INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

José Manuel Fernández Rodríguez

Encarnación López Fernández

JUSTIFICACIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LA UNIDAD.

El paso de lo concreto a lo abstracto supone uno de los caminos de más difícil recorrido para nuestros alumnos y alumnas. El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades y, para ello, el uso de símbolos y de expresiones literales se convierte en una herramienta necesaria para la resolución de problemas y la modelización de situaciones diversas. Esta realidad conceptual se transforma para nuestro alumnado en una doble dificultar, por un lado el trabajo con expresiones literales y por el otro traducir enunciados a lenguaje algebraico.

En esta unidad hacemos una propuesta de cómo las calculadoras de todo tipo pueden servirnos de herramientas de apoyo de este aprendizaje incipiente. Gracias a los modelos con CAS (Computer Algebra System), como la CASIO CP-400 intentaremos mostrar cómo herramientas de gran potencia de cálculo tienen también un gran potencial didáctico en estos niveles educativos. Aunque como ocurre con cualquier herramienta didáctica, en particular las herramientas TICs, las calculadoras no son aplicables a determinados aprendizajes, aunque en otro si proporcionen una notable ventaja didáctica.

Esta unidad didáctica, en cuanto a estructura y contenidos, no difiere mucho de las que puedan aparecer en cualquier libro de texto. Comenzamos la unidad trabajando mediante distintas situaciones la necesidad de utilizar un lenguaje que generalice al aritmético, para a continuación definir el concepto de expresión algebraica y de valor numérico de una expresión. Seguiremos con el concepto de monomio y con las operaciones de monomios, seguiremos con la diferencia entre identidad y ecuación, ecuaciones equivalentes y terminaremos con resolución de problemas.

La metodología de trabajo que se propone es el trabajo cooperativo, ya sea en grupo o por parejas. La estructura simple utilizada es la de cabezas numeradas. En las referencias bibliográficas hay varios enlaces a material sobre trabajo cooperativo. Para la evaluación de los contenidos hay en el texto varias fichas.

Lenguaje numérico y lenguaje algebraico.

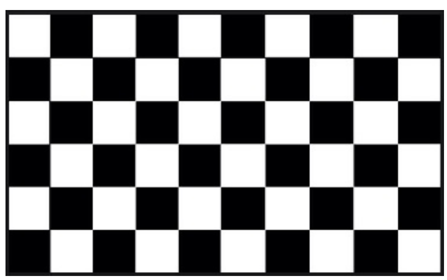
Cuando necesitamos expresar relaciones o información matemática mediante números decimos que estamos utilizando el ***lenguaje numérico o lenguaje aritmético.***

Estás acostumbrado a utilizarlo en muy diversas situaciones, seguro que te resultan familiares las siguientes:

EJEMPLO 1: LENGUAJE NUMÉRICO.

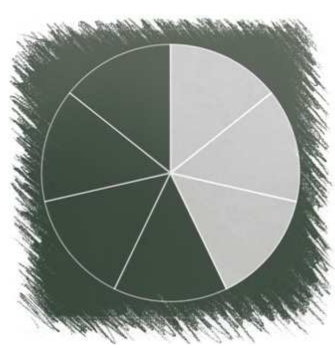
Comprueba cómo se expresan numéricamente las siguientes situaciones:

- Ana tiene cuatro € y su abuela le da dos billetes de diez. $4 + 2 \cdot 10$
- La edad de Pedro es la mitad que la de su hermana María que tiene diez años. $\frac{10}{2}$
- ¿Cuántas baldosas hay en el suelo de la habitación?



$6 \cdot 10 = 60$

- ¿Cuánta tarta te has comido?



$\frac{3}{7}$

- El doble de ocho $2 \cdot 8$
- El cuadrado de cinco, más tres $5^2 + 3$ ☺

Para expresar todas estas situaciones has utilizado números y operaciones que ya conoces.

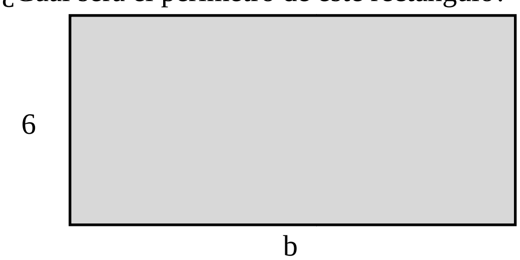
Sin embargo en muchas ocasiones no puedes utilizar sólo números, bien porque la relación que quieras expresar sea más general o bien porque no conozcas todos los datos. En estos casos se utilizan letras para expresar cantidades indeterminadas o que no se conocen.

Cuando necesitamos expresar relaciones o información matemática mediante números y letras decimos que estamos utilizando el ***lenguaje algebraico.***

EJEMPLO 2: LENGUAJE ALGEBRAICO.

Comprueba cómo se expresan algebraicamente las siguientes situaciones.

- Ana tiene una hucha donde guarda **sus ahorros**. Su abuela le da dos billetes de diez euros y Ana los echa en su hucha. ¿Qué dinero tiene ahorrado Ana? $a + 2 \cdot 10$
- La edad de Pedro es la mitad que la **edad de su hermana María**. $\frac{x}{2}$
- ¿Cuál será el perímetro de este rectángulo?



Perímetro:

6+6+b+b =

2·6+2·b =

12+2·b

- El doble de **un número**. $2 \cdot x$
- El cuadrado de **un número**, más ocho. $x^2 + 8$

Como has podido comprobar, en cada enunciado tienes en negrita el significado de la letra que se ha utilizado. ☺

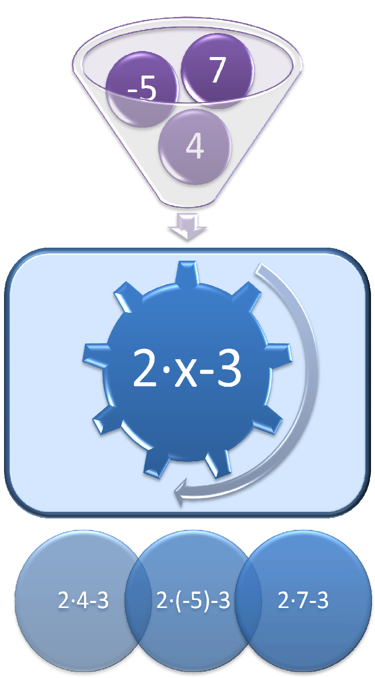


Ilustración 1

Otra forma de ver una expresión algebraica es como si fuera una máquina de operación fija, es decir, una máquina de calcular, que siempre hace las mismas operaciones, para cada número que le introduzcas.

En la ilustración 1 tienes un ejemplo de esta similitud. Si te fijas cuando introducimos el número *4*, la máquina devuelve la operación *2·4-3*. Igualmente, si introducimos los números -5 y 7 la máquina nos devuelve *2·(-5)-3 y 2·7-3* respectivamente.

4 → *2·4 - 3*

-5 → *2·(-5) - 3*

7 → *2·7 - 3*

De esta forma si introducimos un número cualquiera realizará las mismas operaciones.

x → *2·x - 3*

En consecuencia, el corazón de nuestra máquina es la expresión algebraica *2·x -3*.

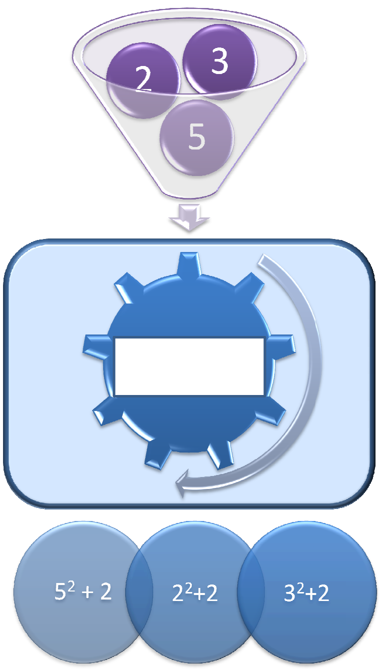
Si te sirve de ayuda, para detectar que parte de la expresión debes sustituir por la letra *x*, puedes tachar o rodear los números que se repiten en las distintas operaciones, lo que queda sin tachar o rodear es lo que debes sustituir por *x*.

$$
\begin{array}{lll}
4 & \rightarrow & \cancel{2}\cdot 4 - \cancel{3} \\
-5 & \rightarrow & \cancel{2}\cdot(-5) - \cancel{3} \qquad \Rightarrow 2\cdot x - 3 \\
7 & \rightarrow & \cancel{2}\cdot 7 - \cancel{3}
\end{array}
$$

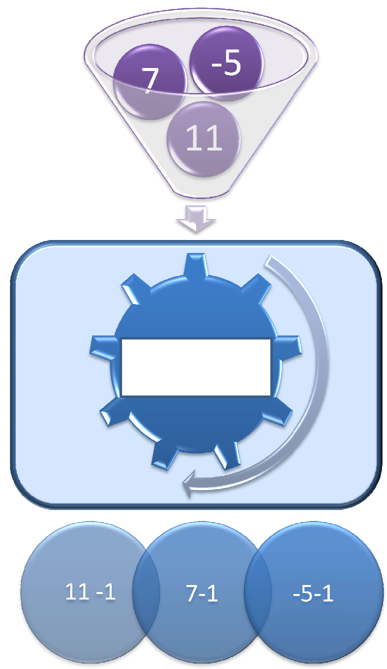
ACTIVIDAD 1: ENCUENTRA LA EXPRESIÓN ALGEBRAICA.

En esta actividad tienes varias máquinas de operación fija, averigua la expresión algebraica que representa cada una de ellas.

