en grupo.

Este juego contribuye a dar significado concreto a las frases que aparecen en las 20 tarjetas del juego que pueden ser del tipo: "Lo mío es tres veces más 2, lo tuyo".

El juego consiste en un tablero numerado del 1 al 49. El primer alumno tira los dados, el siguiente alumno levanta una de las tarjetas y tiene que colocar su ficha en la casilla correspondiente con los dados del compañero anterior (si la casilla está ocupada, no está en el tablero o realiza el cálculo incorrectamente no podrá colocarla). Gana el alumno que consigue colocar todas (10) las fichas en el tablero.

4. Juego 4-TIC álgebra

El presente juego se puede aplicar en 3º de ESO y contribuye a conseguir el objetivo "hacer operaciones algebraicas". Tal como está formulado el juego contribuye a adquirir la competencia 2 del cuadro 4. Se estima que la actividad mediante este juego puede durar 20'. La organización del juego debe hacerse en parejas de alumnos, mediante un material manipulativo. El aula deberá disponer de sillas móviles y mesas grandes o móviles también para poder jugar en grupo.

El objetivo del juego es practicar la multiplicación de factores. Habrá un tablero de factores y otro tablero más grande de polinomios. El objetivo es conseguir ocupar una fila o una columna del tablero de polinomios (cada uno de ellos es el resultado de la multiplicación de factores).

El primer jugador, coloca una de sus fichas en el tablero de factores y el otro jugador, otra ficha. El jugador debe realizar la multiplicación de factores correctamente y colocar una ficha en el tablero de polinomios. El segundo jugador, puede mover su ficha del tablero de factores, y el resultado es donde deberá colocar

otra de sus fichas. Este procedimiento se repite hasta que uno de los jugadores haya ocupado toda una fila o columna.

Observación: es conveniente juntar las parejas con un nivel parecido.

5. Juego 5-Pasatiempos de las balanzas II

El presente juego se puede aplicar en 3º de ESO y contribuye a conseguir el objetivo "comprender el concepto de sistemas compatibles, incompatibles e indeterminados". Tal como está formulado el juego contribuye a adquirir las competencias 1, 2, 3, 4, 8, 11 del cuadro 4. Se estima que la actividad mediante este juego puede durar 25'. La organización del juego debe hacerse con grupos de 3 alumnos. El aula deberá disponer de sillas móviles para poder jugar en grupo.

Este pasatiempo permite introducir el concepto de determinación e indeterminación en un sistema compatible a un nivel muy intuitivo y sobre la base de un contexto de símbolos. Con las balanzas, se puede justificar gran parte de las técnicas que se utilizan para resolver sistemas. El ejemplo debe aprovecharse para después de resolverlo por "la cuenta de la vieja", simbolizar las operaciones, doblar, eliminar etc., justificando así los métodos formales de resolución.

El juego consiste en, a través de varios objetos y dos balanzas equilibradas, construir otra igualdad en una tercera balanza. Para ello, el alumno deberá utilizar expresiones algebraicas. En una primera fase, se puede permitir que los grupos realicen la actividad intuitivamente, pero en la segunda fase, deberán realizarlo mediante expresiones algebraicas previa indicación del profesor. Finalmente, se deben presentar situaciones en las que exista indeterminación e incompatibilidad.

6. Juego 6-"¿Quién quiere ser millonario?"

El presente juego se puede aplicar en 3º de ESO. Se trabajan los conceptos matemáticos relacionados con los sistemas de ecuaciones. Contribuye a conseguir el objetivo "comprender el concepto de sistemas compatibles, incompatibles e indeterminados". Tal como está formulado el juego contribuye a adquirir las competencias del cuadro 4. Se estima que la actividad mediante este juego puede durar 45'. La organización del juego debe hacerse individualmente, mediante un recurso on-line, por lo que requerirá que cada alumno disponga de un ordenador.

Este juego utiliza el esquema del popular concurso internacional de "¿Quién quiere ser millonario?" para realizar preguntas sobre resolución de sistemas de ecuaciones. El juego tiene la ventaja de que se ajusta al nivel de cada concursante o alumno.

Observación: El profesor debe registrar al final de la sesión, el resultado (dinero) al cual ha llegado cada alumno.

7. Juego 7-El Puzle Blanco de polinomio

El presente juego se puede aplicar en 3º de ESO y contribuye a conseguir el objetivo "realizar operaciones algebraicas". Tal como está formulado el juego contribuye a adquirir las competencias 2 y 10 del cuadro 4. Se estima que la actividad mediante este juego puede durar 20'. El juego es individual y utiliza material manipulativo. El aula deberá disponer de sillas móviles y mesas grandes o móviles también para poder jugar en grupo.

Este juego es un puzle con expresiones algebraicas pensado para afianzar las destrezas algebraicas. Consiste en piezas con 4 expresiones (parte superior, derecha, izquierda e inferior) y se deben acoplar con piezas cuya expresión colindante sea equivalente.

Observación: El profesor debe registrar al final de la sesión, el resultado al cual ha llegado cada alumno.

12.2. Anexo 2. Fichas de análisis y evaluación de juegos

FICHA DE ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE JUEGOS						
Datos de identificación						
Título del juego	Cuadrado mágico de sistemas de ecuaciones					
Referencia	http://sofiasalcedom.blogspot.com.es/2011/10/solucion-de-sistemas-de-ecuaciones.html					
Características Didácticas						
Curso	3ero de ESO	Tiempo necesario		20'	Agrupamiento	1
Tipo de material	on-line		Software		material	☐
Contenidos tratados						
Conceptuales	Ecuaciones, Sistemas de ecuaciones, cálculo expresiones algebraicas.					
Procedimentales	Despejar incógnitas.					
Actitudinales	Actitud lúdica y de superación de las matemáticas					
Competencias	Matemática		Trabajo en equipo	-----		
Descripción						
La actividad consiste en ver la relación existente entre la solución de sistemas de ecuaciones y la solución de un cuadrado mágico. La tarea consiste en los siguientes pasos: 1-Se entrega a los alumnos un ejemplo de cuadrado mágico y se anuncian sus propiedades. 2- Los alumnos tienen un cuadrado mágico con una incógnita que tienen que resolver mediante una ecuación. 3-Seguidamente tienen varios cuadrados mágicos con diferentes incógnitas aumentando el nivel de dificultad. 4- Para los grupos más avanzados, tendrán finalmente cuadrados mágicos algebraicos multiplicativos.						
Observaciones	Es importante que el nivel de los cuadrados mágicos vaya aumentando paulatinamente. Debe haber ejercicios suficientes para no agotar el tiempo de la actividad.					
Características técnicas						
Grado de complejidad	Baja	☐	Media		Alta	
Función	Motivadora	☐	Integradora		Socializadora	☐
Momento Didáctico	Inicial		Desarrollo	☐	Final	
Dificultad	Baja	☐	Media	☐	Alta	☐
Capacidad lúdica	Baja		Mediana	☐	Alta	
Nivel de autonomía	Baja ^o		Mediana		Alta	☐
Accesibilidad	Baja		Mediana		Alta	☐
Registro de rendimiento	Baja		Mediana	☐	Alta	

