MINISTERIO DE EDUCACIÓN

MINISTRO DE EDUCACIÓN
José Antonio Chang Escobedo

VICEMINISTRO DE GESTIÓN PEDAGÓGICA
Idel Vexler Talledo

VICEMINISTRO DE GESTIÓN INSTITUCIONAL
Victor Raúl Díaz Chávez

SECRETARIO GENERAL
Asabedo Fernández Carretero

DIRECTORA NACIONAL DE EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR
Miriam Janette Ponce Vértiz

DIRECTOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
César Puerta Villagaray

Matemática
Serie 2 para estudiantes de Secundaria
Mis actividades Matemáticas
Fascículo 1: DOBLANDO Y CORTANDO CONSTRUIMOS LA GEOMETRÍA

Van de Velde 160, San Borja

Primera edición, 2007
Tiraje: 28 000 ejemplares
Impreso en Empresa Editora El Comercio S.A.
Jr. Juan del Mar y Bernedo 1318,
Chacra Ríos Sur, Lima 01

Hecho el Depósito Legal en la
Biblioteca Nacional del Perú
Nro. 2007-00294

Coordinación y supervisión general MED
Antonieta Cubas Mejía
Supervisión pedagógica MED
Daniel Giovanni Proleón Patricio
Verificación de estilo MED
Miguel Humberto Fuentes Huerta

Autoría
Ediciones El Nocedal S.A.C.
Coordinador
Rubén Hildebrando Gálvez Paredes
Elaboración pedagógica
Felipe Eduardo Doroteo Petit
Itala Esperanza Navarro Montenegro
Edgar Justo Chacón Nieto
Daniel José Arroyo Guzmán
Colaboración especial
María del Pilar Ramos Garay
Javier Pacheco Ávalos
Revisión pedagógica
Hno. Marino La Torre Mariño
Revisión académica
Armando Zenteno Ruiz
Diseño y diagramación
Virginia Rosalía Artadi León.

Ilustraciones
Patricia Nishimata Oishi
Brenda Román González
Fotografía
Enrique Bachmann
Corrector de estilo
Marlon Aquino Ramírez

Presentación

El presente fascículo es un material autoinstructivo que facilita el desarrollo de las capacidades fundamentales, específicas y de las capacidades del área de Matemática, así como la vivencia de los valores propuestos en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular del nivel de Educación Secundaria.

El estudio de la Geometría en la educación secundaria, al igual que otras ramas de la Matemática, ha presentado durante muchos años problemas de conceptualización a pesar de que su carácter gráfico le otorga algunas ventajas ante la simbología puramente abstracta de otras ramas como, por ejemplo, el Álgebra. Pero este carácter gráfico no siempre ayuda a desarrollar una capacidad intuitiva en el alumno, sino por el contrario, muchas veces le ocasiona confusión frente al real objeto de estudio de la Geometría.