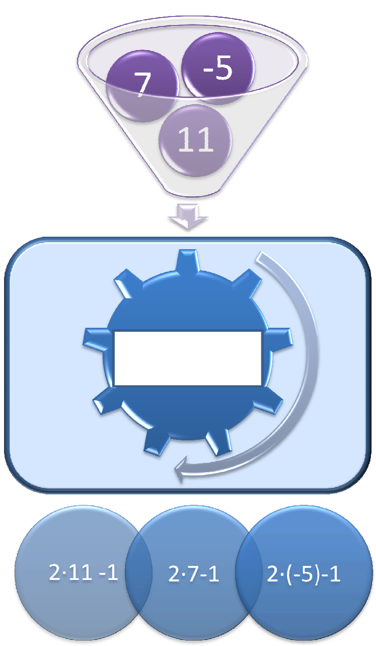
a)



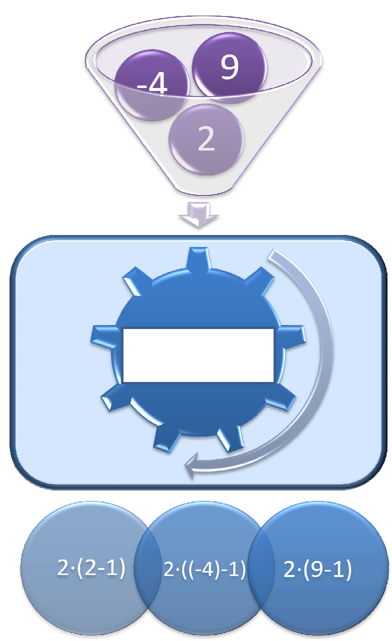
b)



c)



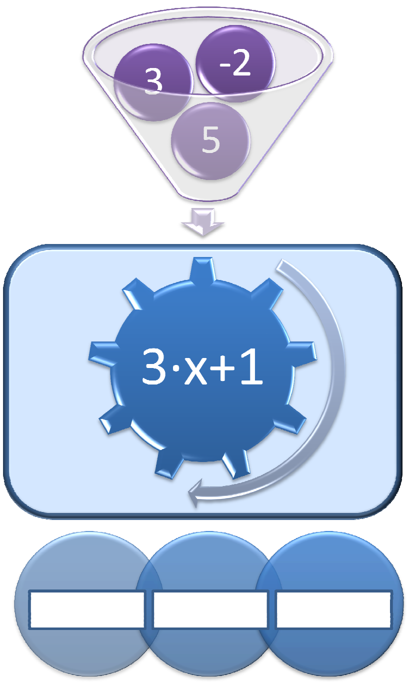
d)



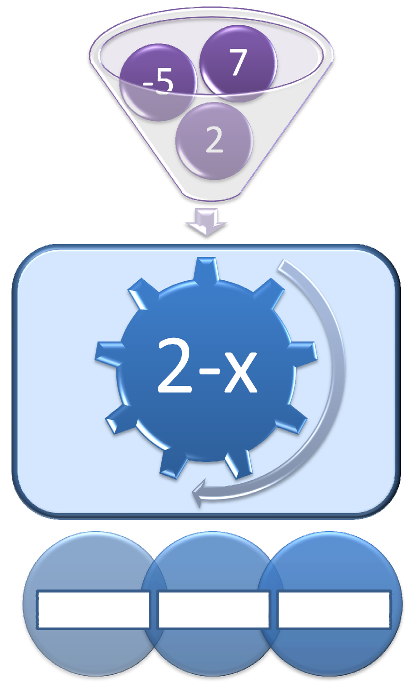
ACTIVIDAD 2: PON LA MÁQUINA A FUNCIONAR.

En esta actividad tienes varias máquinas de operación fija, escribe en los huecos destinados a ello la correspondiente expresión numérica que resulta de cambiar la letra x por cada uno de los números que hay en las bolas.

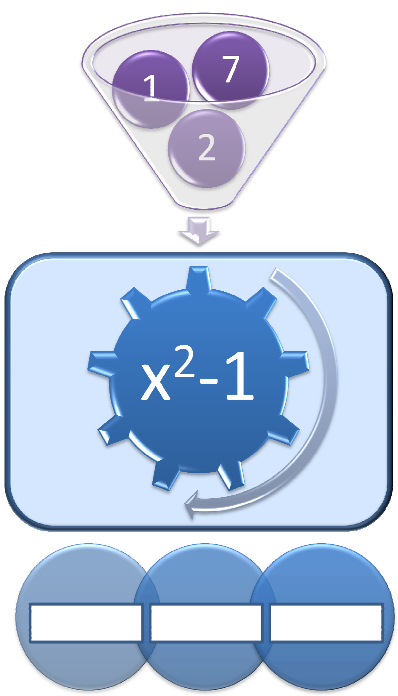
a)



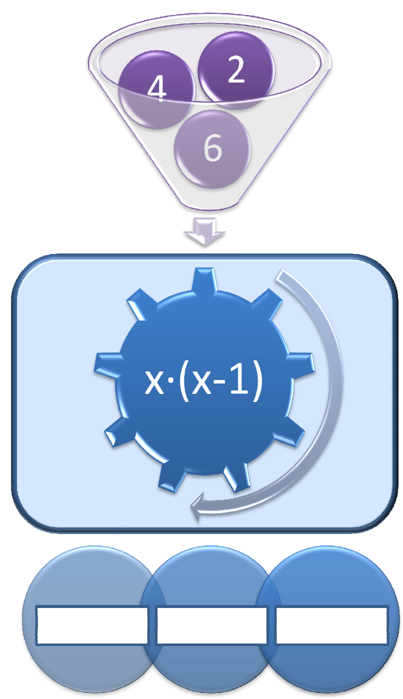
b)



c)



d)



En la actividad anterior has estado construyendo expresiones numéricas a partir de expresiones algebraicas, pero no te has dedicado a obtener el resultado de las operaciones que en ellas se indican.

*Cuando al sustituir en una expresión algebraica las letras por los valores correspondientes y realizar las operaciones que resultan decimos que estamos calculando el **valor numérico** de una expresión algebraica.*

EJEMPLO 3: VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA.

Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores que se indican en cada una de ellas

a) *$3 \cdot x-2$, para $x=4$, $x=2$ y $x=-3$.*
b) *x^2+3, para $x=5$, $x=-4$ y $x=-1$*

Solución:

a)

$$\left.\begin{matrix} 3\cdot x-2 \\ x=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\cdot 4-2=12-2=10$$

$$\left.\begin{matrix} 3\cdot x-2 \\ x=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\cdot 2-2=6-2=4$$

$$\left.\begin{matrix} 3\cdot x-2 \\ x=-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\cdot(-3)-2=-9-2=-11$$

b)

$$\left.\begin{matrix} x^2+3 \\ x=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5^2+3=25+3=28$$

$$\left.\begin{matrix} x^2+3 \\ x=-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-4)^2+3=16+3=19$$

$$\left.\begin{matrix} x^2+3 \\ x=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-1)^2+3=1+3=4$$

☺

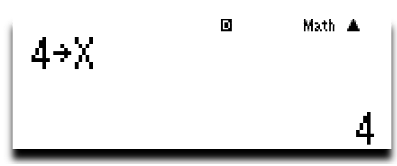
En esta actividad vamos a aprender cómo se pueden utilizar diferentes tipos de calculadoras para calcular el valor numérico de una expresión algebraica. Este hecho nos va a permitir, aparte de tener una manera de corregir rápidamente nuestros cálculos, centrarnos en el concepto de valor numérico de una expresión algebraica ya que, como veremos en el desarrollo de la actividad, sólo nos dedicaremos a asignar valores a las distintas letras, dejando los cálculos a la herramienta TIC.

ACTIVIDAD 3: UTILIZA TU CALCULADORA PARA CALCULAR EL VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA.

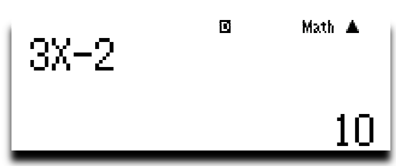
Realiza haciendo uso de tu calculadora el ejemplo.

Solución:

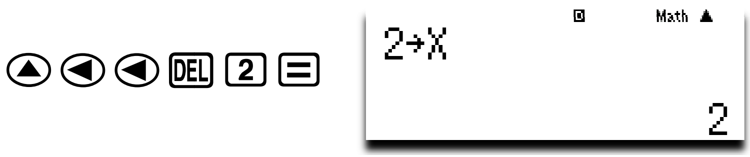
a) Vamos a comenzar con el modelo CASIO fx-82ESPLUS. En primer lugar vamos a realizar la asignación x=4.



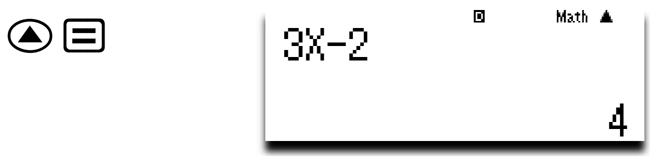
Seguidamente escribimos la expresión que vamos a evaluar. Una vez hecho, al presionar la tecla *, la calculadora nos devuelve el valor de la expresión en x=4, ya que era este el valor asignado.*



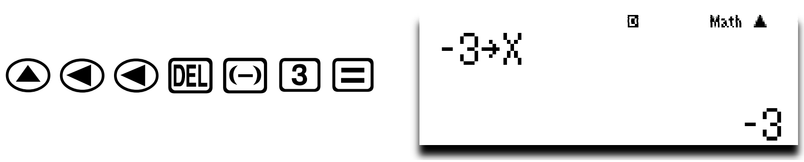
Para evaluar la expresión en los demás valores indicados sólo hay que volver a reasignar el valor de x. Para ello accedemos al historial de cálculo mediante la tecla de cursor , para editar la expresión anterior hacer la nueva asignación.

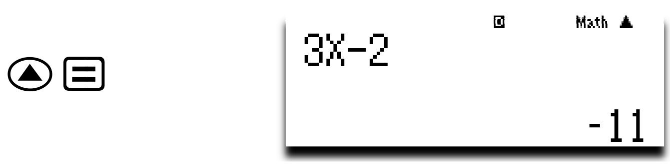


Volviendo a acceder al historial de cálculo, nos aparece en pantalla la expresión que queremos evaluar, con lo que únicamente con pulsar la tecla , tendremos la evaluación deseada.