FICHA DE ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE JUEGOS						
Datos de identificación						
Título del juego	Adivina el pensamiento					
Referencia	http://juegos-matematicos.blogspot.com.es/2009/02/aprender-algebra-jugando.html					
Características Didácticas						
Curso	2º de ESO	Tiempo necesario	45'	Agrupamiento	Clase	
Tipo de material	on-line		material		Oral	✓
Contenidos tratados						
Conceptuales	Generalización de aritmética					
Procedimentales						
Actitudinales	Interés, utilidad y magia de las matemáticas					
Competencias	Matemática					
Descripción						
La actividad tiene como objetivo en asimilar la utilidad del uso del álgebra como generalización de la aritmética. Consiste en utilizar expresiones algebraicas para comprender el funcionamiento del problema aparentemente mágico. Si los alumnos utilizan el álgebra, las incógnitas se cancelan, pudiendo así determinar a priori el resultado del problema. Se pueden poner infinitos ejemplos como punto de partida, pero mostraremos el siguiente. Es importante dramatizar la actuación como si se tuviera poderes de lectura de mente. Se pide a los alumnos que realicen las siguientes operaciones: 1) Piensa un número cualquiera, 2) Multiplícalo por 2, 3) Al resultado súmale 9, 4) Al resultado súmale el número que pensaste, 5) Al resultado divídelo por 3, 6) A lo que quedó súmale 4, 7) Al resultado, réstale el número que pensaste. El resultado de aplicar éstas operaciones es siempre 7 independientemente del número elegido. A continuación, se dirige un debate, sobre el motivo por el cual pasa esto y se insta a los alumnos a utilizar alguna herramienta matemática para justificar el juego. Finalmente, cuando se entienda que el álgebra nos facilita el juego mediante la cancelación de incógnitas, se pedirá que individualmente creen un juego parecido para contarlo a su entorno.						
Observaciones	Es importante que los alumnos entiendan que el álgebra es una generalización de la aritmética.					
Características técnicas						
Grado de complejidad	Baja		Media	✓	Alta	
Función	Motivadora	✓	Integradora		Socializadora	
Momento Didáctico	Inicial	✓	Desarrollo	✓	Final	
Dificultad	Baja		Media	✓	Alta	
Capacidad lúdica	Baja		Mediana		Alta	✓
Nivel de autonomía	Baja	✓	Mediana		Alta	
Accesibilidad	Baja		Mediana		Alta	✓
Registro de rendimiento	Baja	✓	Mediana		Alta	

FICHA DE ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE JUEGOS						
Datos de identificación						
Título del juego	Tarjetas factorizadoras					
Referencia	http://www.mauriciocontreras.es/JUEGOS4.pdf					
Características Didácticas						
Curso	3º de ESO	Tiempo necesario		20'	Agrupamiento	Clase
Tipo de material	on-line		material	✓	Oral	
Contenidos tratados						
Conceptuales	Factorización, cuadrados perfectos, MCD, MCM...					
Procedimentales						
Actitudinales						
Competencias	Matemática					
Descripción						
Este juego trata la factorización de polinomios, máximo común divisor y mínimo común múltiplo, los cuadrados perfectos, las diferencias de cuadrados, factores comunes simples, etc. de expresiones algebraicas y contribuye a recordarlos. Se reparten unas tarjetitas en las cuales en el anverso hay un enunciado (por ejemplo: (x^2-1) factorizado) y en el reverso hay soluciones (en diferentes tarjetas). Los alumnos tienen que encontrar las parejas correspondientes, de tal forma que cuando se . Cuando dos alumnos se encuentren con pregunta-respuesta, deberán ir a la pizarra, chequearlo con el profesor y este comprobará el correcto emparejamiento, apuntará las expresiones a la pizarra y registrará los alumnos. Estos deberán continuar buscando parejas hasta que se agote el tiempo estipulado.						
Observaciones	Es importante revisar que los alumnos han realizado correctamente las parejas.					
Características técnicas						
Grado de complejidad	Baja		Media	✓	Alta	
Función	Motivadora	✓	Integradora		Socializadora	✓
Momento Didáctico	Inicial		Desarrollo		Final	✓
Dificultad	Baja		Media	✓	Alta	
Capacidad lúdica	Baja		Mediana	✓	Alta	
Nivel de autonomía	Baja ^o		Mediana		Alta	✓
Accesibilidad	Baja		Mediana		Alta	✓
Registro de rendimiento	Baja		Mediana		Alta	✓

FICHA DE ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE JUEGOS						
Datos de identificación						
Título del juego	Lo tuyo y lo mío					
Referencia	http://www.mauriciocontreras.es/JUEGOS4.pdf					
Características Didácticas						
Curso	2º de ESO	Tiempo necesario		20'	Agrupamiento	3
Tipo de material	on-line		material	✓	Oral	
Contenidos tratados						
Conceptuales						
Procedimentales	Comprensión verbal de problemas					
Actitudinales						
Competencias	Matemática					
El presente juego trabaja la falta de comprensión, de los enunciados verbales, es una de las primeras causas de los errores que se cometen en la resolución de problemas algebraicos. En este sentido, este juego contribuye a dar significado concreto a frases del tipo que aparecen en las 20 tarjetas del juego que pueden ser del tipo: "Lo mío es tres veces más 2, lo tuyo". El juego consiste en un tablero numerado del 1 al 49. El primer alumno tira los dados, el siguiente alumno levanta una de las tarjetas y tiene que colocar su ficha en la casilla correspondiente con los dados del compañero anterior (si la casilla está ocupada, no está en el tablero o realiza el cálculo incorrectamente no podrá colocarla). Gana el alumno que consigue poner todas las 10 fichas en el tablero.						
Observaciones	Este juego, es adecuado para refuerzo. Es adecuado, al final del juego, hacerles escribir la expresión algebraica de las frases de las tarjetas.					
Grado de complejidad	Baja		Media	✓	Alta	
Función	Motivadora		Integradora		Socializadora	✓
Momento Didáctico	Inicial		Desarrollo		Final	✓
Dificultad	Baja		Media	✓	Alta	
Capacidad lúdica	Baja		Mediana	✓	Alta	
Nivel de autonomía	Baja ^o		Mediana		Alta	✓
Accesibilidad	Baja		Mediana		Alta	✓
Registro de rendimiento	Baja		Mediana		Alta	✓