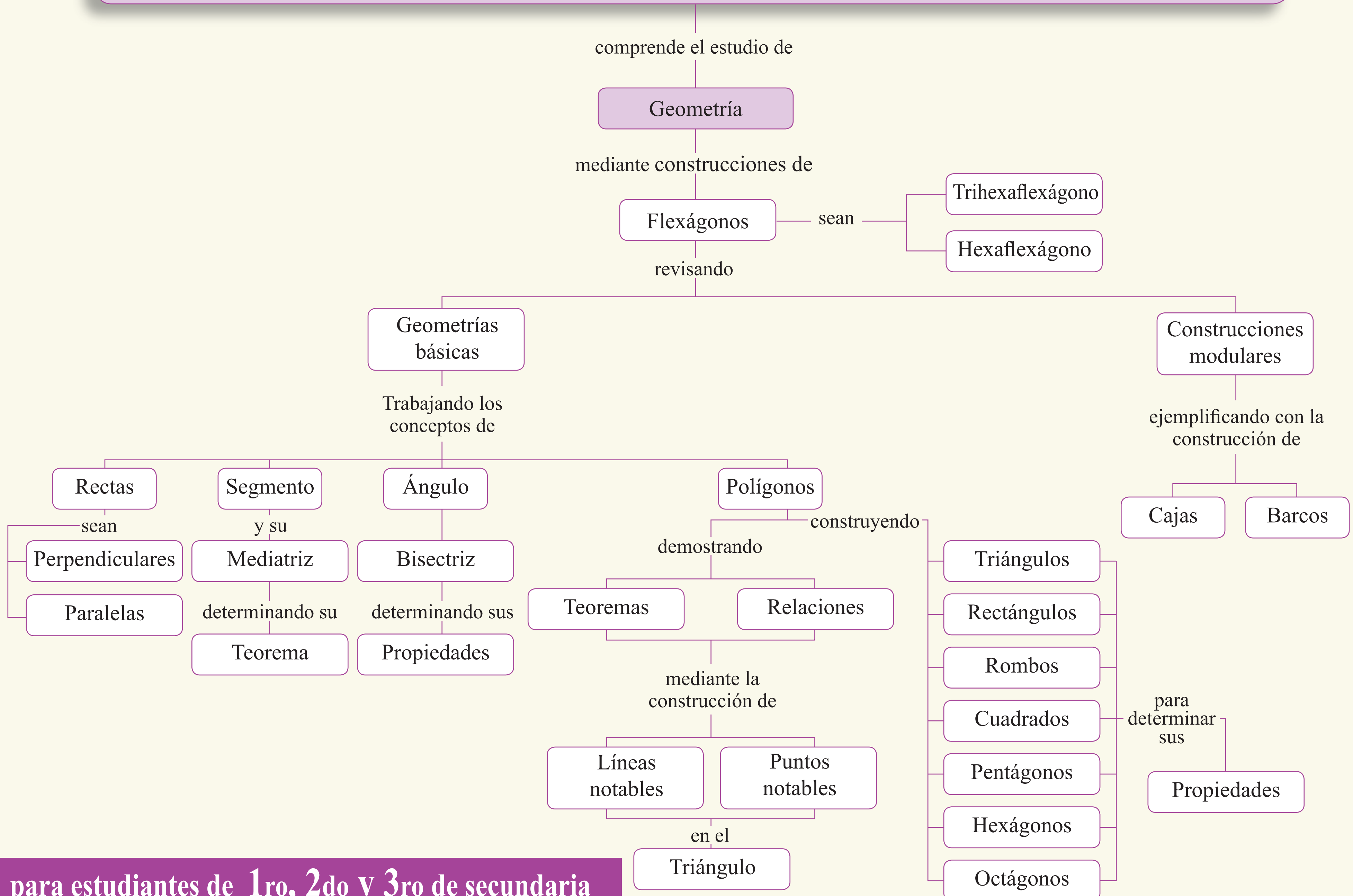
En este fascículo denominado "Doblando y cortando construimos la Geometría", pretendemos erradicar la idea equivocada que se tiene de esta rama de la Matemática y dar a conocer su verdadero objeto de estudio, el cual no consiste en la memorización de propiedades y algoritmos, sino en el desarrollo de un razonamiento deductivo, y para ello presentamos algunas actividades sobre construcciones geométricas básicas basadas en la técnica del doblado de papel. Esta técnica servirá como apoyo didáctico para iniciar el desarrollo de un razonamiento deductivo de manera intuitiva más que rigurosa, además, su aprendizaje es rápido y accesible a todos.

En este fascículo se enseñará cómo hacer dobleces perpendiculares y dobleces paralelos, cómo obtener el punto medio de un doblez; la construcción y verificación de teoremas de las bisectrices, medianas, alturas y mediatrices de un triángulo y la construcción y verificación de las propiedades de polígonos, utilizando como soporte hojas de papel plegadas o cortadas. Asimismo, se darán las indicaciones para hacer construcciones modulares como poliedros, aviones, barcos, cajas y la del flexágono.

Complementamos el fascículo con logros de aprendizaje, recuperación de saberes previos, estrategias de aprendizaje, metacognición, evaluación, chistes matemáticos, curiosidades matemáticas, bibliografía y enlaces *web*.

ÍNDICE

Doblando y cortando construimos la Geometría

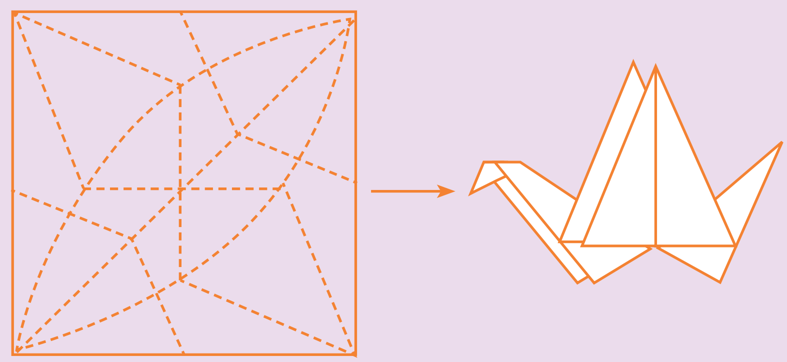


para estudiantes de 1ro, 2do y 3ro de secundaria

Doblando y cortando construimos la Geometría

Motivación

La técnica del plegado de papel y la utilización de instrumentos como regla, compás y otros útiles de dibujo no solo nos permiten construir líneas, polígonos, poliedros y otras interesantes figuras, sino también identificar sus elementos característicos y demostrar postulados y teoremas que son la base del estudio de la Geometría. Estas construcciones nos permiten desarrollar habilidades de razonamiento a través de la construcción y manipulación de algunos sólidos geométricos. Asimismo, podemos incrementar nuestra capacidad visual y constructiva.



Pájaro aleteador con su mapa de cicatrices.