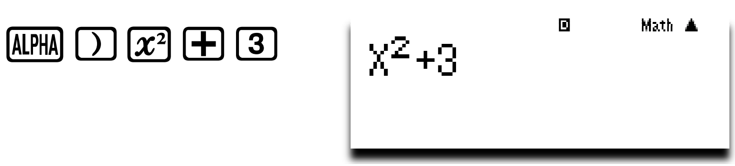
Repitiendo los dos pasos anteriores podremos reevaluar la expresión en tantos valores como deseemos



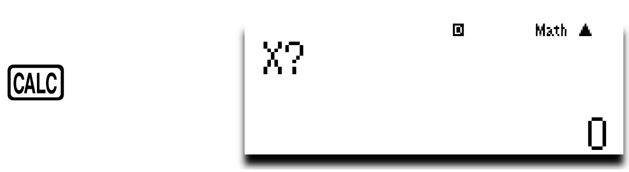


b) Si utilizamos como calculadora el modelo CASIO fx-570ES PLUS, además de cómo se ha explicado en el apartado anterior, podremos evaluar nuestra expresión utilizando el modo CALC, que permite introducir expresiones algebraicas y evaluarlas de una forma mucho más cómoda, sin utilizar el historial de cálculo, ya que es la propia calculadora la que nos solicita que introduzcamos los valores que va tomando x.

Comenzamos ahora por introducir la expresión algebraica que vamos a evaluar,

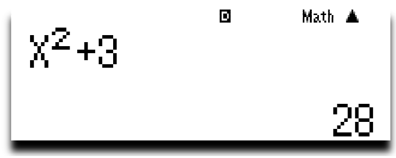


Seguidamente entramos en el modo CALC



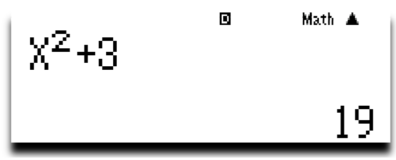
La calculadora nos informa del valor almacenado en x y nos pide el nuevo valor que queremos introducir para evaluar la expresión. Introducimos x=5

5 =

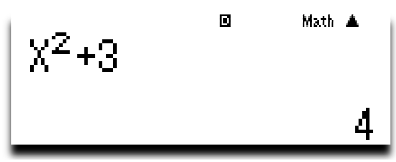


Seguimos introduciendo valores

= − 4 =



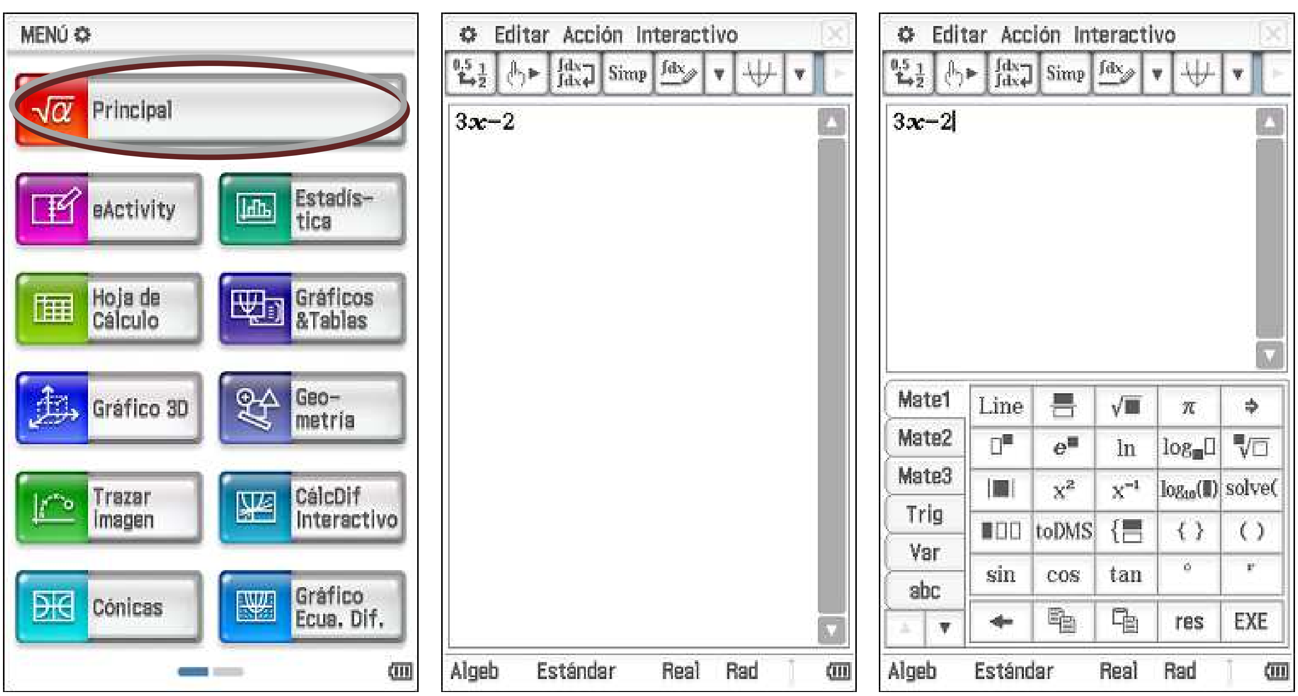
= − 1 =



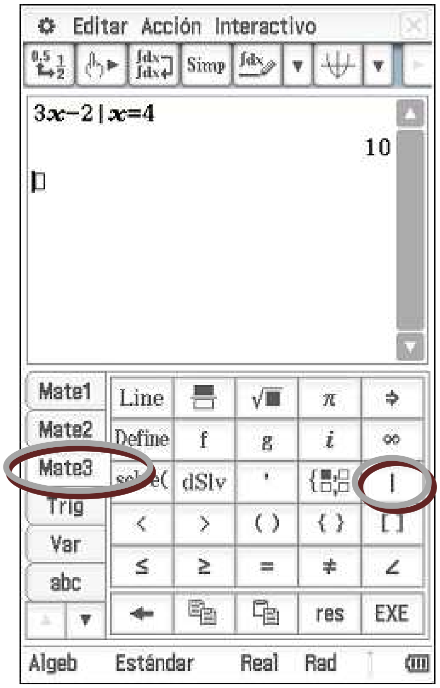
Cuando terminamos el ejercicio pulsamos la tecla AC *, para salir del modo CALC.*

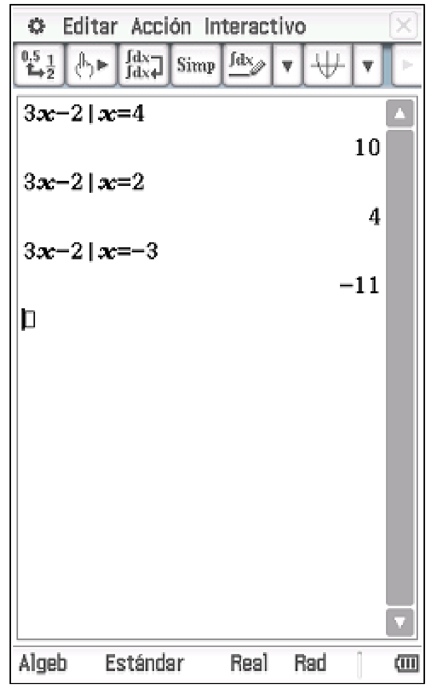
¿Qué pasa si tengo C.A.S.?

Si en lugar de calculadora científica utilizamos una calculadora C.A.S. como la CASIO fx-CP400, habría que actuar de la siguiente forma:



En primer lugar elegimos la aplicación principal. Después escribimos nuestra expresión con la ayuda del teclado de la calculadora. A continuación desplegamos el teclado en la pantalla con ayuda de la tecla Keyboard.





*En la pestaña **Mate3** nos encontramos con el operador “**with**”* $\boxed{\mid}$*, con el que podemos asignar valores a x. No es necesario volver a introducir la expresión para evaluar en otros valores, bastará con copiarla, pegarla y cambiar el valor calculado por uno nuevo.* ☺

EJERCICIO 1: EVALUA EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Evalúa las siguientes expresiones algebraicas, para los valores que se indican.

	3-4·x	*x·(4-x)*
x=2		
x=4		
x=-1		
x=-3		

Monomios. Operaciones con monomios.

Como ya has podido imaginar las expresiones algebraicas pueden llegar a ser muy complejas. La expresión algebraica más sencilla recibe el nombre de **monomio**.

*Un monomio es una expresión algebraica formada solamente por el producto de un número, al que llamaremos **coeficiente**, por una o varias letras, que forman la **parte literal** del monomio.*

*El **grado** de un monomio es la suma de los exponentes a los que se encuentran elevados cada una de las letras que forman su parte literal*

En la siguiente tabla tienes varios ejemplos de monomios distinguiendo entre coeficiente y parte literal, además aparece en la columna de la izquierda el grado de cada uno de ellos

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$6 \cdot x \cdot y$	6	$x \cdot y$	$1+1=2$
$5 \cdot x^2$	5	x^2	2
$-3 \cdot a \cdot b^3$	-3	$a \cdot b^3$	$1+3=4$
$7 \cdot x^3 \cdot y$	7	$x^3 \cdot y$	$3+1=4$

Para facilitar la escritura de los monomios no se suele incluir el signo del producto entre los números y las letras, de esta forma el monomio $7 \cdot x^3 \cdot y$ se va a escribir $7x^3y$.

*Cuando dos monomios tienen la misma parte literal se dicen que son **semejantes**.*

EJERCICIO 2: MONOMIOS SEMEJANTES.

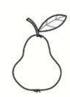
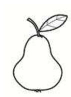
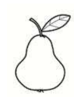
De las siguientes parejas de monomios indica cuáles son semejantes:

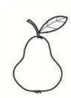
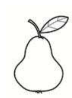
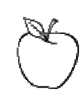
a) $2x^2$ y $3xy$ *b)* $5xy$ y $12\,xy$ *c)* $6ab$ y $-2ab$

d) $7x^2$ y $9x^2$ *e)* $12n$ y $2n^2$ *f)* $7xy^2z$ y $4xyz$

Suma y resta de monomios.

Habrás escuchado muchas veces la expresión coloquial “no se pueden sumar peras con manzanas”, para indicar que no se pueden unir cosas que son diferentes. Igualmente recordarás como cuando estabas recorriendo tus primeros pasos en el mundo de las matemáticas tenías que calcular expresiones como:

2  **+ 3**  **= 5** 

2  **+ 3**  **+ 5**  **+ 2**  **= 7**  **+ 5** 

Como resulta evidente, no estamos trabajando con peras y manzanas reales sino con imágenes que simbolizan peras y manzanas, de tal forma que sólo sumamos los sumandos que tienen imágenes iguales.

