DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS CON PAPEL

(Un camino hacia la geometría)

BREVES APUNTES HISTÓRICOS.

Papiroflexia es una palabra de origen latino que deriva de *papiro* (papel) y *flectere* (doblar) que significa doblar el papel y por extensión darle la figura de determinados seres u objetos. Por lo tanto el término define tanto el objeto resultante como la acción de doblar.

La papiroflexia u origami (término original de la disciplina) tiene una historia milenaria que se funde con la tradición y la cultura japonesa. Fue en China donde se introdujo el papel en los primeros siglos de la era cristiana y llega a Japón en el siglo VI d.C. Y con el papel hizo su aparición el origami: ¿arte? ¿ciencia? ¿entretenimiento?... podríamos decir que la papiroflexia nos permite una conexión entre el cerebro, la mano y el ojo, y de ahí su importancia en el aprendizaje de las matemáticas como estimulante del cerebro.

折紙

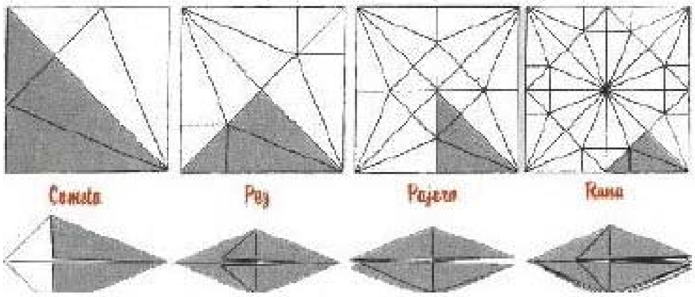
Los japoneses inventaron la papiroflexia hace más de mil años. Le dieron el nombre de Origami y la dotaron de principios estéticos ligados a su cultura.

Para la sensibilidad japonesa, el éxito de una figura de Origami depende de su estructura y proporción. Se plantean varios interrogantes ante una figura de papel ¿Llega a expresar la forma verdadera del objeto? ; en el caso de tratarse de un animal: ¿Sugiere su forma de moverse, su paso, deslizamiento o galope? Y finalmente, ¿es una mera reproducción del original o ahonda más profundamente en su carácter esencial?

Para el matemático, la belleza de la papiroflexia está en su simple geometría. En cada trozo de papel hay patrones geométricos, combinaciones de ángulos y rectas que permiten a la hoja llegar a tener variadas e interesantes formas. El matemático se pregunta: ¿consigue el diseño final una buena utilización de la geometría existente?, ¿es elegante el procedimiento de doblado, con líneas claras, dobleces compactos y proporciones sencillas y regulares? ¿se desperdicia papel o hay dobleces arbitrarios ? ¿cada paso es útil y necesario?.

Los modelos tradicionales derivan de cuatro bases fundamentales, llamando base al término que se utiliza para denominar las formas geométricas que dan lugar a gran variedad de modelos.

Los japoneses desarrollaron cuatro, conocidas como la base de la cometa, la del pez, la del pájaro y la de la rana.



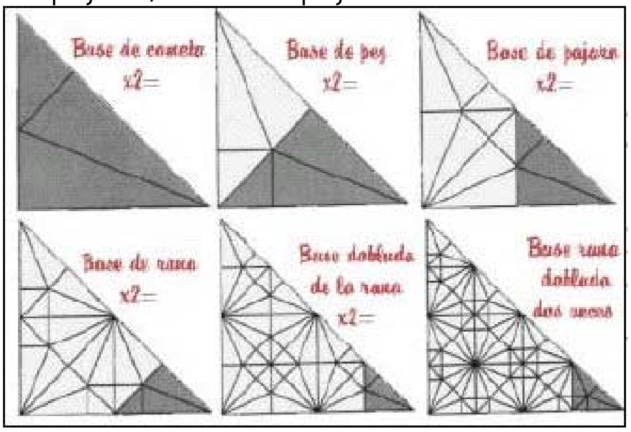
Cada base ofrece una configuración diferente de pliegues que pueden utilizarse para representar partes de un animal: cabeza, cuellos, brazos, piernas, alas, cuernos, antenas, cola. La base de cometa tiene un pliegue, la del pez dos, la del pájaro cuatro, y la de la rana cinco.

La mejor manera de entender un modelo de origami es dibujar lo que se suele llamar un patrón de doblado. Para obtener el patrón de doblado de un modelo hay que desdoblar el papel, dejarlo liso, y dibujar sus dobleces más importantes; solo los que contienen su geometría esencial, no los detalles.

El patrón de doblado es, por necesidad, una abstracción, la reducción de una forma complicada a su estructura interna.

Dibujando los patrones de doblado de las cuatro bases fundamentales descubrimos una notable progresión. La más simple, la base de la cometa, esta formada por seis triángulos, dos de un tipo y cuatro de otro. Un triángulo pequeño y dos grandes forman un modelo repetitivo. Al desdoblar el modelo, reconocemos los mismos elementos simples una y otra vez. Dos módulos forman una base de cometa; cuatro una de pez; ocho, una de pájaro; dieciséis una de rana.....