FICHA DE ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE JUEGOS						
Datos de identificación						
Título del juego	TIC-álgebra					
Referencia	http://www.mauriciocontreras.es/JUEGOS4.pdf					
Características Didácticas						
Curso	3º de ESO	Tiempo necesario			Agrupamiento	2
Tipo de material	on-line		material	✓	Oral	
Contenidos tratados						
Conceptuales	Practicar la factorización de polinomios. Resolver ecuaciones. Practicar el cálculo mental.					
Procedimentales						
Actitudinales						
Competencias	Matemática					
El objetivo del juego es practicar la multiplicación de factores. Habrá un tablero de factores y otro tablero más grande de polinomios. El objetivo es conseguir ocupar una fila o una columna del tablero de polinomios (cada uno de ellos es el resultado de la multiplicación de factores). El primer jugador, coloca una de sus fichas en el tablero de factores y el otro jugador, otra ficha. El jugador debe realizar la multiplicación de factores correctamente y colocar una ficha en el tablero de polinomios. El segundo jugador, puede mover su ficha del tablero de factores, y el resultado es donde deberá colocar otra de sus fichas. Este procedimiento se repite hasta que uno de los jugadores haya ocupado toda una fila o columna						
Observaciones	Es conveniente juntar las parejas con un nivel parecido.					
Grado de complejidad	Baja		Media	✓	Alta	
Función	Motivadora		Integradora		Socializadora	✓
Momento Didáctico	Inicial		Desarrollo		Final	✓
Dificultad	Baja		Media	✓	Alta	
Capacidad lúdica	Baja		Mediana	✓	Alta	
Nivel de autonomía	Baja ^o		Mediana		Alta	✓
Accesibilidad	Baja		Mediana		Alta	✓
Registro de rendimiento	Baja	✓	Mediana		Alta	

FICHA DE ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE JUEGOS						
Datos de identificación						
Título del juego	Pasatiempo de las balanzas II					
Referencia	Ejemplo sacado del libro: <i>"Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas"</i> ISBN 978-84-938047-1-8 (Tercera edición en Editorial Aviraneta.)					
Características Didácticas						
Curso	3º de ESO	Tiempo necesario		25	Agrupamiento	3
Tipo de material	on-line		material	✓	Oral	
Contenidos tratados						
Conceptuales	Introducción del concepto de sistemas compatibles, incompatibles e indeterminados					
Procedimentales						
Actitudinales						
Competencias	Matemática					
Este pasatiempo permite introducir el concepto de determinación e indeterminación en un sistema compatible a un nivel muy intuitivo y sobre la base de un contexto de símbolos. Con las balanzas, se puede justificar gran parte de las técnicas que se utilizan para resolver sistemas. El ejemplo debe aprovecharse para después de resolverlo por "la cuenta de la vieja", simbolizar las operaciones, doblar, eliminar etc., justificando así los métodos formales de resolución. El juego consiste en a través de varios objetos y dos balanzas equilibradas, construir otra igualdad en una tercera balanza. Para ello, el alumno deberá utilizar expresiones algebraicas. En una primera fase, se puede permitir que los grupos realicen la actividad intuitivamente, pero en la segunda fase, deberán realizarlo mediante expresiones algebraicas previa indicación del profesor. Finalmente, se deben presentar situaciones en las que exista indeterminación e incompatibilidad.						
Observaciones						
Grado de complejidad	Baja		Media	✓	Alta	
Función	Motivadora	✓	Integradora		Socializadora	✓
Momento Didáctico	Inicial	✓	Desarrollo		Final	
Dificultad	Baja		Media	✓	Alta	
Capacidad lúdica	Baja		Mediana		Alta	✓
Nivel de autonomía	Baja ^o		Mediana		Alta	✓
Accesibilidad	Baja		Mediana		Alta	✓
Registro de rendimiento	Baja		Mediana	✓	Alta	

FICHA DE ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE JUEGOS						
Datos de identificación						
Título del juego	concurso "¿quién quiere ser millonario?"					
Referencia	http://www.quia.com/rr/59310.html					
Características Didácticas						
Curso	3º de ESO	Tiempo necesario		45	Agrupamiento	1
Tipo de material	on-line	✓	Material		Oral	
Contenidos tratados						
Conceptuales	Resolución de sistemas de ecuaciones					
Procedimentales						
Actitudinales						
Competencias	Matemática					
Este juego utiliza el esquema del popular concurso internacional de "¿Quien quiere ser millonario?" para realizar preguntas sobre resolución de sistemas de ecuaciones. Este juego tiene la ventaja de que se ajusta al nivel de cada concursante o alumno.						
Observaciones	El profesor debe registrar al final de la sesión, el resultado (dinero) al cual ha llegado cada alumno.					
Grado de complejidad	Baja	✓	Media		Alta	
Función	Motivadora	✓	Integradora		Socializadora	
Momento Didáctico	Inicial		Desarrollo		Final	✓
Dificultad	Baja	✓	Media	✓	Alta	✓
Capacidad lúdica	Baja		Mediana		Alta	✓
Nivel de autonomía	Bajaº		Mediana		Alta	✓
Accesibilidad	Baja		Mediana		Alta	✓
Registro de rendimiento	Baja		Mediana		Alta	✓