De la misma forma *para sumar o restar monomios* sólo podremos hacerlo con monomios que tengan “símbolos” iguales, es decir que tengan la misma parte literal, o lo que es lo mismo que *sean semejantes*.

EJEMPLO 3: SUMA Y RESTA DE MONOMIOS.

Opera:

a) $2x - x + 3x$ *b)* $xy+x+3xy-4x$

c) $3x-2+x+4$ *d)* $5x^2+2x^2-4x^2-2x^2$

Solución:

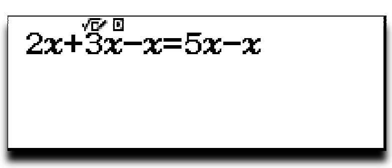
Vamos a realizar el primer apartado de esta actividad utilizando los nuevos modelos de calculadora científica CASIO fx-82 SPX y fx-570 SPX, ya que incorporan un módulo de **verificación** "*pseudocas*" que permite comprobar si una igualdad o desigualdad es cierta o falsa. El módulo de verificación no realiza el cálculo por nosotros sino que compara si los dos miembros de la igualdad valen lo mismo para el valor de la variable que tenga asignado en ese momento. Teniendo en cuenta lo anterior, podemos utilizar este módulo para comprobar si nuestras operaciones son correctas o no. Esta función de verificación ya está presente en el modelo Casio fx-CP400, implantada como comparador CAS de expresiones y por ello el segundo apartado lo realizaremos utilizando la ventana de verificación de este modelo de calculadora.

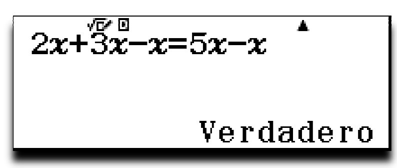
a) $2x + 3x - x = 5x - x = 4x$

Vamos a comprobar si es cierto nuestro desarrollo. Para ello utilizaremos la CASIO fx-570 SPX.

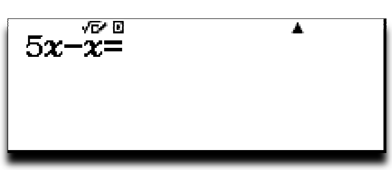
*Para ello lo primero que vamos a hacer es abrir la pantalla de verificación, para ello, una vez activado el menú, con las teclas de cursor seleccionamos **Verificar**.*

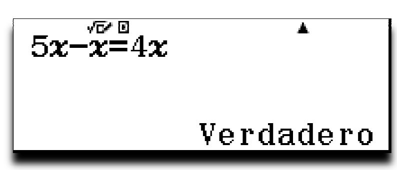
Una vez dentro escribimos la expresión que queremos comprobar si es verdadera o no, si tocamos la tecla la calculadora nos devolverá el mensaje correspondiente en función de si es cierta o no la igualdad planteada,





Seguidamente, si queremos continuar comprobando nuestro razonamiento, volvemos a tocar la tecla , la calculadora se quedará a la espera de que introduzcamos la siguiente expresión que queramos comprobar.

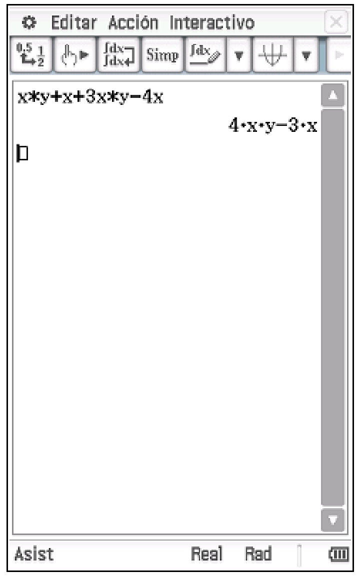


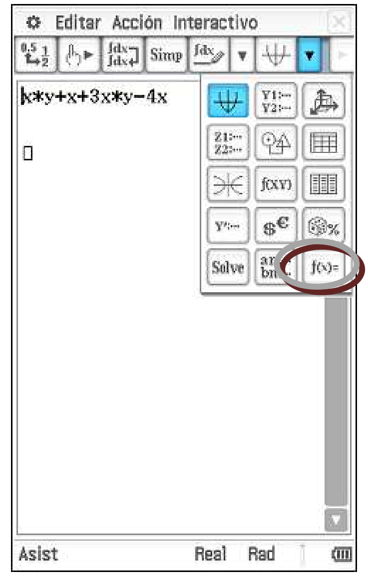


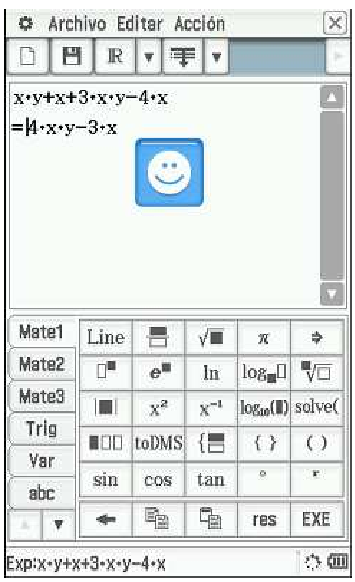
De igual forma se pueden comprobar nuestra solución para cualquiera de los ejercicios propuestos en los otros tres apartados:

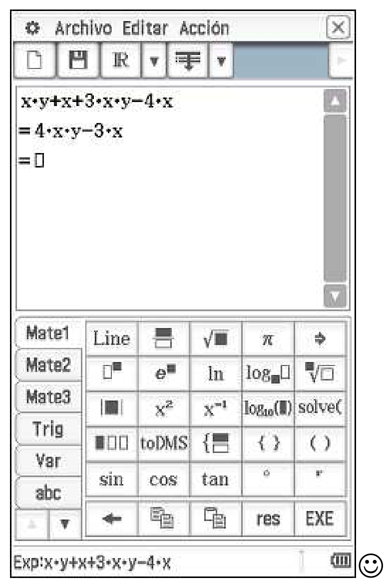
b) $xy+x+3xy-4x = 4xy-3x$

La aplicación Principal es el módulo de cálculo numérico y matemático de la CP400, en el se pueden realizar desde operaciones básicas hasta cálculos algebraicos simbólicos complejos, ya que esta calculadora incluye CAS (Computer Algebra System).También se puede acceder a la ventana de verificación donde podemos *comprobar si nuestros cálculos son correctos o no, ya que se puede comprobar si dos expresiones son equivalentes o no, tal y como se muestra en la siguiente secuencia de imágenes.*





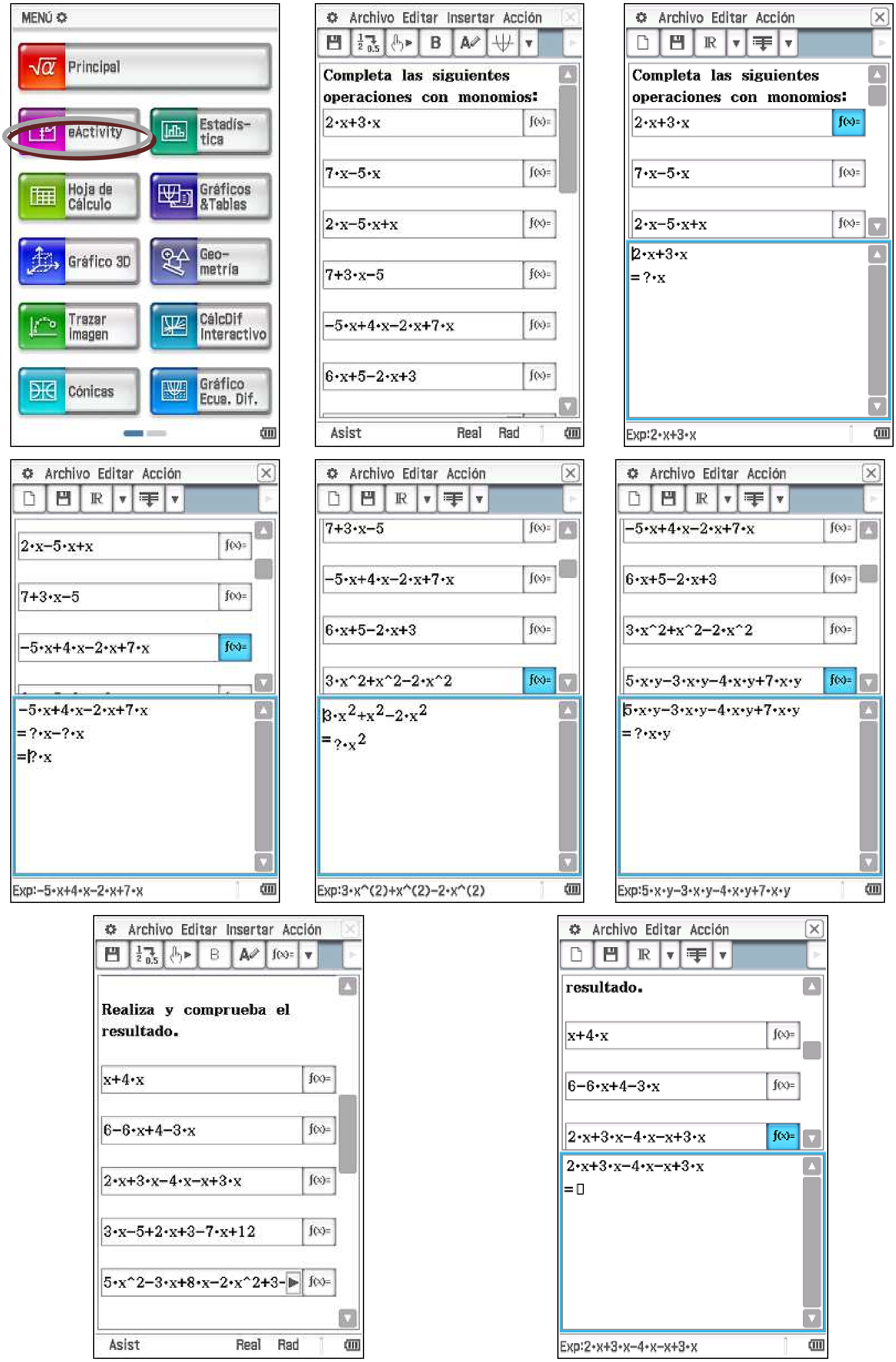




Aunque en la actividad anterior hemos empezado a utilizar calculadoras para que nuestros alumnos comprueben sus operaciones con monomios, emplear las calculadoras sólo para eso sería no aprovechar todo su potencial. En la siguiente actividad vamos a trabajar la suma y resta de monomios de una forma más dirigida, mediante ejercicios del tipo "completa". Para ello vamos a utilizar una eActivity (actividad interactiva) de la CP 400 que nos va a permitir trabajar de forma autónoma y reiterada la suma y resta de monomios.