Logros de Aprendizaje

- Identifica postulados geométricos y propiedades básicas de figuras geométricas planas a través de construcciones geométricas básicas, mostrando creatividad.
- Investiga y propone actividades que permitan reconocer figuras geométricas a través de construcciones modulares, manifestando creatividad y confianza en sus construcciones.
- Aplica conceptos geométricos a través de la construccion de flexágonos, manifestando confianza en sus habilidades.

Recuperación de saberes previos

Lee atentamente las preguntas y responde en una hoja aparte.

- Enuncia métodos de construcción de polígonos.
- ¿Qué instrumentos utilizas para construir figuras geométricas?
- ¿Utilizas la papiroflexia en la construcción de figuras geométricas? ¿Qué figuras?
- Enuncia el teorema de Pitágoras.
- ¿Cómo se hace un avión de papel?
- ¿En qué tipo de triángulo se aplica el teorema de Pitágoras?
- ¿Cómo se hace un cubo de papel?
- ¿Qué tipo de polígonos observas en una pelota?

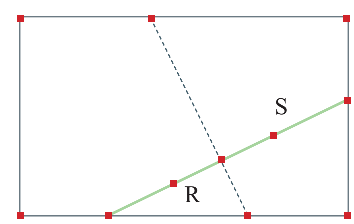
1. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS BÁSICAS

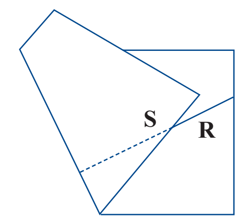
1.1 Construcciones sencillas

Rectas Perpendiculares

Instrucciones:

1. Sobre una hoja de papel marca los puntos *R* y *S*, haz un doblez de tal manera que coincida con las marcas de los puntos (ver figura).
2. Haz otro doblez en forma vertical al doblez *S* y *R* haciendo coincidir esta línea sobre sí misma (ver figura).
3. Remarca las líneas con tus uñas, abre el papel y podrás comprobar que se han formado cuatro ángulos iguales que miden 90º. Las rectas obtenidas son perpendiculares.

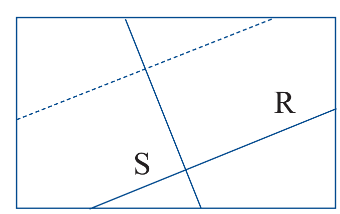




Rectas Paralelas

Instrucciones:

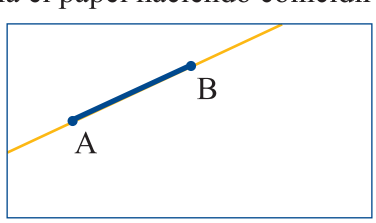
1. Realiza los pasos que seguiste para construir la perpendicular.
2. Haz otra perpendicular con respecto a la primera perpendicular.
3. Abre el papel y observa las rectas paralelas.

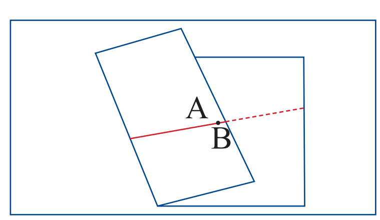


Mediatriz de un segmento

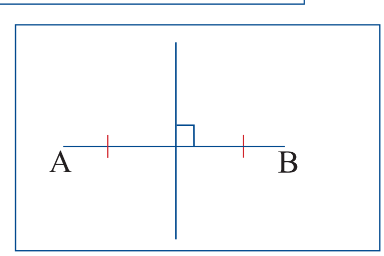
Instrucciones:

1. En una hoja de papel, haz un doblez y en él traza el segmento *AB* (ver gráfico).
2. Dobla el papel haciendo coincidir los extremos del segmento.



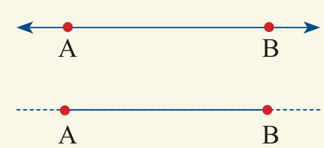


3. Marca bien el doblez con las uñas. Abre el papel. Puedes comprobar que la línea generada por el doblez coincide en el punto medio del segmento y los ángulos que se forman miden 90º cada uno.

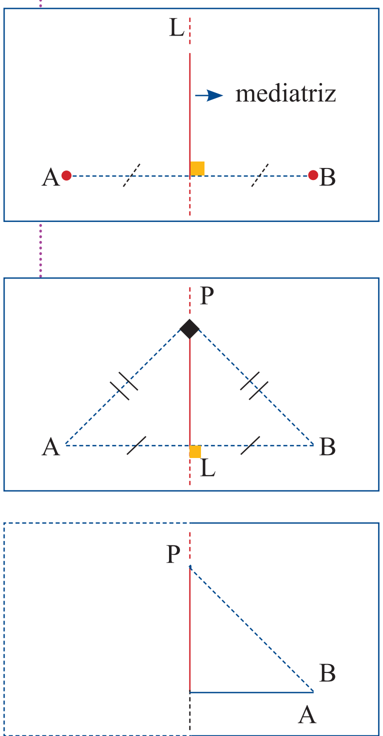


Segmento

Parte de una recta comprendida entre dos puntos.