FICHA DE ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE JUEGOS						
Datos de identificación						
Título del juego	Puzle blanco de polinomios					
Referencia	http://anagarciaazcarate.wordpress.com/2011/03/08/puzzle-blanco-de-polinomios/					
Características Didácticas						
Curso	3º de ESO	Tiempo necesario	45	Agrupamiento	1	
Tipo de material	on-line	Material	✓	Oral		
Contenidos tratados						
Conceptuales	Desarrollo de expresiones algebraicas.					
Procedimentales						
Actitudinales						
Competencias	Matemática					
Este juego es un puzle con expresiones algebraicas pensado para afianzar las destrezas algebraicas. Consiste en piezas con 4 expresiones (parte superior, derecha, izquierda e inferior) y se deben acoplar con piezas cuya expresión colindante sea equivalente.						
Observaciones	El profesor debe registrar al final de la sesión, el resultado al cual ha llegado cada alumno.					
Grado de complejidad	Baja	✓	Media		Alta	
Función	Motivadora	✓	Integradora		Socializadora	
Momento Didáctico	Inicial		Desarrollo	✓	Final	
Dificultad	Baja		Media	✓	Alta	
Capacidad lúdica	Baja		Mediana	✓	Alta	
Nivel de autonomía	Bajaº		Mediana		Alta	✓
Accesibilidad	Baja		Mediana		Alta	✓
Registro de rendimiento	Baja		Mediana	✓	Alta	

12.3. Anexo 3. Transcripción de las entrevistas

12.3.1. Entrevista al Dr. J. Deulofeu

DATOS IDENTIFICATIVOS	
a) SEXO	Mujer ☒ Hombre ☐
b) EDAD.....60.....Años	
c) TITULACIÓN	Diplomado/a ☐ Licenciad/a ☐ Doctor/a ☐
d) MATERIA/S QUE IMPARTE...	Enseñanza de la Didáctica de las matemáticas en el Máster de secundaria, Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.....
SITUACIÓN ACTUAL:	
CU.....	☐
TU.....	☐
CEU.....	☐
TEU.....	☐
ANTIGÜEDAD EN LA UNIVERSIDAD.....	35.....años
ANTIGÜEDAD EN LA FUNCIÓN DOCENTE.....	38.....años
ANTIGÜEDAD EN LA FUNCIÓN INVESTIGADORA...	30.....años

Preguntas

1.¿Nos puede explicar desde su punto de vista cuáles son las principales dificultades que se encuentran los alumnos de segundo ciclo de la ESO en los temas de Álgebra (ecuaciones,...)?

Desde mi punto de vista, el principal problema de la enseñanza del álgebra es que el álgebra constituye un nuevo lenguaje dentro de las matemáticas que aprenden por primera vez en secundaria, y que este nuevo lenguaje que por un lado tiene una gran potencia a nivel de abstracción es difícil de aprender fundamentalmente por un problema de semantización de este lenguaje, es decir, de dar significado al lenguaje, a la sintaxis de este lenguaje y al significado de los símbolos, por ejemplo, cuando aparece la letra x en una ecuación los alumnos inicialmente la ven como una incógnita, como un número que tienen que encontrar, y en un segundo estadio, la ven como una variable, pero esto es más difícil.

2.¿Qué área del álgebra de la ESO opina que supone mayor dificultad para los alumnos?

Cuando uno se inicia en el álgebra, y eso es lo que pasa en la ESO, lo más complicado es dar significado a lo que los alumnos hacen cuando manipulan expresiones algebraicas. Les es difícil de entender que x más x es dos x y no x^2 . Entender que la sintaxis del álgebra es de aquella manera por una cuestión de significado. A ellos les es difícil dar significado, les es difícil el lenguaje del álgebra, les es difícil dar significado a las letras como números.

3.¿Cuáles son los errores más comunes de los alumnos en álgebra?

Los errores se derivan de las dificultades que acabamos de expresar, por lo tanto son errores de sintaxis. Yo siempre comparo el aprendizaje del álgebra con el aprendizaje de una lengua extranjera completamente distinta. Fundamentalmente

hay dos tipos de errores: inicialmente los errores de tipo sintáctico y eso se produce por la falta de semantización, por otro lado hay otro tipo de errores, que son los que se producen cuando se trata de traducir del lenguaje verbal al lenguaje matemático o cuando se tienen que resolver problemas que se resuelven a través del álgebra y en el momento de plantear ecuaciones se produce el error por el significado del símbolo igual, por ejemplo, cuando se dice "en una clase el número de alumnos es diez veces más grande al número de profesores", los alumnos ponen el 10 al lado de los alumnos porque consideran que este grupo es más grande y este error proviene de traducir del lenguaje oral.

4.¿Considera que pueden ser útiles los juegos para la enseñanza del Álgebra? En caso afirmativo, ¿nos puede indicar los motivos?

Sí, dado que el álgebra es el aprendizaje de un nuevo lenguaje es fundamental practicar con este nuevo lenguaje y practicar quiere decir no únicamente aplicar rutinas o técnicas de la sintaxis del algebra sino darle significado. Hay diferentes maneras de darle significado; una de ellas es trabajar con problemas contextuales, por ejemplo, y otra es utilizar los juegos. La ventaja o interés de los juegos, en un primer nivel, siempre es una cuestión de motivación, pero en un segundo nivel el hecho de que no están manipulando expresiones sin sentido sino que los propios objetivos del juego hace que los alumnos tengan que utilizar el álgebra con sentido, pero además el uso del juego sirve para practicar las herramientas propias del álgebra. Es mucho más interesante resolver un juego que resolver una página de ejercicios.

5.¿Qué función desarrollan los juegos en la enseñanza de las Matemáticas?

Los juegos se pueden desarrollar como un contexto más, hoy en día se habla de la importancia de las matemáticas en contexto. Esto sirve para el álgebra o cualquier otro concepto matemático, y esto sirve para muchos contextos; contextos del álgebra en general, de otras ciencias, etc..y uno de estos contextos, bajo mi punto de vista es el juego. A mí me gusta distinguir dos tipos de juegos: aquellos juegos de conocimientos que el objetivo fundamental es la utilización de conceptos o rutinas aprendidas y un segundo tipo en la que son los juegos propiamente dichos, donde lo más importante es practicar estrategias de resolución de juegos que son muy similares a las estrategias de resolución de problemas. Estos son juegos donde no interviene al azar.

6.¿Qué tipo de juegos le parecen más adecuados?

A mí los juegos de conocimiento, aun pareciéndome interesantes, me parecen menos interesantes que los juegos de estrategia. ¿Por qué? Porque los juegos de conocimientos se convierten en un recurso que nos permiten practicar rutinas, pero su papel es limitado.

En cambio, cuando los alumnos ya tienen cierto dominio de la materia, es en este momento cuando se ponen en marcha estrategias que son habilidades de carácter superior y que tienen relación con las habilidades necesarias para resolver problemas y con las competencias matemáticas.

7- ¿Qué importancia considera que tiene el álgebra en el área de matemáticas en la ESO?