ACTIVIDAD 4: SUMA Y RESTA DE MONOMIOS CON CAS.

Abre el archivo operamon *y cambia los signos* **?** *que te encuentres por el valor que corresponda hasta que resuelvas correctamente el ejercicio. En la parte final de la actividad te encontrarás con ejercicios propuestos para que los resuelvas sin ningún tipo de indicación previa. Copia en tu cuaderno tanto el ejercicio propuesto como los cálculos que has realizado hasta completarlo correctamente para que puedas repasar en casa.*


MENÚ
Principal
eActivity
Estadís-tica
Hoja de Cálculo
Gráficos &Tables
Gráfico 3D
Geo-metría
Trazar imagen
CálcDif Interactivo
Cónicas
Gráfico Ecua. Dif.
Archivo Editar Insertar Acción
Completa las siguientes operaciones con monomios:
2·x+3·x
7·x−5·x
2·x−5·x+x
7+3·x−5
−5·x+4·x−2·x+7·x
6·x+5−2·x+3
Asist Real Rad
Archivo Editar Acción
2·x+3·x
=?·x
Exp:2·x+3·x
−5·x+4·x−2·x+7·x
=?·x−?·x
=?·x
Exp:−5·x+4·x−2·x+7·x
3·x^2+x^2−2·x^2
=?·x2
Exp:3·x^(2)+x^(2)−2·x^(2)
5·x·y−3·x·y−4·x·y+7·x·y
=?·x·y
Exp:5·x·y−3·x·y−4·x·y+7·x·y
Realiza y comprueba el resultado.
x+4·x
6−6·x+4−3·x
2·x+3·x−4·x−x+3·x
3·x−5+2·x+3−7·x+12
5·x^2−3·x+8·x−2·x^2+3−
2·x+3·x−4·x−x+3·x
=
Exp:2·x+3·x−4·x−x+3·x

En estas imágenes has podido apreciar como son los ejercicios propuestos en la actividad.☺

Otras operaciones con monomios.

Vamos a completar esta sección dedicada a operaciones con monomios con la multiplicación y la división de un monomio por un número.

*Para **multiplicar** o **dividir** un monomio por un número se multiplica o divide el coeficiente del monomio por dicho número quedando la parte literal del monomio sin cambio alguno.*

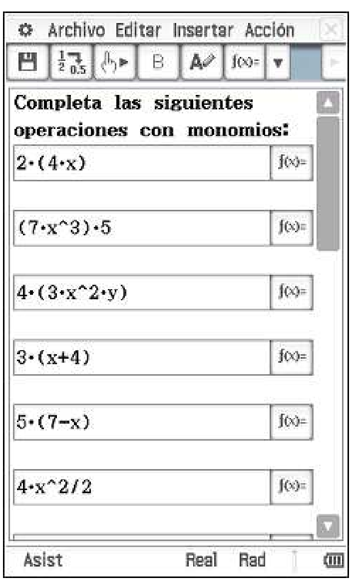
Por ejemplo:

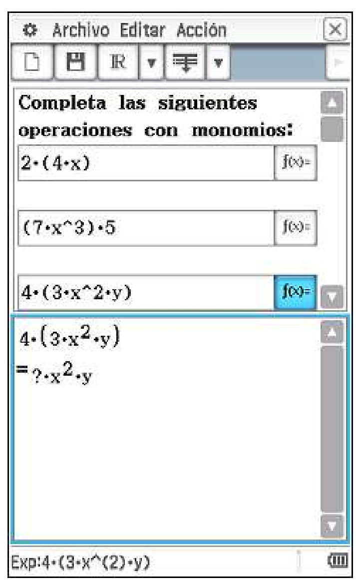
- $5(3xy) = (5 \cdot 3) \cdot xy = 15xy$
- $\frac{12x^2}{6} = \frac{12}{6}x^2 = 2x^2$

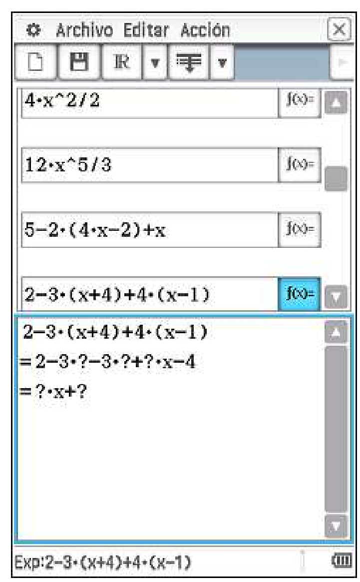
Al igual que ocurría en la actividad 4, en la siguiente actividad utilizaremos una eActivity donde, utilizando la ventana de comprobación de la CP400, podremos trabajar distintos tipos de ejercicios sobre las operaciones que acabamos de definir.

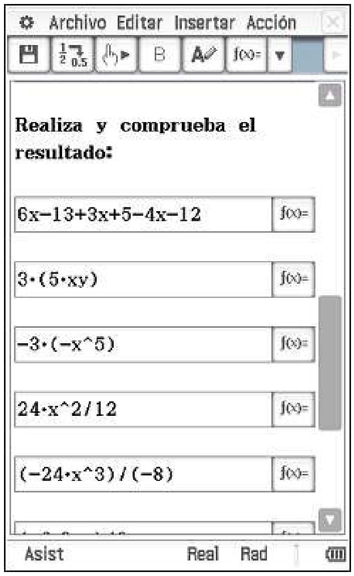
ACTIVIDAD 5: PRODUCTO Y DIVISIÓN DE UN MONOMIO POR UN NÚMERO CON CAS.

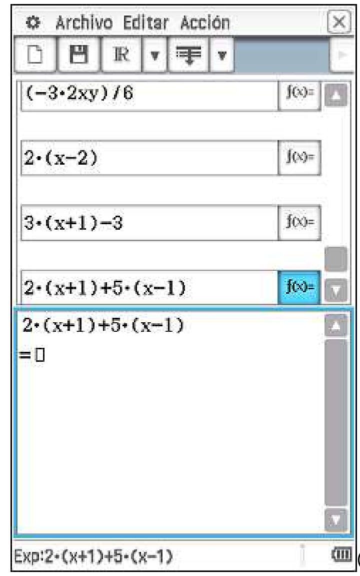
Abre el fichero operamon1 y realiza los ejercicios que en él se proponen. Copia en tu cuaderno tanto el ejercicio propuesto como los cálculos que has realizado hasta completarlo correctamente.











☺

Igualdad, identidad y ecuación

Igualdad numérica e igualdad algebraica.

Cuando escribimos dos expresiones matemáticas separadas por un signo de igualdad (=) decimos que hemos escrito una ***igualdad****.*

Si en la igualdad sólo están presentes números y operaciones decimos que se trata de una **igualdad numérica**, por ejemplo:

$$2\cdot(4+5) = 2\cdot4+2\cdot5$$

Si además de números y operaciones aparece alguna expresión literal decimos que se trata entonces de una **igualdad algebraica**, por ejemplo:

$$4x=3x+x$$

ó

$$2\cdot(x+1)=2.$$

En las igualdades numéricas podemos distinguir entre las que son *verdaderas*, como por ejemplo:

$$23+1=10+14$$

o las que son *falsas*, como por ejemplo:

$$4+7=9$$

en cuyo caso se utiliza el símbolo distinto *(≠)*

$$4+7\neq9.$$

Sin embargo, cuando se trata de una expresión algebraica, diremos que una igualdad es una **identidad** si dicha igualdad es cierta para cualquier valor por el que sustituyamos las letras. Por ejemplo:

$$4x=3x+x$$

$$3\cdot(2+x)=6+3\cdot x$$

En caso contrario, cuando hay algunos valores de las letras que para los que la igualdad no es cierta diremos que se trata de una **ecuación**. Por ejemplo:

$$2x-2=6$$

$$6x=12$$

Aunque acabamos de decir que para que una igualdad sea una identidad es necesario que sea cierta para todos los valores que podamos darle a las letras que en ella aparecen, en la práctica sólo será necesario comprobar lo que ocurre con algunos valores solamente.

EJEMPLO 4: DISTINGUIENDO ENTRE IDENTIDAD Y ECUACIÓN.

- *$4x=3x+x$ es una identidad. Sólo tendremos que comprobarlo con algunos valores de x:*

$$x=2,\ 4\cdot 2 = 3\cdot 2 + 2 \Rightarrow 8 = 6 + 2 \Rightarrow 8 = 8$$

$$x=4;\ 4\cdot 4 = 3\cdot 4 + 4 \Rightarrow 16 = 12 + 4 \Rightarrow 16 = 16$$

Puedes seguir probando con diferentes valores de x y comprobarás que la igualdad es cierta para todos ellos.

- *$5x+3=23$ es una ecuación, ya que aunque es cierta para $x=4$*

$$5\cdot 4+3=23 \Rightarrow 20 + 3 = 23 \Rightarrow 23 = 23$$

no es cierta para otros muchos valores, nosotros vamos a probar con x=2, pero tú puedes hacerlo con otro valor cualquiera

$$¿5\cdot 2+3=23? \Rightarrow ¿10 + 3 = 23? \Rightarrow 13 \neq 23$$

Antes de continuar con la siguiente actividad vamos a definir los **elementos de una ecuación**, para utilizar a partir de ahora las siguientes palabras:

*Los **miembros** de una ecuación son las expresiones matemáticas que hay a cada lado del símbolo =.*

$5x+3=23$ es una ecuación y su *primer miembro* o *miembro de la izquierda* es *$5x+3$* y su *segundo miembro* o *miembro de la derecha* es *23*

*Los **términos** de una ecuación son cada uno de los sumandos que forman los miembros.*

Los términos de $5x+3=23$ son $5x$, *3* y *23*.