Repetir el modulo en escalas más y más pequeñas lleva de forma "fatídica" de la base de la cometa a la de pez, de la de pez a la de pájaro, de la de pájaro a la de rana.....



Pero no hay ninguna razón para detenerse en este punto. La operación para reproducir bases se convierte en un bucle de realimentación lo que nos lleva a relacionar la papiroflexia con otro campo matemático apasionante: los métodos iterativos y las teselaciones.

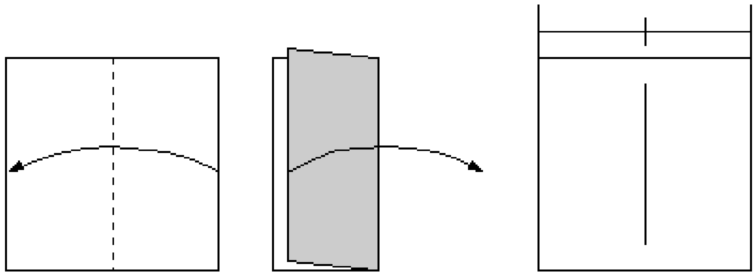
MATEMÁTICAS, PAPEL Y JUEGO.

Una manera de abordar las matemáticas desde un punto de vista lúdico es a partir de los rompecabezas muchos de los cuales son claramente "juegos matemáticos", que a través del tiempo se han popularizado y perdido ese apellido: "matemático" que asusta a un gran segmento de la población que experimenta desde los primeros pasos en su educación infantil, un rechazo, al que en ningún caso le podemos asignar un origen "genético" sino social.

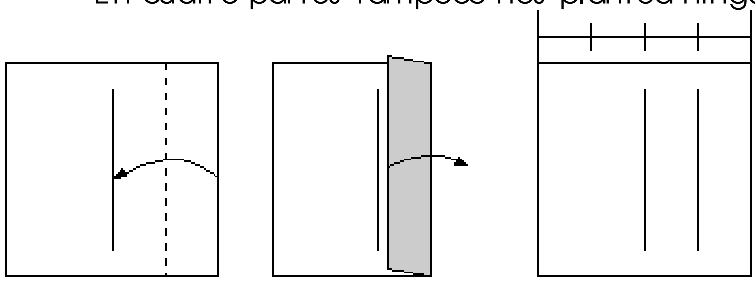
Vamos a intentar en lo que sigue dar unas técnicas para el aprendizaje de las matemáticas ayudados por la papiroflexia que nos lleven a una aceptación natural de su belleza y sean fácilmente transmisibles desde el punto de vista educativo.

DIVISIÓN DE UN CUADRADO

Dividir una hoja en dos partes es muy fácil:

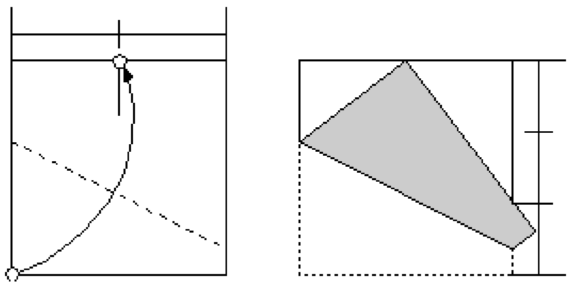


En cuatro partes tampoco nos plantea ninguna dificultad:

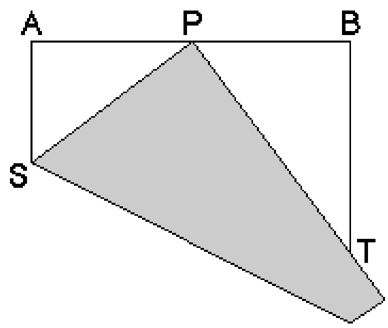


¿Cómo hacer la división en 3 partes?

Tampoco plantea mayores dificultades utilizando las técnicas de origami que nos proporciona el primer teorema de Haga:



la demostración es simple:



Si la longitud del lado es 1, AP=BP=$\frac{1}{2}$.

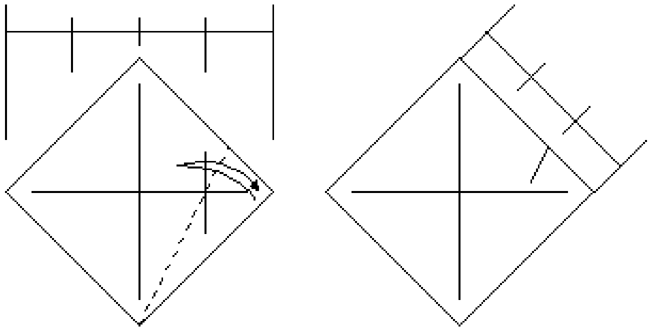
Sea AS=x, y SP=1-x. Si aplicamos el teorema de Pitagoras al triangulo ASP

$(1\text{-x})^2 = x^2 + \frac{1}{4}, \Rightarrow x = \frac{3}{8}$. Los triangulos ASP y BPT son semejantes y