Segmento *AB*



AP = PB

Teorema de la mediatriz

Teorema: "Todo punto perteneciente a la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento".
El teorema que vas a demostrar requiere no sólo de tu interés y creatividad al plegar papel sino de mucha observación y perseverancia. ¡Adelante!

Instrucciones:
1. Haciendo un doblez, construye un segmento y marca los puntos A y B en sus extremos.
2. Haz otro doblez y construye la mediatriz del segmento AB. Remárcala con un lápiz y nómbrala con la letra L.
3. Marca con un lápiz un punto P perteneciente a la mediatriz.
4. Doblando el papel unimos el punto P con cada uno de los extremos del segmento AB de tal manera que se formen los segmentos AP y PB.
5. Haciendo un doblez por la mediatriz compara las longitudes de los segmentos AP y PB. Haz lo mismo con otros puntos pertenecientes a la mediatriz.

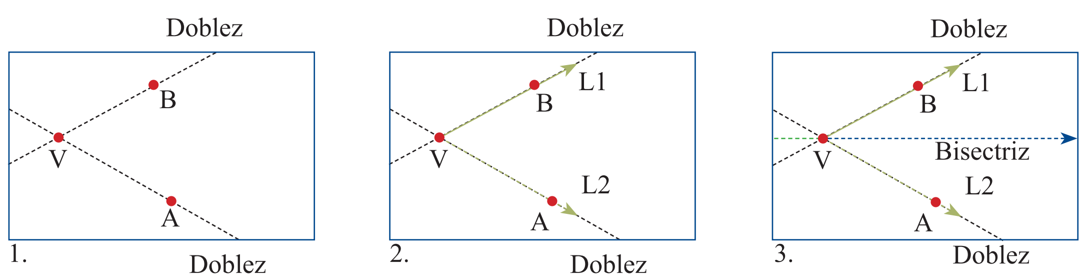
Observa y comprueba que cualquier punto que pertenezca a la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos de dicho segmento.

Recuerda

Equidistante quiere decir "a la misma distancia".

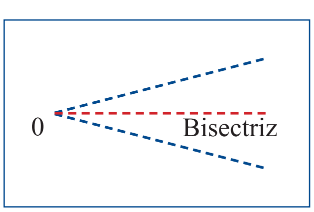
Bisectriz de un ángulo

Instrucciones:
1. Haz dos dobleces que se intersecan en el punto V (ver gráfico).
2. Abre el papel y verás que el punto V pertenece a ambas rectas.
3. Marca los puntos A y B con lápiz en los dobleces y a partir del punto V, determina los rayos L_1 y L_2.
4. Haz otro doblez, haciendo coincidir los rayos.
5. Abre nuevamente el papel y podrás observar que el nuevo doblez es la bisectriz del ángulo AVB.



Propiedades de la Bisectriz

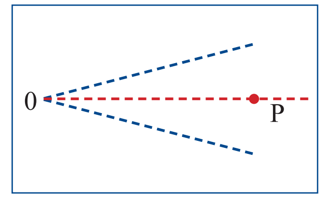
Propiedad de la bisectriz de un ángulo:

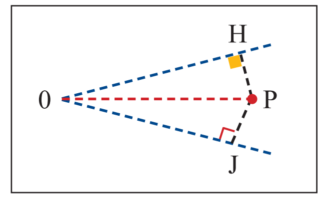


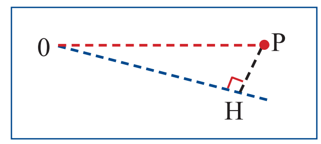
Al realizar los siguientes plegados con papel no solo desarrollarás tu destreza manual y creatividad, sino además, podrás identificar formas y relaciones.
Propiedad: "*Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de dicho ángulo*".

Sigue las instrucciones:

1. Haciendo dobleces, construye en una hoja de papel un ángulo de vértice *O*.
2. Con un doblez construye la bisectriz de dicho ángulo.
3. Marca un punto *P* cualquiera de la bisectriz.
4. Haciendo dobleces, desde el punto *P,* construye la perpendicular a los lados del ángulo. Marca con un lápiz los punto *H* y *J*.
5. Dobla el ángulo por la bisectriz haciendo que coincidan los lados *HP* y *PJ* ¿Qué observas? Realiza el mismo procedimiento con otros puntos de la bisectriz.







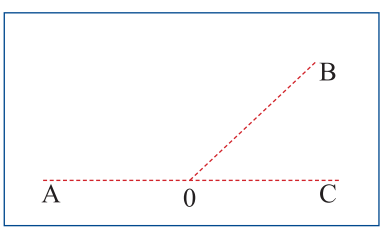
Con esta experiencia se comprueba que cualquier punto de la bisectriz equidista de los lados del ángulo.