*Las **incógnitas** de una ecuación son las letras que aparecen en sus términos.*

La incógnita de la ecuación $5x+3=23$ es x.

Si un valor numérico de una incógnita de una ecuación hace cierta la igualdad diremos que es una ***solución*** *de la ecuación.*

El ***grado*** *de una ecuación es el mayor grado de todos sus términos.*

La solución de la ecuación $5x+3=23$ es $x=4$, esta ecuación es de una incógnita y primer grado.

En la siguiente actividad vamos a utilizar distintos modelos de calculadora científica para aprender a diferenciar entre identidad y ecuación.

ACTIVIDAD 6: IDENTIDAD O ECUACIÓN.

Comprueba si las siguientes igualdades son ecuaciones o identidades

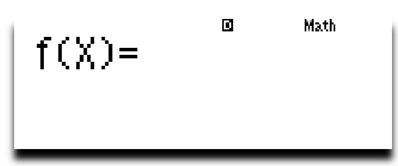
a) $-4+2x=-3x+1$

b) $2x+7-3=5x-3x+4$

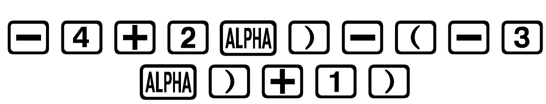
c) $12x-6x^2=6\cdot x\cdot(2-x)$

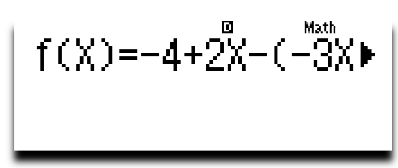
Solución:

a) Para realizar este apartado utilizaremos el modelo actividad podemos utilizar el modelo CASIO fx-82ES PLUS o el fx-570ES PLUS. La estrategia que vamos a seguir es la siguiente, para que la igualdad sea identidad tiene que darse que los resultados de los dos miembros de la igualdad, para un valor de la incógnita, deben ser el mismo, en consecuencia si al primer miembro le restamos el segundo y hacemos una tabla de valores, tendría que ser todos cero para que fuese una identidad, y bastaría con que uno sólo fuese distinto de cero para estuviésemos ante una ecuación.

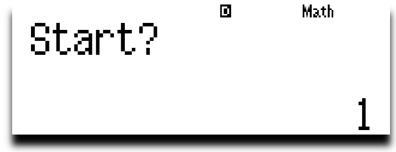


Entramos al modo tabla.

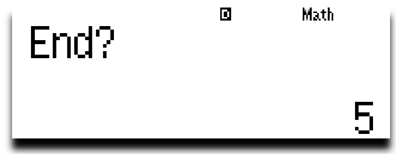




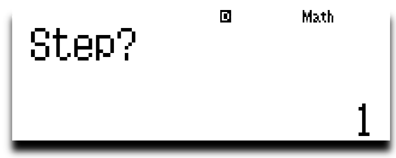
Introducimos la expresión que vamos a evaluar, en este caso $-4+2x-(-3x+1)$.



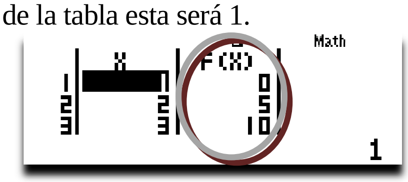
Podemos introducir el valor de inicio de nuestra tabla de valores.



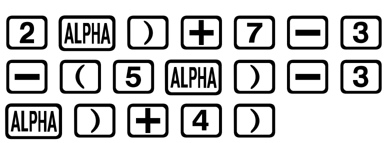
Podemos introducir el valor final de nuestra tabla de valores.

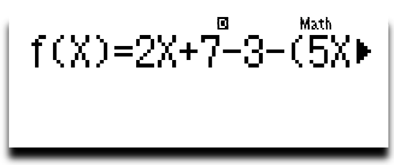


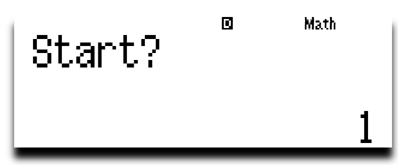
Si no modificamos la distancia entre dos valores consecutivos de la tabla esta será 1.

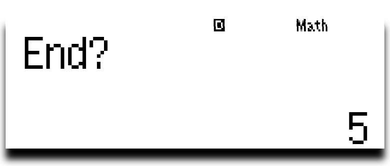


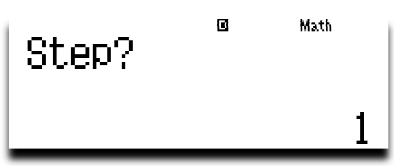
b) Podemos observar como en la columna F(x) hay valores que no son cero, en consecuencia la expresión -4+2x=-3x+1 es una ecuación, ya que si observas la tabla que se obtiene al final de la secuencia de imágenes siguiente todos los valores de la columna F(x) son cero.

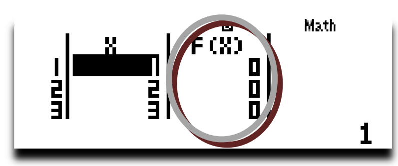




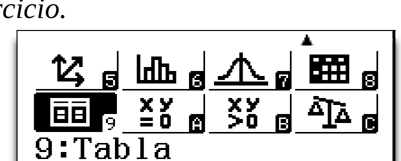


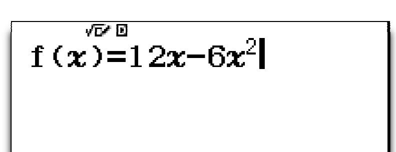


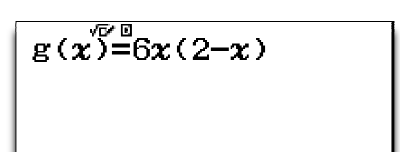


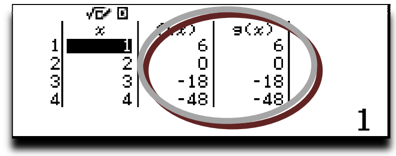


c) Por último, si utilizamos CASIO fx-82 SPX o fx-570 SPX ganaremos en simplicidad a la hora de realizar la actividad, porque permiten construir dos tablas de valores de forma simultánea y este hecho nos facilitará la laboral no tener que realizar la diferencia de términos previa y poder escribir cada término como aparece. Al final compararemos las dos columnas de valores obtenidos para poder concluir el ejercicio.









☺

Resolución de ecuaciones.

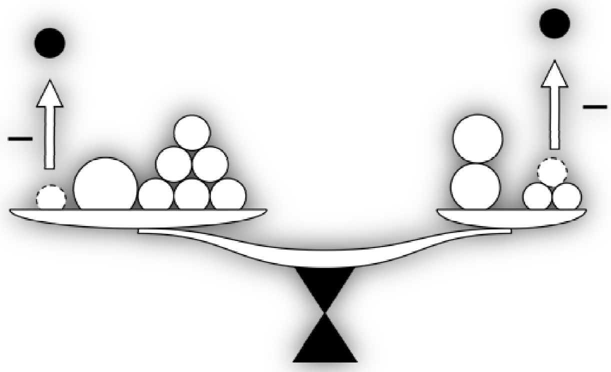
Los matemáticos somos gente curiosa, nos gusta investigar hasta averiguar cualquier misterio que se cruce delante nuestra, y ahora tenemos uno. Ya hemos clasificado las igualdades algebraicas en identidades y ecuaciones, hemos visto lo fácil que es averiguar cuando una igualdad algebraica es una identidad o una ecuación y sabemos que lo más fácil al evaluar una ecuación en un valor de la incógnita es que no se cumpla la igualdad, pero ahora se nos plantea un problema mucho más difícil: encontrar los valores de la incógnita que hacen cierta una ecuación, es decir sus soluciones. Sólo vamos a trabajar con ecuaciones de primer grado y una sola incógnita.

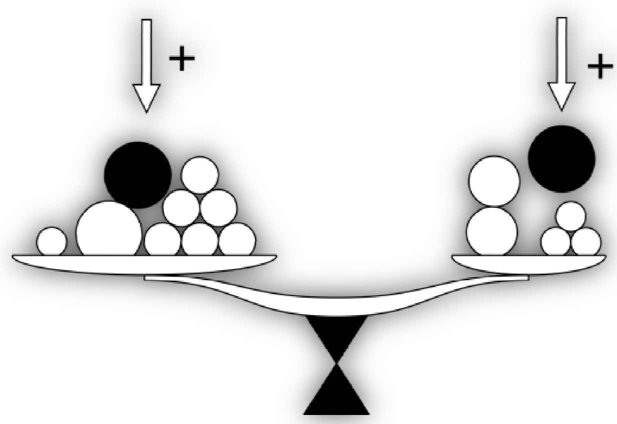
***Resolver** una ecuación es encontrar sus soluciones.*

Para resolver este problema no debemos actuar a la ligera y empezar a evaluar la ecuación en muchos valores, sería como “encontrar una aguja en un pajar”. Debemos seguir una técnica que nos va a permitir transformar nuestra ecuación en otra más sencilla pero que va a tener la misma solución.

*Dos ecuaciones que tienen la misma solución se dicen **equivalentes**.*

Esa técnica recibe el nombre de **transposición de términos** y funciona igual que una balanza





Si te fijas en las imágenes te darás cuenta que para que la balanza siga en equilibrio es imprescindible que lo que se haga en uno de sus brazos se haga en el otro: si se quita una bolita en un platillo hay que quitar otra bolita en el otro platillo y si se añade una bola en un lado hay que añadir lo mismo en el otro.