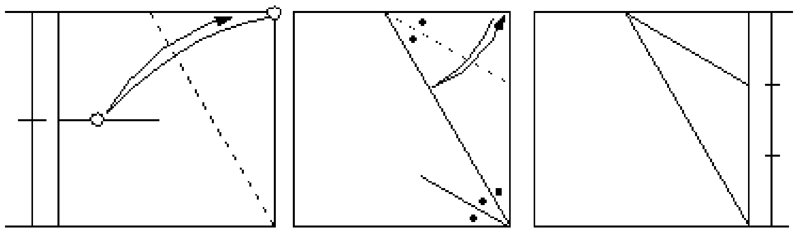
AP=BP=$\frac{1}{2}$, AS=$\frac{3}{8}$, luego BT=$\frac{2}{3}$.

Haga nos proporciona otros dos teoremas para dividir en tres partes una hoja de papel cuadrada.

Otros autores se han ocupado también de estos problemas:
Método de Fumiaki KAWAHATA



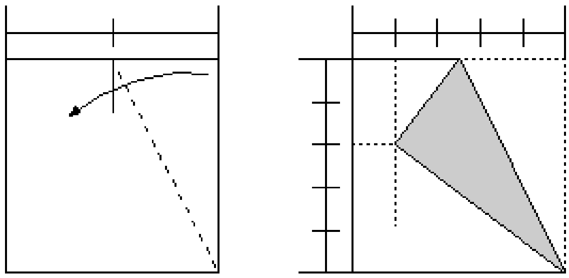
Tomoko FUSE nos enseña un Nuevo camino en su libro "Unit Origami" (1983).



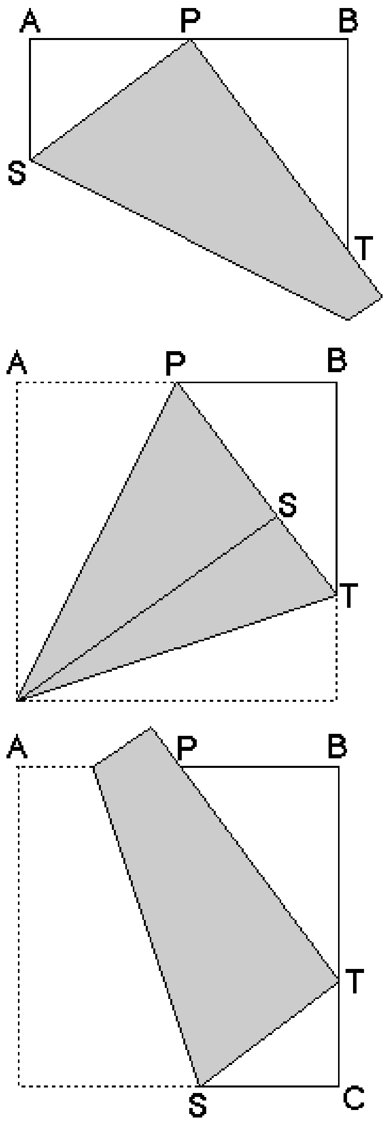
Llegados a este punto la pregunta lógica que se nos plantea es: ¿podemos dividir un papel cuadrado en 5, 7, 9,......partes iguales utilizando únicamente dobleces?

La respuesta es obvia: si.

Veamos por ejemplo la división en 5 partes:



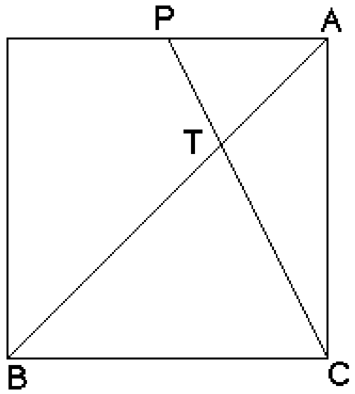
Generalización del teorema de Haga



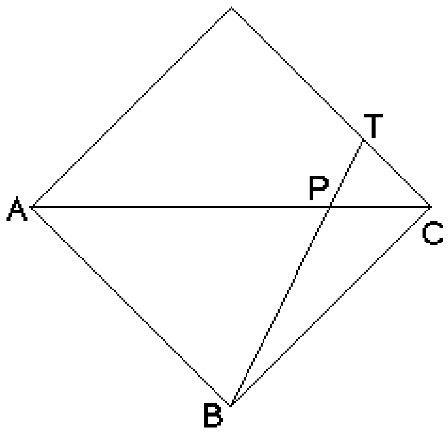
AP / AB	BT / AB
1/2	2/3
1/4	2/5
3/4	6/7
1/8	2/9
3/8	6/11
5/8	10/13
7/8	14/15
* *	* *
$n/2^r$	$2n/(2^r+n)$

Las demostraciones siguen la misma vía que en los casos anteriores.