Ciertamente el álgebra es un área muy importante, podríamos decir que es uno de los momentos en las que se distingue la matemática elemental de la superior y por lo tanto es muy importante enseñar álgebra en la ESO. De todas formas es muy importante como se hace esta introducción y como se gradúa a lo largo de la ESO. ¿Por qué? Porque el álgebra trata de modelizar problemas de carácter geométrico o

aritmético o de cualquier otro tipo, por lo tanto si queremos que el álgebra ayude al alumno a resolver estos problemas geométricos o aritméticos, es muy importante que tenga los conocimientos suficientes de geometría o de aritmética. Muchas veces nos encontramos con que los alumnos cuando están trabajando problemas de álgebra además de tener dificultades en esta parte, tienen dificultades previas en la aritmética, en la geometría y de medida y esto hace que se reproduzcan los problemas que no han sido suficientemente consolidados. El ejemplo más claro, es la relación entre números enteros y álgebra, los alumnos antes de hacer álgebra han aprendido el concepto de suma y, sobretodo de resta con los números enteros, pero estos problemas que parecían haber sido resueltos, se vuelven a reproducir en la parte de álgebra... El álgebra es muy importante pero es especialmente difícil por esos dos motivos: uno, porque es un lenguaje completamente nuevo; es un lenguaje muy general que utiliza letras para representar incógnitas o para representar, sobretodo, variables, y por lo tanto no sólo es necesario conocer muy bien este nuevo lenguaje sino que también es necesario conocer muy bien el lenguaje anterior porque los alumnos ya han utilizado los símbolos de las operaciones, el símbolo igual, y muchas veces lo que constatamos es que el conocimiento que tenían de estos símbolos no era suficiente y esto se refleja en el momento de trabajar en el álgebra. Un ejemplo podría ser el signo igual. Los alumnos en primaria y al principio de secundaria, interpretan el signo igual no en el sentido matemático, el sentido del álgebra, lo que implica que el valor de lo que queda a la izquierda del igual tiene que tener el mismo valor que lo que queda a la derecha, sino que muchas veces interpretan este signo igual como efectuar una operación. Por esto escriben " $3+5=8+1=9-4=5$ " y esto les lleva muchos problemas.

8. ¿Qué recursos (juegos...) considera más adecuados para enseñar álgebra?

En el sentido de juego, hay dos tipo de juegos que me parecen interesantes, los juegos de conocimiento, que pueden ser interesantes para que los alumnos practiquen la sintaxis del álgebra, y después están aquellos problemas que dan un paso más que utilizan el álgebra para resolver problemas.

9. ¿Cree que en el segundo ciclo de la ESO se dedica el tiempo suficiente a impartir el bloque de álgebra?

Esto es discutible porque depende de la concreción del curricular que haga cada centro; por lo tanto, es muy difícil decirlo de una forma general. Yo creo que sobretodo en el segundo ciclo de la ESO el álgebra debería ir apareciendo en todos los temas. Es decir, cuando se están haciendo otros temas no se enfatiza suficiente en que el álgebra está siempre presente. Pongo un ejemplo: cuando se están haciendo áreas y volúmenes, si siempre se pide el resultado de las áreas y volúmenes a partir de los otros datos, no estoy haciendo álgebra, pero si en cambio yo tengo un problema y como datos doy alguna de las longitudes y el área, se deberá despejar la variable, y por lo tanto, se estará haciendo álgebra. Esto también pasa en otras ciencias, sobretodo en física: hay todo un trabajo de álgebra que muchas veces no se trabaja suficientemente.

10. ¿Qué orientaciones daría a un profesor de Matemáticas en la programación didáctica del álgebra?

Hay una primera orientación que me parece fundamental y es: en toda la parte de introducción al álgebra el profesor debe comprender que el alumno está aprendiendo un lenguaje nuevo y tiene que ayudarlo a dar significado y a hacer entender que representan aquellos símbolos y signos y dejar en un segundo nivel las reglas sintácticas. Si se acaba utilizando el álgebra de una forma automática, sabemos, por experiencia y por investigaciones, que los errores tenderán a repetirse en el tiempo.

Y hay una segunda orientación y es que el profesor debería reflexionar para qué sirve el álgebra. El álgebra es un lenguaje que sirve para la resolución de problemas, para generalizar. Finalmente el álgebra es una herramienta potente y fundamental para la introducción del análisis y del cálculo.

11. ¿Qué orientaciones daría a un profesor de Matemáticas para utilizar juegos matemáticos?

-

Le diría a un profesor que tiene que reflexionar sobre el hecho de que los juegos matemáticos son un contexto potente para hacer matemáticas, para hacer matemáticas relevantes y para hacer matemáticas curriculares. Por lo tanto el uso de un juego de una manera aislada porque sobra una hora, es muy poco relevante. No digo que no esté bien, pero es muy poco relevante. Lo que le diría a un profesor de que cuando esté desarrollando un tema de matemáticas, con toda probabilidad existirán juegos adecuados para ser utilizados como actividades de aprendizaje de matemáticas especialmente adaptados a aquel tema. El uso que le dé lo decide el profesor: en un caso será la introducción a un tema, la consolidación de un determinado concepto; en otro caso será la introducción de un concepto, en otro será la resolución de un problema.

12.3.2. Entrevista al Dr. A. Mallart

DATOS IDENTIFICATIVOS			
e) SEXO	Mujer	Hombre	☐ X
f) EDAD.....Años			
g) TITULACIÓN	Diplomado/a	Licenciad/a	☐ X
h) MATERIA/S QUE IMPARTE.	matemáticas	1º ESO	hasta 2º bachillerato.....
SITUACIÓN ACTUAL:			
CU.....		☐	
TU.....	☐		
CEU.....		☐	
TEU.....		☐	
ANTIGÜEDAD EN LA UNIVERSIDAD.....7.....años			
ANTIGÜEDAD EN LA FUNCIÓN DOCENTE.....13.....años			
ANTIGÜEDAD EN LA FUNCIÓN INVESTIGADORA....4.....años			

Preguntas

1.¿Nos puede explicar desde su punto de vista cuáles son las principales dificultades que se encuentran los alumnos de segundo ciclo de la ESO en los temas de Álgebra (ecuaciones,...)?

El álgebra se empieza a trabajar en 2º de ESO, entonces las dificultades se trabajan en el primer ciclo de secundaria. En el segundo ciclo las diferencias que se recogen son las que no se han podido resolver en el curso anterior, en 2º de ESO. Entonces en 3º de ESO se suele empezar con un repaso del temario anterior y se profundiza un poco más.