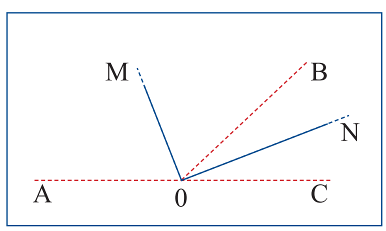
Propiedad de las bisectrices de dos ángulos adyacentes

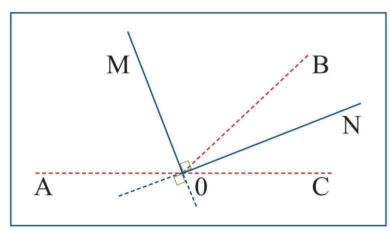
Propiedad: "Las bisectrices de dos ángulos adyacentes forman entre sí un ángulo recto".

Sigue las instrucciones con exactitud y precisión manual:

1. Toma una hoja de papel y doblándola construye dos ángulos adyacentes. Abre el papel y marca los puntos *A*, *B*, *C*, y *O*.
2. Haciendo dobleces construye la bisectriz de cada uno de los ángulos adyacentes $\angle AOB$ y $\angle BOC$ Marca con un lápiz las bisectrices y nómbralas con las letras *M* y *N*.
3. Con un doblez comprueba que las bisectrices de los ángulos adyacentes son perpendiculares, es decir, el $\angle MON$ mide 90º.





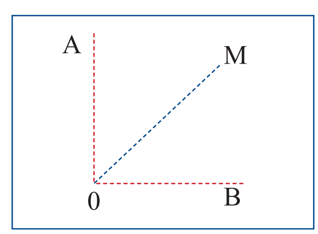


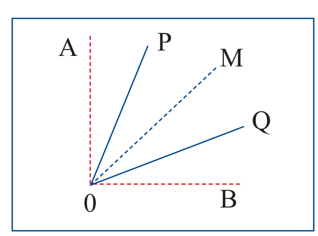
Propiedad de las bisectrices de dos ángulos consecutivos complementarios

Propiedad: "Las bisectrices de dos ángulos consecutivos complementarios forman un ángulo de 45º".

Sigue las siguientes indicaciones:

1. Haciendo dobleces, construye en una hoja de papel un ángulo recto de vértice O. Marca con lápiz los puntos A, O y B (ver figura 1).
2. Marca un punto M en el interior del ángulo AOB (ver figura 1).
3. Con un doblez une el punto M con el vértice O del ángulo recto. (ver figura 2).
4. Haciendo dobleces construye la bisectriz de cada uno de los ángulos complementarios BOM y MOA. Marca con un lápiz las bisectrices y nómbralas con las letras P y Q.
5. Observa que se han formado cuatro ángulos consecutivos: BOP; POM; MOQ; QOA (ver figura 3).
6. Comprueba con un transportador que la medida del ángulo POQ es 45º.



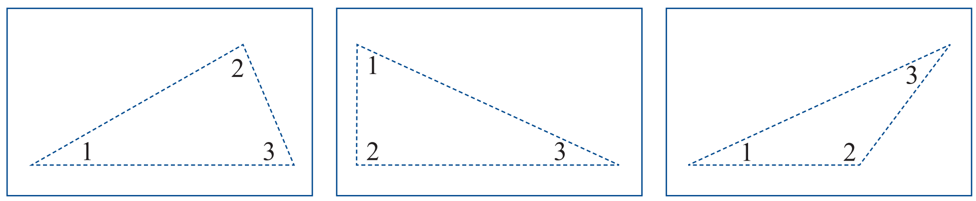


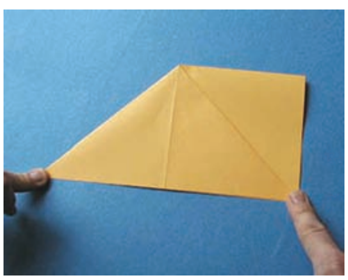
1.2 Triángulos

Algunos teoremas sobre triángulos

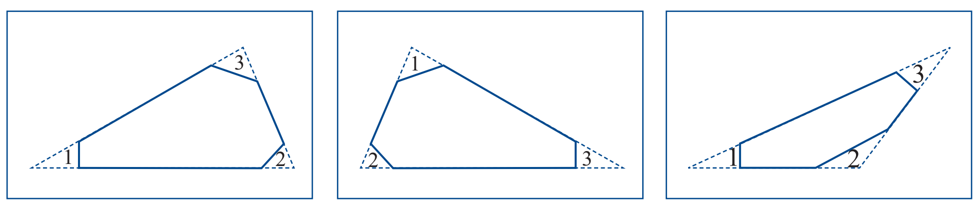
Teorema: "La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º".
Sigue las instrucciones cuidadosamente al realizar tus construcciones plegando papel y cortando papel.

1. Haciendo dobleces en un pedazo de papel construye las tres regiones triangulares que se presentan, y recórtalas con mucha exactitud.