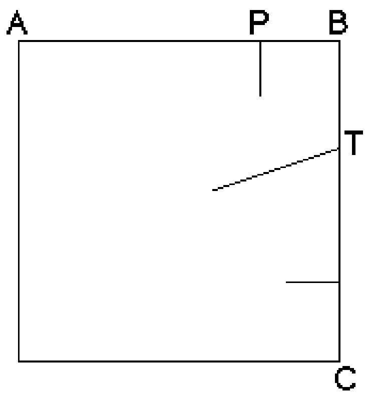
Otras n-divisiones:



AP / AC	AT / AB
1/2	2/3
1/4	2/5
3/4	6/7
1/8	2/9
3/8	6/11
5/8	10/13
7/8	14/15
* *	* *
$n/2^r$	$2n/(2^r+n)$



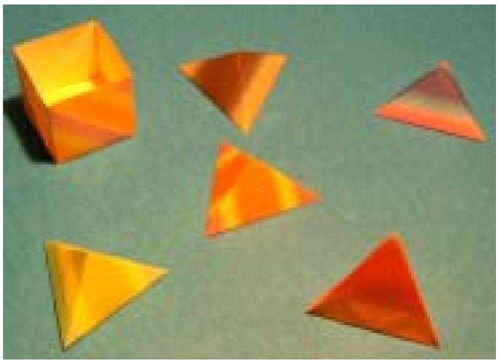
PC/ AC	TC/ AB
1/4	1/3
3/8	3/5
1/8	1/7
7/16	7/9
5/16	5/11
3/16	3/13
1/16	1/15
* *	* *
$n/2^r$	$n/(2^r-n)$



AP / AB	TC/ BC
3/4	2/3
5/8	4/5
7/8	4/7
9/16	8/9
11/16	8/11
13/16	8/13
15/16	8/15
* *	* *
$n/2^r$	$2^{r-1}/n$

EL ROMPECABEZAS DE H. VERRILL

LA DISECCIÓN DEL CUBO



Los juegos matemáticos constructivos nos van a permitir:

- Estudiar y analizar las propiedades de algunas figuras geométricas planas, tal como el rectángulo, el cuadrado y el triángulo equilátero. En estas propiedades se incluyeron la identificación de sus partes y de propiedades que permitieran su construcción.
- Construir poliedros regulares y estudiar sus propiedades básicas, particularmente sobre la forma y número de sus caras, así como la cantidad de vértices y de aristas.
- Hacer un estudio sobre las simetrías de algunos de los sólidos platónicos y sobre las relaciones que existen entre la forma de las caras de cada uno de ellos y el número de aristas que concurren en cada vértice.

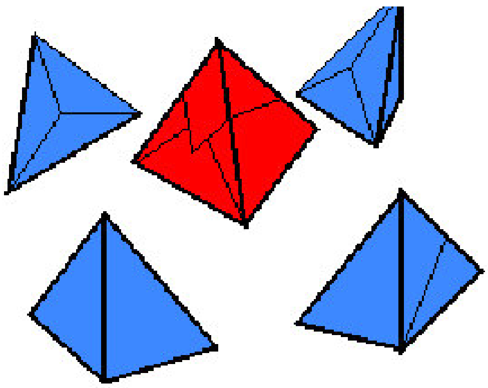
Vamos a realizar la disección del cubo utilizando únicamente en la construcción de las figuras papel de formato cuadrado, ningún corte ni unión con pegamento serán necesarios.

Seguiremos los diagramas de H. Verril.

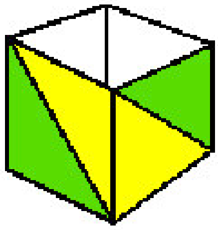
En la elaboración utilizaremos 10 hojas de papel cuadrado todas de idéntico tamaño. Las figuras que vamos a realizar son las siguientes:

- Tetraedro de base cuadrada. 1
- Pirámides. 4
- Un cubo que nos servirá de caja contenedora del resto de las piezas.

¿es posible insertar estas cinco piezas....



En esta caja tan pequeña?



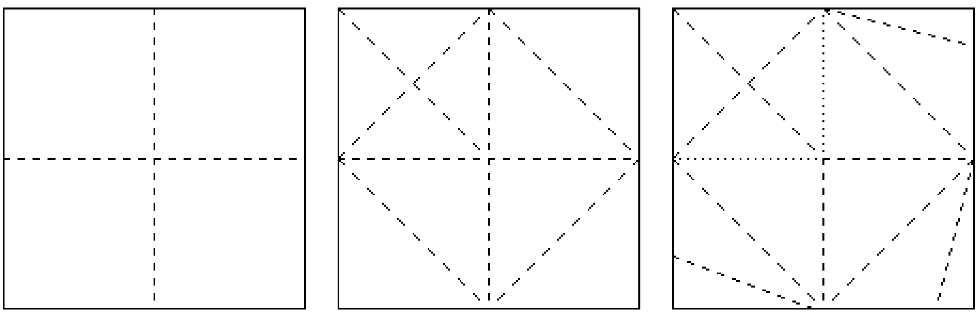
La realización de las figuras que componen el puzzle nos irán sirviendo para trabajar con los conceptos matemáticos correspondientes. Encontraremos en esta construcción grandes recursos didácticos que iremos acoplando al nivel de formación adecuado en cada caso.