2.¿Qué área del álgebra de la ESO opina que supone mayor dificultad para los alumnos?

Las dificultades son las de traducción del lenguaje y, sobretodo, la de operar con fracciones.

3.¿Cuáles son los errores más comunes de los alumnos en álgebra?

Cuando se trabaja en álgebra podemos hacerlo en lo que es la resolución de problemas o bien lo que es directamente el cálculo operativo de ecuaciones. Es en este último apartado, sin lugar a dudas donde aparecen las fracciones, y donde hay más errores por la dificultad que ellos encuentran. Para concretar un poco más, cuando encuentran el signo negativo delante de una fracción cuyo denominador tiene más de un elemento, eso provoca la generación de un resultado erróneo. También cuando hay que resolver problemas, la principal dificultad que me encuentro está en plantear la ecuación.

4.¿Considera que pueden ser útiles los juegos para la enseñanza del Álgebra? En caso afirmativo, ¿nos puede indicar los motivos?

Por descontado. Se puede enfocar de varias maneras, podríamos citar algunos autores. Yo diría que se pueden trabajar problemas de álgebra en un contexto extramatemático. A ver si me explico, los problemas se pueden trabajar de muchas maneras, pero si haces el problema atractivo, es decir, consigues que el alumno lo encuentre interesante de resolver y lo motivas, entonces el álgebra se trabaja mucho mejor.

Esto lo puedes conseguir, por ejemplo, con la matemática recreativa, cogiendo problemas sobre el un contexto digamos que no parezca para el alumno un contexto matemático puramente, sino que sean de otro contexto.

Por lo tanto, los motivos son exactamente que los alumnos estén motivados; si siempre estamos incidiendo con el mismo enfoque a veces perdemos la perspectiva y los alumnos pierden interés.

5.¿Qué función desarrollan los juegos en la enseñanza de las Matemáticas?

Función, a ver, esta pregunta es muy amplia. En la tesis doctoral tengo un punto que dedico a la definición de juego. Un punto de vista que se puede atacar es desde la motivación, como hemos tratado antes. Cuando hemos hablado de álgebra, hemos hablado de cómo resolver problemas, no sólo a nivel operativo sino cómo resolver un problema mediante la conversión al lenguaje matemático del enunciado. Esta conversión se puede trabajar, por ejemplo, con enigmas, regresiones matemáticas y con juegos. De hecho son como juegos, puzles. Y la manera de trabajar así es mucho más cómoda, atractiva y fácil, trabajando igualmente con las matemáticas. Ayudas a la abstracción, a una representación simbólica. Con una adivinanza, se pueden trabajar muchas cosas; las estrategias de resolución que se utilizan en problemas de matemáticas también se trabajan en las recreaciones. Si planificas los objetivos que quieres conseguir, puedes llegar a compaginar una cosa u otra, y conseguir que el alumno aprenda mejor. O sea, no es sólo la motivación sino también las estrategias que desarrolla para resolver los problemas.

6.¿Qué tipo de juegos le parecen más adecuados?

En mi tesis doctoral hablo también de esto. Se pueden clasificar según el proceso de enseñanza y aprendizaje, según el lugar que ocupan en este proceso, y aquí tienes autores como Bright, Harvey o Willer. También se pueden clasificar según la influencia del azar y aquí cito a Bisley. Autores más nuestros, Corbalán por ejemplo, hablan de juegos de conocimiento y de estrategia. Otra clasificación es desde el punto de vista de juegos pre-instruccionales, co-instruccionales y post-

instruccionales, dependiendo de la instrucción que se imparta en clase. Una clasificación así podría ser la siguiente: juegos en que interviene la pura suerte, juegos mixtos que tengan algo de habilidad y algo de suerte, juegos de pura habilidad y juegos automáticos, pero también se podría incluir otra manera de pensar como son las diversiones aritméticas y algebraicas o, también. Geométricas o topológicas, o problemas donde haya una influencia fuerte de la lógica. Corbalán, en 1994, tipifica los juegos de secundaria y bachillerato en 3 tipos: los primeros son juegos de un procedimiento que es conocido, el segundo tipo sería el que comprende los juegos de conocimiento donde se trabajan los temas corrientes, habituales del currículo y, por último, los juegos de estrategia que es aquí donde se trabajan los procedimientos para ganar, diseñar la estrategia ganadora. Esto es a grandes rasgos, pero hay más clasificaciones.

7. ¿Qué importancia considera que tiene el álgebra en el área de matemáticas en la ESO?

El álgebra no se trabaja en primaria y se empieza a dar en secundaria. Se pasa de trabajar la aritmética, la geometría, aspectos muy tangibles, e incluso estadística y probabilidad, a trabajar aspectos más profundos como el álgebra.

El álgebra tiene un peso muy importante y los profesores intentamos trabajarlo en secundaria y bachillerato. Es un paso necesario para la abstracción. No podemos referirnos a conceptos abstractos con las otras ramas estudiadas antes como la aritmética y la geometría.

8. ¿Qué recursos (juegos...) considera más adecuados para enseñar álgebra?

La respuesta a esta pregunta está abierta porque se está investigando. Tanto la creatividad como la imaginación del profesor pueden ser muy importantes. Por ejemplo, hay libros de enigmas que están muy bien. No todos los enigmas pero si algunas facilitan el trabajo. A parte, hay trabajos manipulativos que pueden ayudar bastante, pero la manipulación se trabaja muy bien en educación infantil y primaria, pero en secundaria se olvida bastante. Por ejemplo, podríamos coger un instrumento manipulativo como construir un puzzle y que las fichas de éste sean la solución de una ecuación y en el otro lado una ecuación. He intentado hacerlo y lo he llevado a clase y ha funcionado, pero lo que pasa es que no puedes trabajar todas las ecuaciones ni las soluciones. También se podría hacer algún juego tipo Trivial donde la solución de la pregunta sea a través de la resolución de una ecuación.

La imaginación es enorme, hay autores que han trabajado en ello y yo mismo lo estoy haciendo. Es interesantísimo esto!

9. ¿Cree que en el segundo ciclo de la ESO se dedica el tiempo suficiente a impartir el bloque de álgebra?