En realidad las balanzas funcionan como dos hermanos celosos que quieren ser uno igual que el otro a toda costa. Los dos tienen la misma cantidad de dinero, así si uno recibe 10€ el otro tiene que tener también 10€ para seguir teniendo lo mismo, si uno consigue triplicar su fortuna el otro tiene que triplicarla también y si uno se gasta la mitad del dinero el otro también se gasta la mitad de lo que tiene para seguir lo mismo que su hermano.

La transposición de términos, aunque funcione de la misma forma, no es tan caprichosa, pues su objetivo es llegar a tener la incógnita de la ecuación despejada, es decir, igualada a un número que será la solución.

Vamos a resolver algunas ecuaciones sencillas.

EJEMPLO 5: RESOLUCIÓN DE ECUACIONES.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

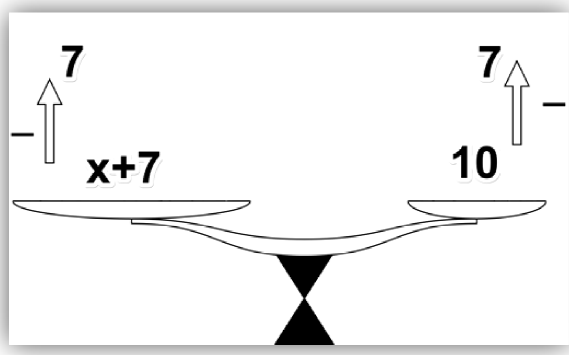
a) $x+7=10$ *b)* $x-3=5$ *c)* $2x=6$ *d)* $\frac{x}{3}=6$

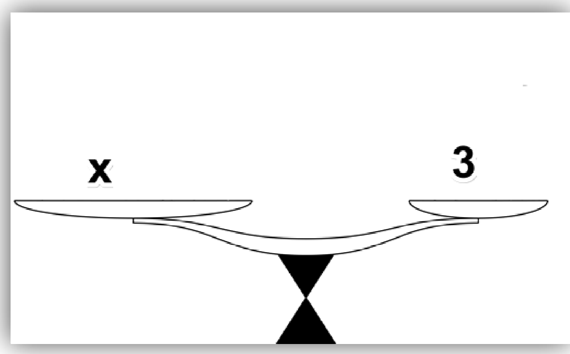
e) $2x+7=1$ *f)* $3x+5=x-2$ *g)* $4\cdot(x+2)-5=8$ *h)* $2\cdot(3-x)-8=3\cdot(x-4)-x$

Solución:

a) $x+7=10$

Recuerda que nuestro objetivo es dejar la incógnita despejada, si miras las balanzas te darás cuenta que si resto siete en los dos platillos ya tenemos la solución.





Expresado de forma matemática quedaría:

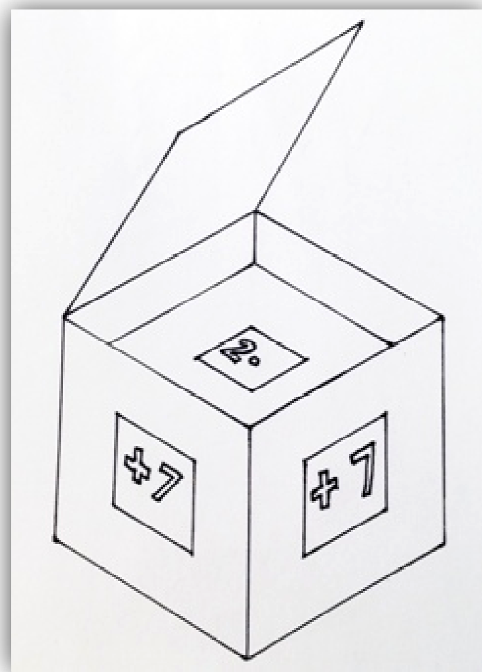
$x + 7 = 10 \Rightarrow x + 7 - 7 = 10 - 7 \Rightarrow x + \cancel{7} - \cancel{7} = 10 - 7 \Rightarrow x=3$

b) $x-3=5$

Razonando de igual forma, para que se quede la incógnita sola en el primer miembro tendríamos que sumar 3 en los dos miembros, veámoslo:

$x - 3 = 5 \Rightarrow x - 3 + 3 = 5+3 \Rightarrow x - \cancel{3} + \cancel{3} = 5 + 3 \Rightarrow x = 8$

c) $2x=6$



Fíjate en los dos apartados anteriores como para cancelar una cantidad que va sumando hemos tenido que restar y viceversa, para cancelar un número que va restando hemos tenido que sumar. Ahora resulta que nuestra ecuación nos dice que el doble de un número es igual a seis y queremos saber cuál es ese número, seguro que lo veis claro, el número es la mitad de 6, $\frac{6}{2} = 3$. *Matemáticamente*

$$2x = 6 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3$$

d) $\frac{x}{3} = 6$

$$\frac{x}{3} = 6 \Rightarrow 3 \cdot \frac{x}{3} = 3 \cdot 6 \Rightarrow \cancel{3} \cdot \frac{x}{\cancel{3}} = 3 \cdot 6 \Rightarrow x = 18$$

e) En esta ecuación nos aparecen dos operaciones que tendremos que deshacer para poder tener la incógnita despejada. Para saber en qué orden debemos deshacer esas operaciones vamos a imaginarnos que cada vez que hago una operación es como si introdujera el número con la que hago esa operación en una caja. De esta manera al hacer 2x+7, introduciríamos a la incógnita x en la caja con la etiqueta "2·" y después, esa caja pequeña en otra caja más grande con la etiqueta "+7", de forma que para sacar a x de donde se encuentra hay que abrir la caja "+7" y después la caja "2·".

Resolvamos ahora la ecuación:

$$2x + 7 = 1 \Rightarrow 2x + 7 - 7 = 1 - 7 \Rightarrow 2x + \cancel{7} - \cancel{7} = -6 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-6}{2} \Rightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{-6}{2} \Rightarrow x = -3$$

f) $3x+5=x-2$

En esta ecuación nos encontramos con el problema de tener la incógnita en los dos miembros de la ecuación, habrá que transponer todos los términos que contengan incógnita al primer miembro y todos aquellos que no contengan incógnita al segundo y luego agrupar todos los términos ya que serán semejantes.

$$3x + 5 = x - 2 \Rightarrow 3x + 5 - x = x - 2 - x \Rightarrow 3x + 5 - x = \cancel{x} - 2 - \cancel{x} \Rightarrow 4x + 5 = -2 \Rightarrow$$

$4x + 5 - 5 = -2 - 5 \quad 4x + \cancel{5} - \cancel{5} = -2 - 5 \Rightarrow 4x = -7 \Rightarrow \frac{4x}{4} = \frac{-7}{4} \Rightarrow \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{-7}{4} \Rightarrow x = \frac{-7}{4}$

g) $4\cdot(x+2)-5=8$

Poco a poco las ecuaciones se van complicando, nuestro reto en esta ecuación es tratar con los paréntesis. Para ello actuaremos como si de una operación con números se tratara, siguiendo la jerarquía de operaciones. Por otro lado ya hemos practicado como se trasponen términos de un miembro a otro, a partir de ahora vamos a simplificar nuestra forma de escribir, pasando directamente los términos de un miembro a otro teniendo en cuenta lo practicado en los apartados anteriores.

$4\cdot(x+2) - 5 = 8 \Rightarrow 4x+8-5 = 8 \Rightarrow 4x + 3 = 8 \Rightarrow 4x = 8 - 3 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

h) $2\cdot(3-x)-8=3\cdot(x-4)-x$

Por último vamos a poner en práctica todo lo aprendido en los apartados anteriores. Ten en cuenta que básicamente hay dos estrategias, la trasposición de términos y las operaciones con monomios semejantes. Teniendo en cuenta eso la resolución de la ecuación queda así:

$2\cdot(3-x) - 8 = 3\cdot(x-4) - x \Rightarrow 6 - 2x - 8 = 3x - 12 - x \Rightarrow -2 - 2x = 2x - 12 \Rightarrow -2x - 2x = -12 + 2 \Rightarrow$

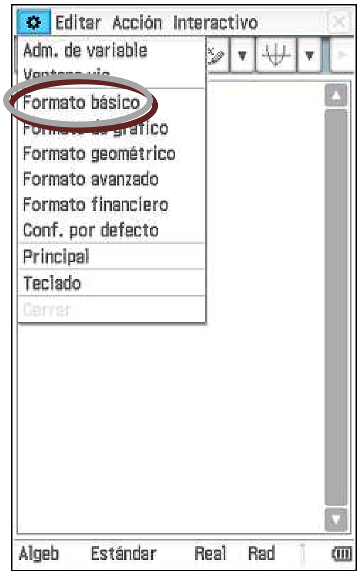
$-4x = -10 \Rightarrow x = \frac{-10}{-4} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ ☺

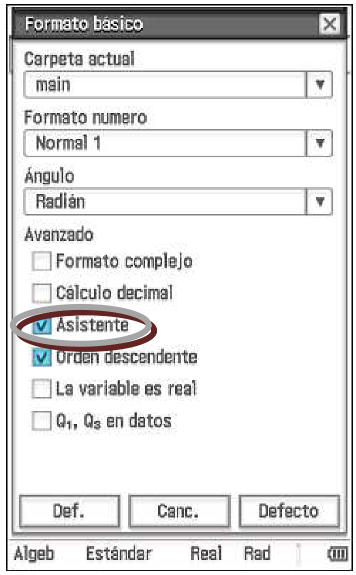
ACTIVIDAD 7: APRENDIENDO A RESOLVER ECUACIONES CON CALCULADORA CAS.

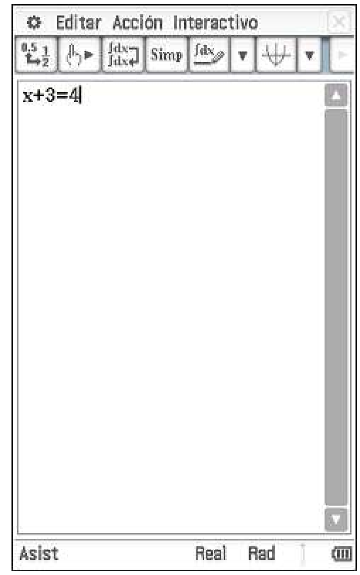
En esta actividad vamos a utilizar la potencia del CAS de la CP400, que nos va a permitir resolver paso a paso la ecuación, transponiendo términos y despejando la incógnita. De esta forma podremos comprobar nuestros desarrollos y corregir de forma autónoma nuestros errores. El trabajar de esta forma nos va a permitir reforzar las estrategias que hemos explicado en este último apartado de la unidad.