Desde el punto de vista constructivo estas realizaciones son de gran interés para el estudio de las estructuras, hablamos por ejemplo de edificios de muy distinto tipo en el campo de la arquitectura.

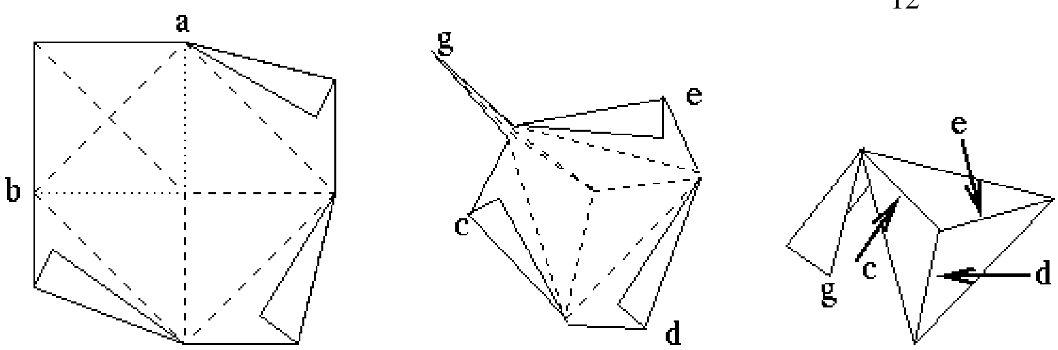
También llevan asociados de forma latente problemas de optimización de espacio lo que nos daría pie a un estudio de máximos y mínimos de funciones con una ligadura.

PIRÁMIDE

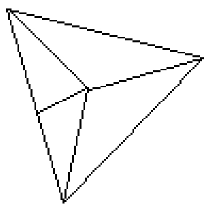
En la elaboración de cada pirámide, 4 en total, utilizamos una única hoja de papel cuadrado.



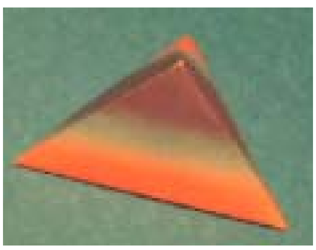
Los ángulos construidos en este último paso son de $\frac{\pi}{12} = 15º$

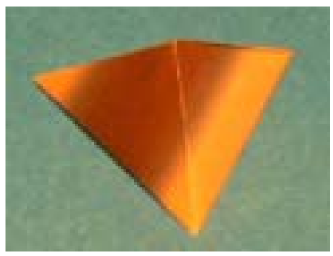


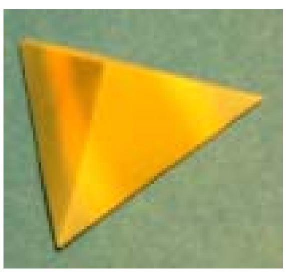
Siguiendo el orden alfabético se van realizando los pliegues hasta obtener la pirámide

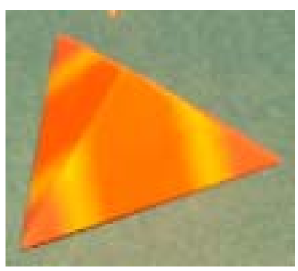


Si partimos de un cuadrado de lado L, podemos hacer un estudio bastante completo de todos los elementos geométricos referentes a polígonos de tres lados : ángulos, perímetros, baricentro, ortocentro, incentro y circuncentro.....