Se tendría que dedicar más tiempo a trabajar todos los temas. El álgebra creo que es una parte esencial porque es la base de conocimiento para los problemas desarrollados en bachillerato. Es un escalón que no podemos saltar. Si vienen bien preparados de secundaria, se asegura que en bachillerato podamos ir más allá. El estudio de funciones, las derivadas que se ven en bachillerato, necesitan el lenguaje algebraico. Además, también depende de las horas dedicadas por el alumno, del interés, si hay que poner más trabajos adicionales. Yo no digo que se esté haciendo mal, pero es una piedra que se tiene que poner muy firme.

10. ¿Qué orientaciones daría a un profesor de Matemáticas en la programación didáctica del álgebra?

Primero tener claro los objetivos de etapa porque depende del nivel al que nos referimos. A partir de ellos, desarrollamos unos contenidos que nos permitan llegar a los objetivos y desarrollar una serie de actividades. Esas actividades pueden ser para introducir el tema, de refuerzo, para investigar, de evaluación individual o grupal (trabajo cooperativo). También se pueden proponer trabajos como elaborar un material manipulativo vinculado con el álgebra, es decir, que cada grupo diseñe lo que crea conveniente siguiendo siempre los objetivos marcados en la unidad didáctica.

11. ¿Qué orientaciones daría a un profesor de Matemáticas para utilizar juegos matemáticos?

Tener muchas ganas de jugar y pasarlo bien. Luego, siempre se dice en clase “vamos a jugar”, el chip de la clase cambia y la motivación es máxima. Para que la motivación no baje, las normas relacionadas con el juego tienen que estar clarísimas. No puede ser que haya dudas. También es necesario que se facilite al alumno que consiga llegar a la estrategia ganadora. A veces es con la repetición del juego que empezará a valorar si deduce la estrategia o no.

Ganas de jugar, de que salga bien y paciencia porque desde que se propone hasta que sale bien, al menos, ha pasado a media clase o toda entera. El alboroto puede ser normal porque es normal que el juego mismo lo provoque.

El profesor tiene que conocer el grupo porque a veces hay alumnos, que aunque la actividad sea agradable y recreativa, no está por lo que tiene que estar y entonces nadie disfruta de la actividad.

12.3.2. Entrevista al Dr. J.M. Gairín

DATOS IDENTIFICATIVOS			
a) SEXO	Mujer	Hombre	X
b) EDAD.....64.....Años			
c) TITULACIÓN	Diplomado/a	Licenciad/a	Doctor/a X
d) MATERIA/S QUE IMPARTE.....	Está jubilado.....		
SITUACIÓN ACTUAL:			
CU.....		☐	
TU.....		X	
CEU.....		☐	
TEU.....		☐	
ANTIGÜEDAD EN LA UNIVERSIDAD.....	24.....años		
ANTIGÜEDAD EN LA FUNCIÓN DOCENTE.....	38.....años		
ANTIGÜEDAD EN LA FUNCIÓN INVESTIGADORA....	32.....años		

Preguntas

1.¿Nos puede explicar desde su punto de vista cuáles son las principales dificultades que se encuentran los alumnos de segundo ciclo de la ESO en los temas de Álgebra (ecuaciones,)?

El aprendizaje de un lenguaje simbólico nuevo, con unos entes alfanuméricos y unas leyes formales similares aunque distintas a las conocidas por los alumnos.

2.¿Qué área del álgebra de la ESO opina que supone mayor dificultad para los alumnos?

La traslación al lenguaje algebraico de enunciados formulados en el lenguaje materno

3.¿Cuáles son los errores más comunes de los alumnos en álgebra?

En el paso al lenguaje algebraico:

- identificar las letras como abreviaturas de sustantivos de objetos (en vez de cómo sustitutos de cantidades de dichos objetos) y del signo igual como un signo de correspondencia (en vez de cómo un signo de igualdad entre cantidades numéricas).
- convertir cada oración del lenguaje verbal en una ecuación, cambiando las palabras claves por símbolos de forma secuencial de izquierda a derecha.

En la manipulación de expresiones algebraicas el alumno comete errores porque encuentra dificultades para controlar la veracidad o falsedad de sus actuaciones:

- usa entes abstractos sometidos a leyes formales y, por lo tanto, actúa de acuerdo a los dictados de su memoria
- no tiene referentes en el mundo físico que le permitan dar sentido a las relaciones y operaciones algebraicas.

4.¿Considera que pueden ser útiles los juegos para la enseñanza del Álgebra? En caso afirmativo, ¿nos puede indicar los motivos?

Los juegos de estrategia son muy adecuados para que surja la necesidad de buscar un nuevo lenguaje que permita expresar resultados generales de dicho juego.

Este tipo de juegos facilitan el paso de la aritmética al álgebra: decir los movimientos necesarios para resolver un juego particular es resolver un problema aritmético; indicar los movimientos necesarios para resolver un juego con un número “cualquiera” de fichas es un problema algebraico.

5.¿Qué función desarrollan los juegos en la enseñanza de las Matemáticas?

Los juegos permiten a los alumnos entender las claves de la matemática como disciplina científica, con unos métodos y unas herramientas que le son propias y diferenciadas:

El significado que tienen las definiciones o los axiomas son más fácilmente comprensibles en términos de juego: la forma del tablero o el número de fichas no son cuestionables, forman parte de la esencia del juego, son los puntos de partida que no tiene que justificarse, son consustanciales al juego.

El papel que juegan en matemáticas las reglas, las operaciones, son similares a las reglas de los juegos: pueden cuestionarse su adecuación o su origen, pero hay que aplicarlas en la forma que indica el enunciado. Cualquier variación de las mismas no es admisible: jugar correcta o incorrectamente son sinónimos de aplicar bien o mal una regla.

Hacer una jugada no es más que aplicar las reglas del juego a los elementos que lo caracterizan. En la construcción de las matemáticas los axiomas y definiciones constituyen los cimientos en los que se asientan la correcta aplicación de las reglas con las que conseguir nuevas formulaciones, del mismo modo que aparece una nueva situación del juego después de cada jugada.

No todas las jugadas son igualmente adecuadas en la práctica del juego, del mismo modo que no todas las construcciones o deducciones matemáticas son pertinentes. Es más, la puesta en práctica de estrategias, de planes de

resolución, ponen de manifiesto, como igualmente ocurre en las matemáticas, que los caminos para alcanzar el objetivo pueden ser tortuosos o inadecuados.