Debes copiar en tu cuaderno todos los pasos que vas realizando con cada ecuación hasta llegar a resolverla, para ello puedes utilizar una tabla parecida a esta:

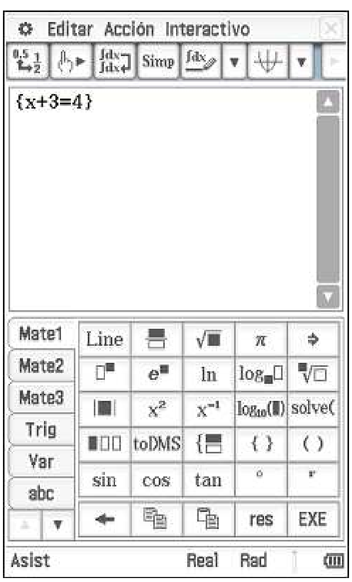
Ecuación:	*Operación a realizar*	*Desarrollo*	*Resultado*
2x-7=3	*+7*	*2x-7+7=3+7*	*2x=10*
	/2	$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$	*x=5*
Siguiente ecuación	…	…	…

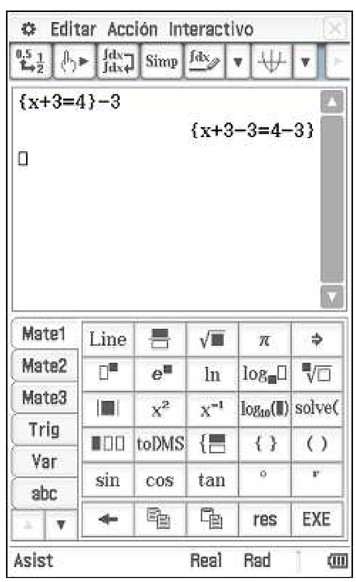


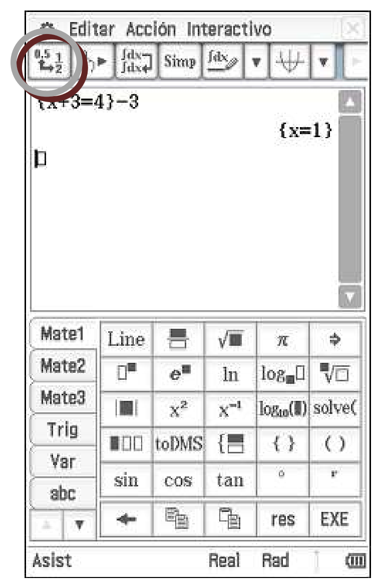




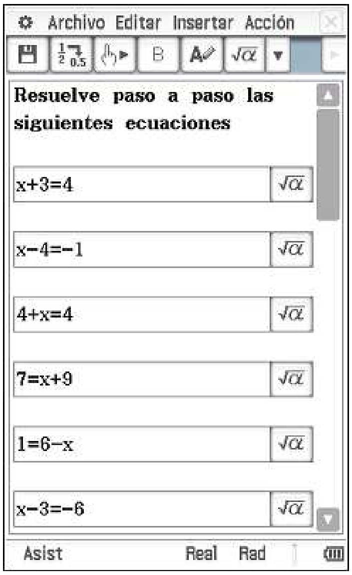
En primer lugar vamos a entrar en la configuración de la calculadora, en **Formato básico**, y activamos la casilla de verificación **Asistente**, de esta forma la calculadora, cuando realice un cálculo no lo completará de una vez, sino que realizará los cálculos intermedios y se quedará a la espera hasta que nosotros le digamos que realice el cálculo completo.

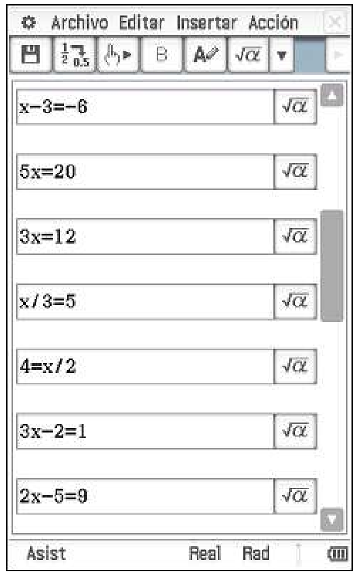


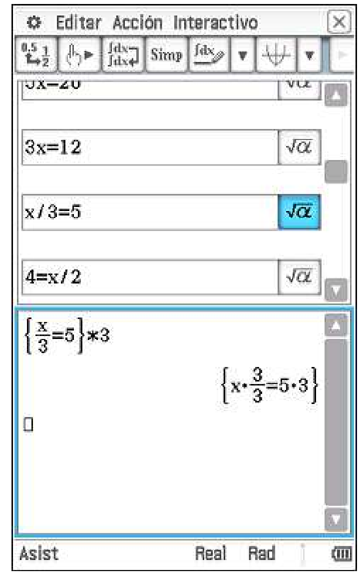




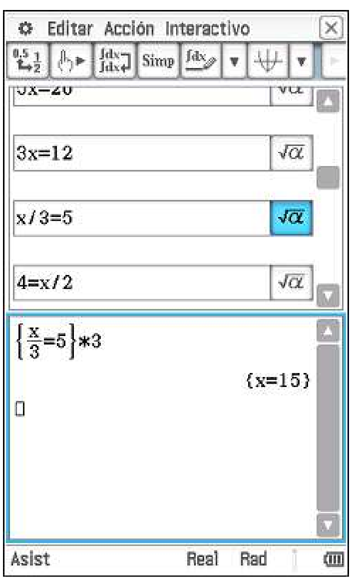
Una vez activado el asistente y escrita la ecuación en la ventana Principal, metemos entre llaves la ecuación, este hecho nos va a permitir que cuando le indiquemos a la calculadora que haga una operación, esta la realice en ambos miembros de la ecuación. Una vez comprobados o anotados los resultados de la transposición le indicamos a la calculadora que finalice el cálculo.

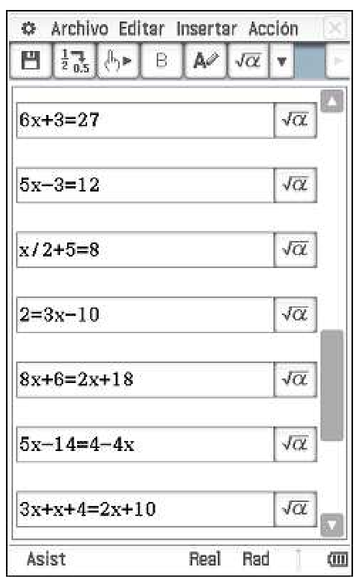


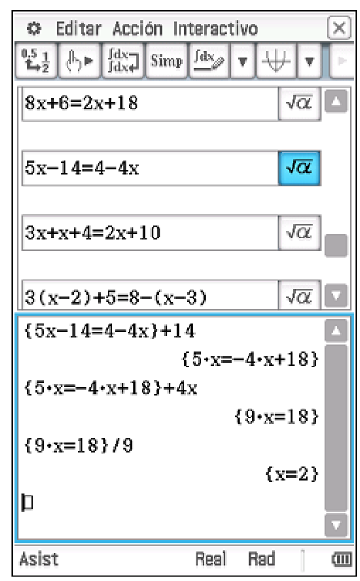




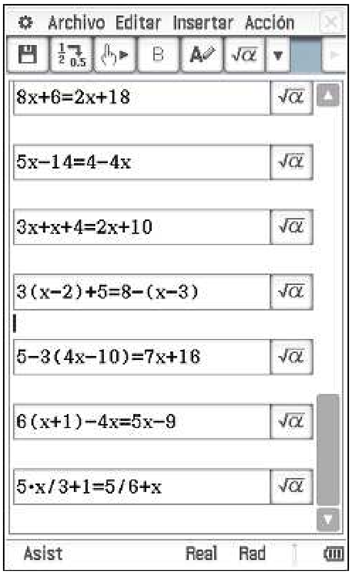
Se puede preparar una batería de ejercicios en una actividad interactiva, de forma que cada tipo de ecuación se puede trabajar repetidamente e ir ganando en complejidad progresivamente, como se puede apreciar en la secuencia de imágenes que estamos explicando.

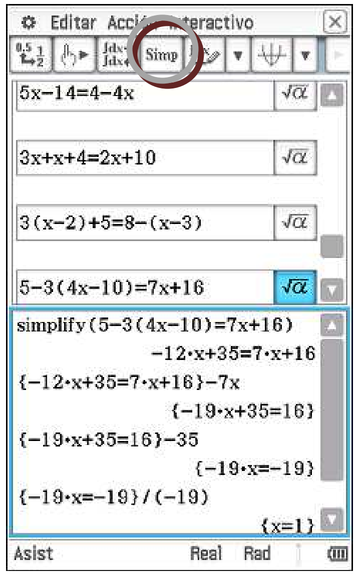


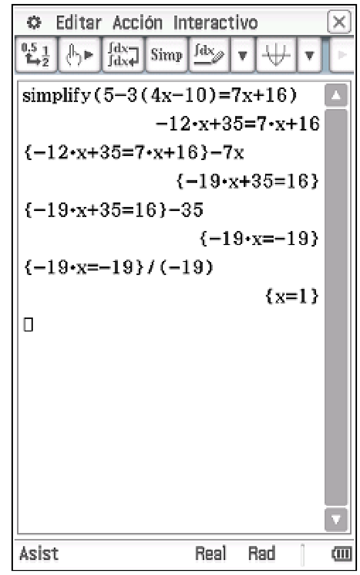




Conforme se van volviendo más complejas las ecuaciones vamos necesitando transponer más términos para resolverla.







Si necesitamos desarrollar una ecuación que contiene paréntesis podemos utilizar el comando **simplify**, mediante el botón que hay en la barra de herramientas, y continuar después con la transposición de términos.