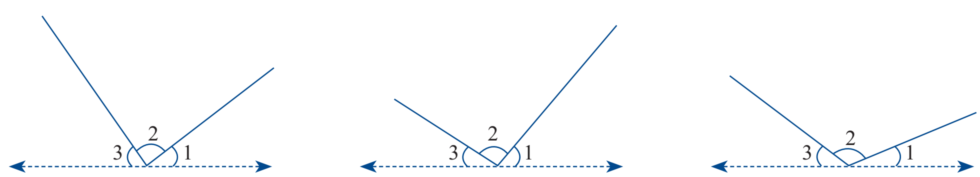




2. Corta los ángulos de cada una de las regiones triangulares.

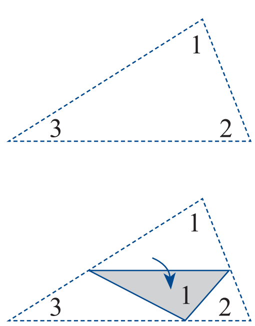


3. Coloca los ángulos recortados de cada región triangular sobre una recta tal como se muestra en las figuras.



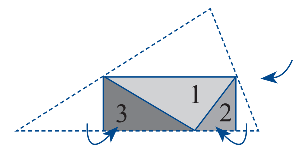
¿Qué puedes generalizar respecto a la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo?

Otra forma de demostrar el teorema: "La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º".
Demuestra tu gusto por la elaboración y presentación cuidadosa de tus construcciones geométricas. Sigue las instrucciones:



1. Haciendo dobleces construye una región triangular cualquiera y recórtala.
2. Dobla de manera que el vértice del $\angle 1$ descanse sobre su lado opuesto, de tal forma que la parte superior de la hoja doblada quede paralela a este lado, formando un trapecio.

3. Realiza otro doblez de manera que los vértices de los ángulos $\angle 2$ y $\angle 3$ coincidan con el vértice del $\angle 1$.
4. Observa que los tres ángulos quedan sobre una misma línea, con lo cual comprobamos que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º.

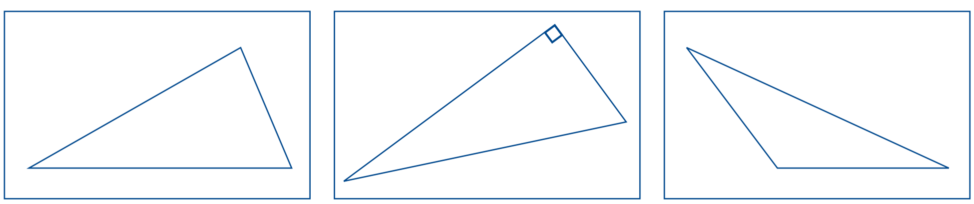


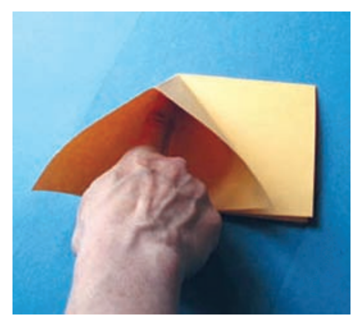
Teorema de los puntos medios de los lados de un triángulo

Teorema: "El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercero y tiene la mitad de su longitud".

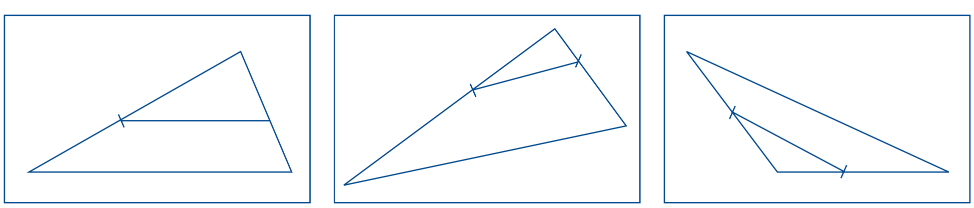
El teorema que vas a demostrar requiere no solo de tu interés y creatividad al plegar papel, sino mucha observación y perseverancia. ¡Adelante!
Sigue las ilustraciones:

1. Haciendo dobleces, construye regiones triangulares como las que se muestran y márcalas con un lápiz.

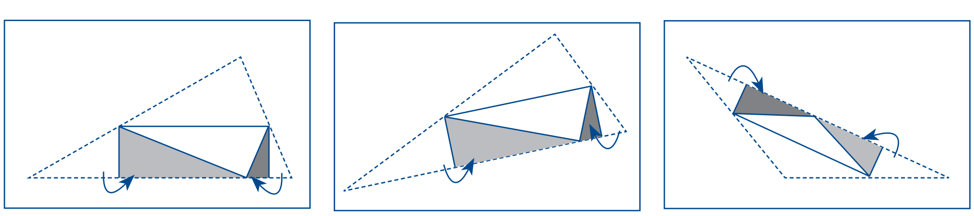




2. Haciendo dobleces, encuentra en cada uno de ellos el punto medio de dos de sus lados y márcalos con un lápiz.
3. En cada región triangular haz un doblez que una los puntos medios. Observa que el segmento originado por el doblez es paralelo al tercer lado. Márcalo con lápiz.