Los juegos también posibilitan que los alumnos hagan matemáticas:

Los juegos tienen un lenguaje propio y un esquema estándar en el que se incluyen las condiciones iniciales, las reglas y los objetivos. Es por ello que, a veces, no se les reconoce como enunciados de problemas, que se interpreten como otro tipo de actividad diferente que, con frecuencia, no se asocia con tareas matemáticas. Sin embargo, los juegos de estrategia son auténticos problemas matemáticos en el sentido de que son historias incompletas que se resuelven con métodos y técnicas matemáticas.

Hay juegos que se usan para introducir un nuevo tema, para presentar al alumno una situación problemática que no se resuelve con las herramientas de que dispone, como es el caso de la estadística y los juegos de azar.

6. ¿Qué tipo de juegos le parecen más adecuados?

En general, los juegos llamados de conocimiento se utilizan para que los alumnos se adiestren en el uso de técnicas de cálculo y para que fortalezcan su memorización de hechos matemáticos.

Los juegos de estrategia son adecuados para la resolución de problemas, para el uso de estrategias y de razonamientos matemáticos (inductivos, deductivos y recursivos)

7- ¿Qué importancia considera que tiene el álgebra en el área de matemáticas en la ESO?

El álgebra escolar resulta esencial para que los alumnos superen la aritmética accedan a la que algunos autores denominan matemática superior; resulta esencial para que los alumnos puedan conocer ramas de la matemática tan importantes y útiles como el análisis funcional o la geometría analítica.

Con la aritmética un ciudadano puede resolver buena parte de los problemas que se encuentra en su vida cotidiana; con el álgebra ese ciudadano estará en disposición de acceder a ramas de la matemática necesarias para resolver sus problemas profesionales.

8. ¿Qué recursos (juegos...) considera más adecuados para enseñar álgebra?

Para iniciar a los alumnos en el lenguaje algebraico son adecuados los juegos de estrategia: se inician con situaciones particulares y se persigue alcanzar resultados generales (que se habrán de expresar en lenguaje algebraico). Es necesario analizar bien los juegos que se proponen a los alumnos para que las expresiones algebraicas que vayan apareciendo sean de dificultad creciente.

Una vez que los alumnos conocen y usan el lenguaje algebraico, se utilizarán juegos de conocimiento (como barajas, bingos, dominós, ...) para que los alumnos practiquen las relaciones y operaciones con expresiones algebraicas

9. ¿Cree que en el segundo ciclo de la ESO se dedica el tiempo suficiente a impartir el bloque de álgebra?

No pienso que el enfoque se deba centrar en el tiempo (la pregunta pertinente sería cómo modificar el tiempo dedicado al álgebra, indicando a costa de qué otras ramas de las matemáticas).

Me parece más importante el modo en que se enseña. Los alumnos conocen el álgebra desde principio de la ESO, y concluyen el bachillerato utilizando las letras para indicar cualidades de los objetos, lo que les dificulta enormemente la resolución de problemas.

10. ¿Qué orientaciones daría a un profesor de Matemáticas en la programación didáctica del Álgebra?

Que marcase como objetivo prioritario los aspectos conceptuales, que priorice la enseñanza de aspectos tales como la correcta asignación de valores a las letras; distinguir entre funciones, ecuaciones y expresiones algebraicas; traducir correctamente del lenguaje materno al lenguaje algebraico y viceversa; etc..

Los aspectos procedimentales, en mi opinión, deben tratarse con referencias al mundo físico en el que el alumno pueda valorar si las manipulaciones realizadas son correctas o incorrectas.

11. ¿Qué orientaciones daría a un profesor de Matemáticas para utilizar juegos matemáticos?

Que conozca y resuelva juegos, tanto de conocimiento como de estrategia, analizando las posibilidades educativas que serían útiles para el aprendizaje de sus alumnos. Al igual que otros recursos educativos, el profesor debe conocerlos en profundidad para que le resulten de utilidad en sus clases.

Que planifique y lleve a cabo la utilización de un juego en una de sus clases y, posteriormente, que valore las potencialidades y limitaciones de dicha actividad.

Que, en la medida de lo posible, la actividad del juego sea compartida por los otros profesores de matemáticas.

No confundir las actividades del juego que se realizan esporádicamente (para celebrar concursos, olimpiadas o semanas culturales), con la planificación y utilización sistemática del juego como recurso para el aprendizaje de las matemáticas

12.4. Anexo 4. Síntesis de los juegos analizados

Cuadro 13. Síntesis del análisis de los juegos matemáticos realizada (I)

Título	Grado de complejidad	Dificultad	Función			Momento didáctico			Capacidad lúdica	Nivel de autonomía	Accesibilidad	Registro de rendimiento
			Motivadora	Integradora	Socializadora	Inicial	Desarrollo	Final				
Cuadrado mágico de sistemas de ecuaciones	1		X		X		X		1	3	3	2
									2			
									3			
Adivina el pensamiento	2		✓			✓	✓		3	1	3	
Tarjetas factorizadoras	2	2	✓		✓			✓	2	3	3	3
Lo tuyo y lo mío	2	2	✓		✓			✓	2	3	3	3
TIC-álgebra	2	2	✓		✓				2	3	3	1
Balanzas II	2	2	✓		✓	✓			3	3	3	2
Concurso "¿quién quiere ser millonario?"	1	1 a 3	✓		✓			✓	3	3	3	3
Puzle Blanco de polinomios	1	2	✓				✓		2	3	3	2

Cuadro 14. Síntesis del análisis de los juegos matemáticos realizada (II)

Título	Curso	Tiempo	Agrupamiento	Material			Contenidos
				Virtual	Material	Oral	
Cuadrado mágico de sistemas de ecuaciones	4º ESO	45'	3		✓		Sistemas de ecuaciones
							Despejar incógnitas
							Actitud lúdica
Adivina el pensamiento	3º ESO	45'	clase			✓	Expresiones algebraicas
Tarjetas factorizadoras	3º ESO		3				Factorización, cuadrados perfectos, MCD, MCM...
Lo tuyo y lo mío	3º ESO		3				Comprensión verbal de problemas
TIC-álgebra	3º ESO	45'	2		✓		Factorización de polinomios
							Resolver ecuaciones
Balanzas II	3º ESO	25'	2		✓		Introducción del concepto de sistemas compatibles, incompatibles e indeterminados
Concurso "¿quién quiere ser millonario?"	4º ESO	45'	1	✓			Resolución de sistemas de ecuaciones
Puzzle Blanco de polinomios	3º ESO	45'	1	✓			Desarrollo de expresiones algebraicas.