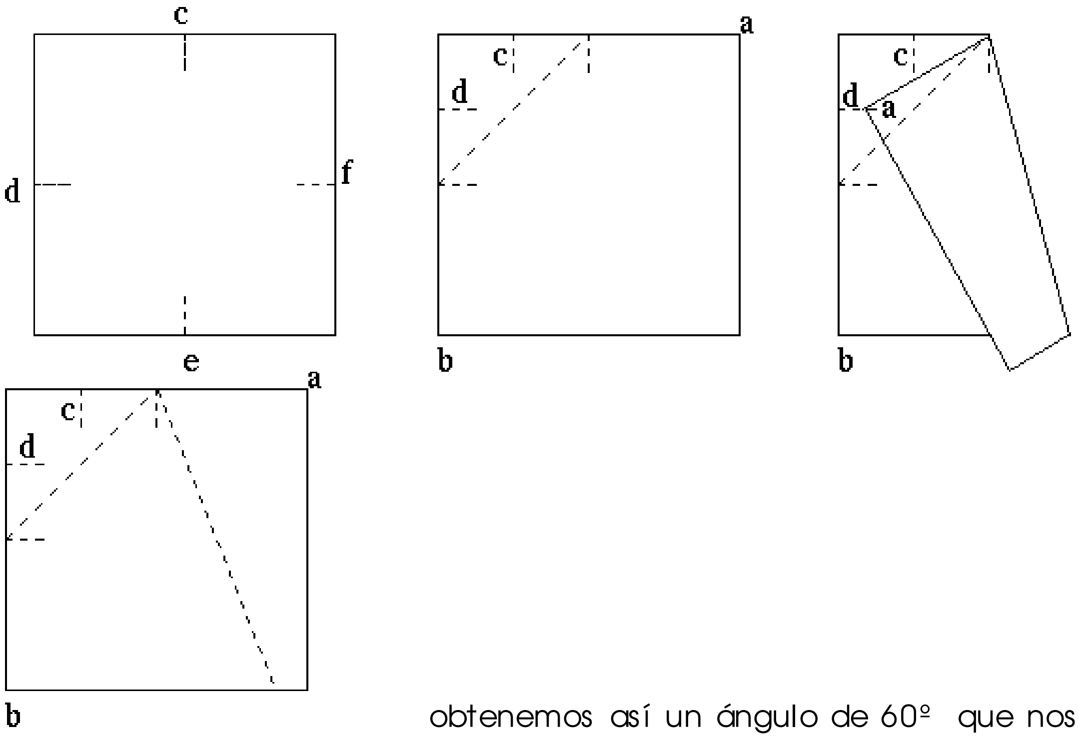




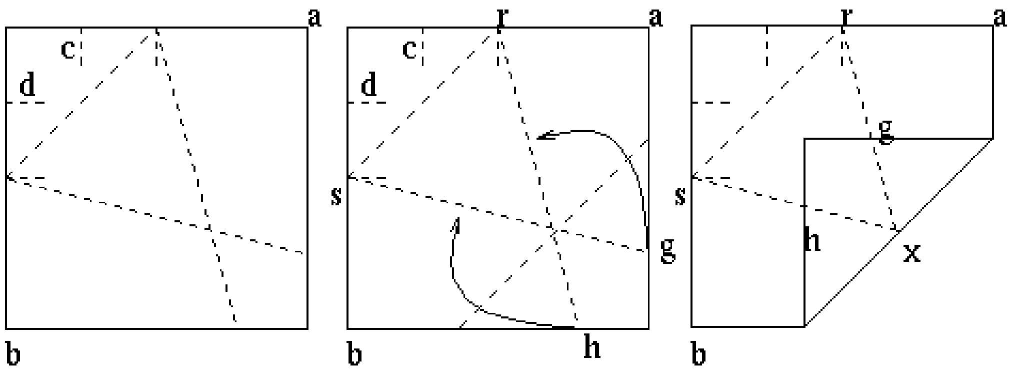


TETRAEDRO

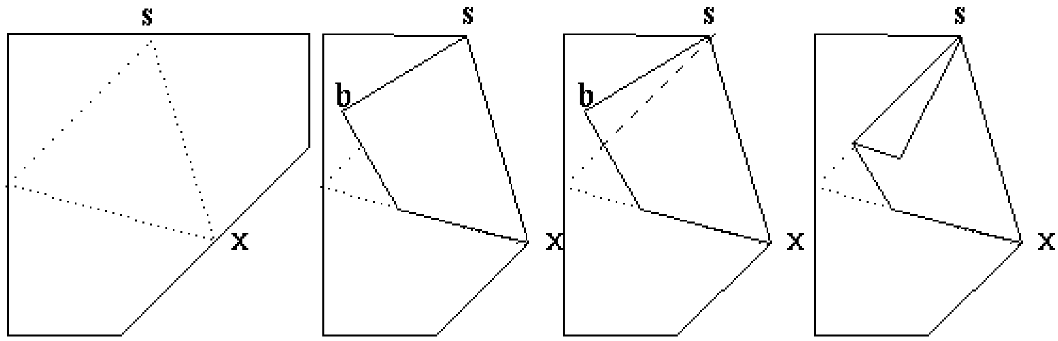
Vamos a necesitar para su realización dos hojas de papel cuadrado. La técnica de doblado y unión de las piezas la exponemos a continuación



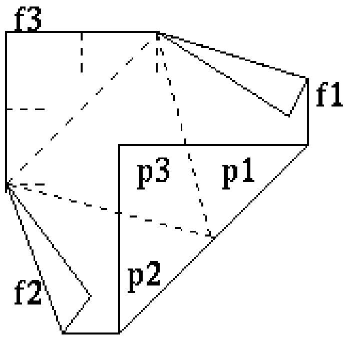
obtenemos así un ángulo de 60º que nos hace intuir la formación de los triángulos equiláteros que van a ser las caras de nuestro tetraedro. De manera análoga construimos el otro lado del triángulo



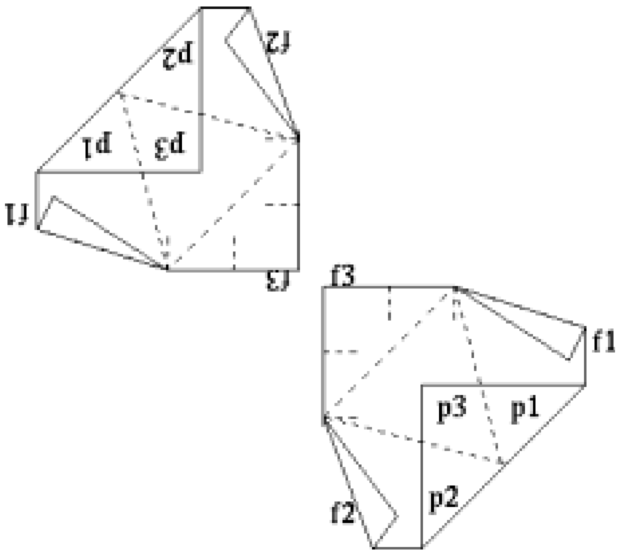
damos la vuelta al papel:

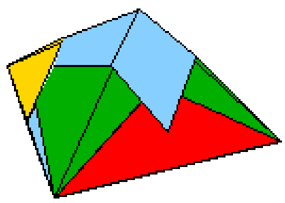


repetimos el proceso en el otro lado hasta obtener la pieza deseada:



procedemos a continuación al proceso de unión de las dos piezas:

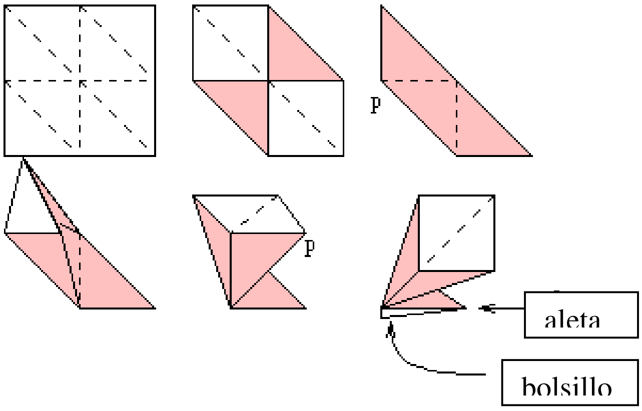




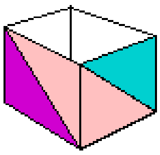
El empleo de colores nos puede ayudar mucho en la identificación de los distintos elementos geométricos.

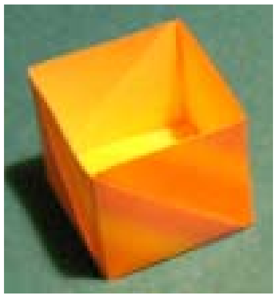
CUBO

En la realización del cubo o caja contenedora del resto de las piezas vamos a utilizar 4 hojas de papel cuadrado en las que procederemos a idénticos pliegues para realizar finalmente el ensamblado.



Realizamos 4 piezas idénticas y las unimos.



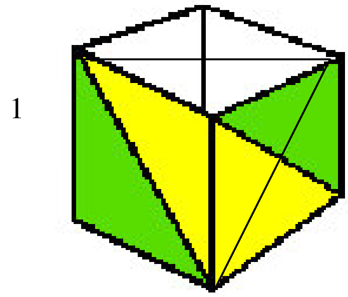


La técnica de construcción de la caja la hemos tomado del libro "Fabulous Origami Boxes" de Tomoko Fuse.

Una vez construidas las piezas del rompecabezas y comprobado que efectivamente la respuesta a nuestra pregunta inicial es afirmativa procedemos a hacer la demostración matemática mediante el cálculo de los volúmenes de las piezas que se puede enfocar también como un juego a partir del caso construido y generalizar para cualquier cuadrado de papel de lado de longitud arbitraria.

DISECCIÓN DEL CUBO

Demostración matemática
Cálculo de volúmenes

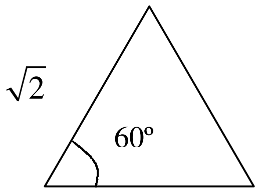


Consideremos un cubo de lado 1

Volumen del cubo= $V_c = 1$

Base tetraedro = base pirámide

Area de la base



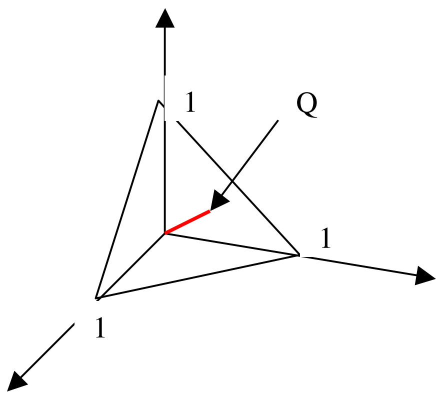
$$A_b = area = \frac{base \cdot altura}{2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}sen60^{o}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Volumen de la pirámide:

$$V_p = \frac{A_b h_p}{3}$$

Altura de la pirámide = h_p

Q = baricentro del triángulo de la base

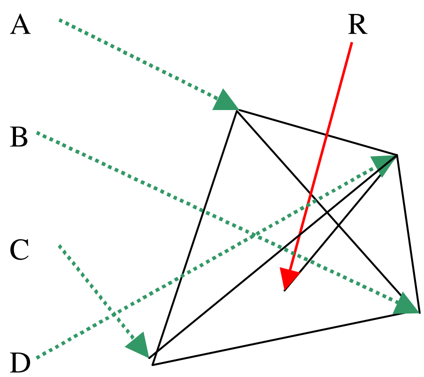


Volumen pirámide: V_p

$$V_p = \frac{A_b h_p}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Volumen del tetraedro:

$$V_T = \frac{A_b h_T}{3}$$



Altura del tetraedro h_T:

A, B, C, D, vértices del tetraedro.
A, B, C, base del tetraedro
RD = h_T

$$\frac{RB}{sen30^{o}} = \frac{\sqrt{2}}{120^{o}} \Rightarrow RB = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

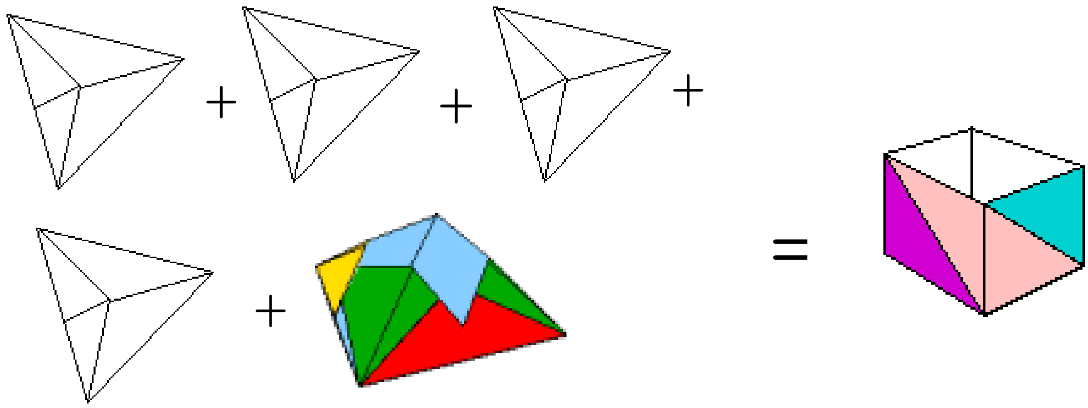
$$h_T^{\ 2} + (RB)^2 = (BD)^2 \Rightarrow h_T^{\ 2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow h_T = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

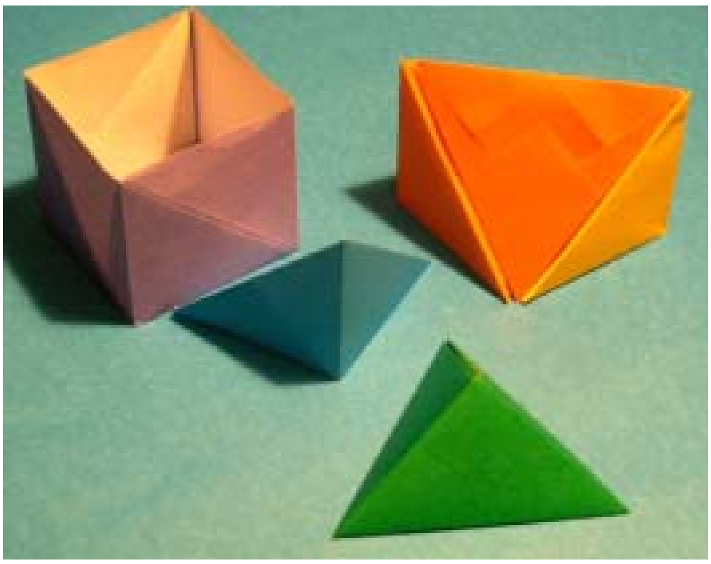
Volumen del tetraedro: $V_T = \dfrac{A_b h_T}{3}$

$$V_T = \frac{A_b h_T}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$V_p = \frac{1}{6},\ V_T = \frac{1}{3},\ V_c = 1$$

$$4V_p + V_T = V_c = 1$$





BIBLIOGRAFÍA

BRILL, David. *Brilliant Origami*. Ed. Japan Publications (2001).

CLEMENTE, Eduardo. Papiroflexia. Ed. Plaza y Janés (1999)

DE LA PEÑA HERNÁNDEZ, Jesús. *Matemáticas y Papiroflexia.* Ed. Asociación Española de Papiroflexia (2001)

FUSÈ, Tomoko. *Multidimensional transformations. Unit Origami.* Ed. Japan Publications, Inc. (2000)

GRUPO RIGLOS, *La Pajarita de Papel*. Alianza editorial.

KASAHARA, Kunihito; TAKAHAMA, Toshie. *Papiroflexia para Expertos*. Ed. EDAF (2000).

MACCHI, Pietro; SCABURRI, Paola. *Nuevos Objetos de Papiroflexia.* Ed. de Vecchi (1997)

MULATINHO, Paolo. Origami. *Manualidades en papel.* Ed. Parramón (1997)

ALGUNAS DIRECCIONES DE INTERÉS:

www.paperfolding.com/math

www.pajarita.org

www.britshorigami.org.uk

www.origami-cdo.it

www.origami.gr.jp

www.thok.dk

www.pagina.de/papiroflexia

www.origami.as/home.html