4. En cada región triangular compara la longitud del segmento originado por los puntos medios y la longitud del tercer lado. Para ello realiza los dobleces que se indican y observa.



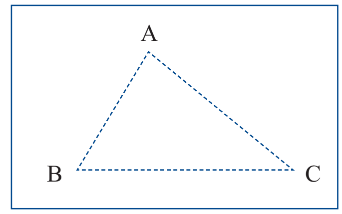
De lo observado, se puede generalizar que: la longitud del segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es la mitad de la longitud del tercer lado.

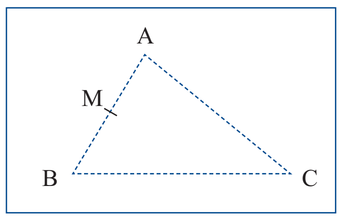
Del teorema de los puntos medios de los lados de triángulo se puede deducir:

Corolario 1: "Si por un punto medio de un lado del triángulo trazamos una paralela hacia uno de los otros dos lados, entonces el tercer lado queda dividido en dos segmentos iguales".

Sigue las instrucciones poniendo en práctica toda tu creatividad y habilidad manual:

1. Haciendo dobleces, construye una región triangular cualquiera y escribe las letras *A*, *B* y *C*.





2. Con un doblez determina el punto medio de uno de los lados. Márcalo con un lápiz y colócale la letra *M*.

3. Con un doblez construye la paralela $\overline{MN}$ hacia uno de los otros dos lados y que pase por el punto *M*. Marca la paralela con un lápiz (puede ser $\overline{MN}//\overline{BC}$, o $\overline{MN}//\overline{AC}$ o como se muestra en las figuras 1 y 2 respectivamente).

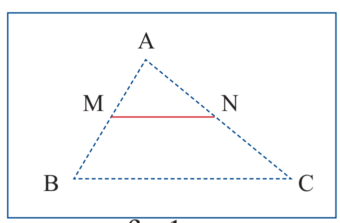


fig 1

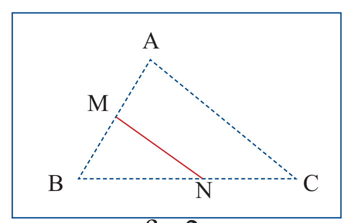


fig 2

4. Haz un doblez perpendicular al lado $\overline{AC}$ que pase por el punto *N* (en el caso de la figura 1). Como puedes observar, *A* y *C* coinciden en un mismo punto. En la región triangular de la figura 2, construye la perpendicular al lado $\overline{BC}$ que pase por el punto *N*, observa que *B* y *C* coinciden en un mismo punto.

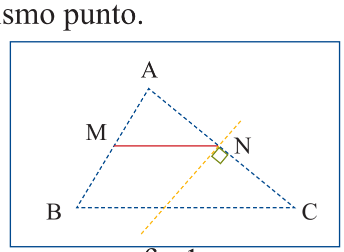


fig 1

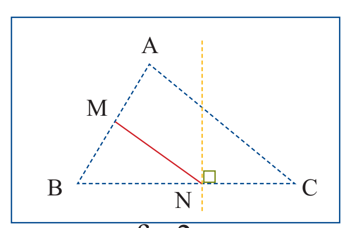


fig 2

Esta experiencia demuestra que: al trazar una paralela por el punto medio de un lado del triángulo hacia uno de los otros dos lados, el tercer lado queda divido en dos segmentos iguales.

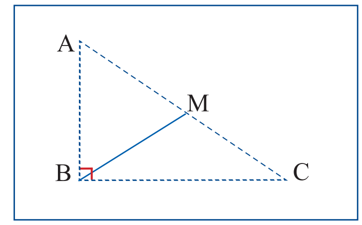
Un mate... de risa

Triángulos por la calle
Van dos triángulos por la calle, se encuentran con una A mayúscula y uno de los triángulos dice: "mira qué moderno va este, lleva cinturón".

http://www.escoalr.com/chistes/view.php?joke=3993

Corolario 2: En un triángulo rectángulo, la mediana relativa a la hipotenusa es de igual medida que la de los segmentos en que la divide.
Ilustraciones:

1. Haciendo dobleces, construye una región triangular con un ángulo recto y marca los puntos A, B y C.
2. Con otro doblez construye la mediana $\overline{BM}$ relativa a la hipotenusa y remárcala con un lápiz.
3. Haciendo dobleces, compara las medidas de la mediana $\overline{BM}$ con la de los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{MC}$

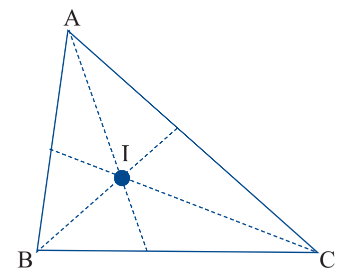


Como puedes observar, las medidas son iguales, con lo cual, puedes comprobar el corolario.

Líneas y puntos notables en el triángulo

Construcción de las bisectrices de un triángulo

Teorema: "Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado incentro."
Para demostrar el teorema con la técnica del doblado de papel sigue las indicaciones realizando los dobleces con mucha precisión:

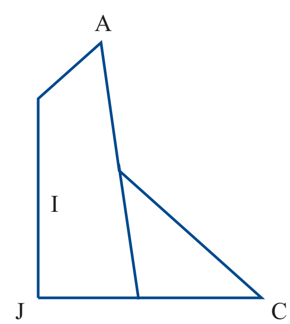


1. Con dobleces, construye una región triangular de cualquier clase y tamaño.
2. Haciendo dobleces construye la bisectriz correspondiente a cada ángulo del triángulo (une de dos en dos los lados que forman cada ángulo del triángulo).
3. Observa que las bisectrices se cortan en un punto.
4. Marca por las dos caras del papel ese punto y nómbralo con la letra I.

El punto I recibe el nombre de incentro del triángulo.

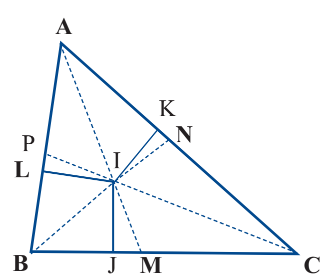
Igualdad de la distancia del incentro a los lados del triángulo.

Para comprobarlo, sigue la secuencia:



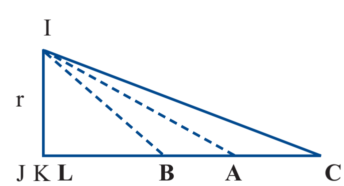
1. Dobla el papel haciendo resbalar el lado BC sobre sí mismo aplastando el papel sin marcar hasta que veas aparecer en el doblez el punto ***I***. Sin perder la guía del lado, marca el doblez IJ hasta el lado.

2. Repetimos la operación en los lados ***AB*** y ***CA***, obteniendo los puntos ***L*** y ***K*** respectivamente.

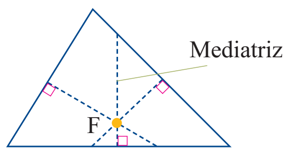


3. Dobla los segmentos ***IA, IB*** e ***IC*** en forma de colina, hacia fuera.

4. Con esto, logras unir los tres segmentos y con lo cual muestras que miden lo mismo.



Construcción de las mediatrices de un triángulo

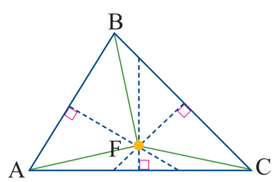


Teorema: "Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado circuncentro." Para comprobar el teorema sigue las indicaciones siguientes:

1. Haciendo dobleces, construye una región triangular y recórtala.
2. Construye con dobleces la perpendicular que pase por el punto medio de cada uno de sus lados.
3. Observa que las tres mediatrices se cortan en un punto.
4. Marca por las dos caras del papel ese punto y nómbralo con la letra *F*.

El punto *F* recibe el nombre de CIRCUNCENTRO del triángulo.

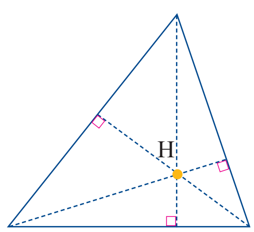
Igualdad de la distancia del circuncentro a los vértices



Para comprobarlo sigue la secuencia:

1. Con dobleces, une el circuncentro con cada vértice del triángulo. Se han formado los segmentos *AF*, *BF*, y *CF*.
2. Haciendo dobleces une los segmentos *AF*, *BF*, y *CF* y verifica que midan lo mismo.

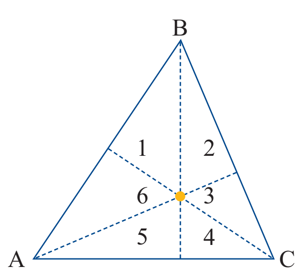
Construcción de las alturas de un triángulo



Teorema: "Las alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado ortocentro." Para comprobar el teorema, doblando papel, sigue las indicaciones:

1. Construye una región triangular y recórtala.
2. Construye y marca las alturas del triángulo (perpendiculares a los lados que pasan por los vértices).
3. Comprueba que estas tres alturas se intersectan en un punto.
4. Marca por ambas caras del papel ese punto y nómbralo con *H,* este punto recibe el nombre de ORTOCENTRO del triángulo.

Relación entre ángulos determinados por las alturas

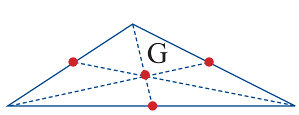


Sigue las indicaciones para observar las relaciones entre ángulos determinados por las alturas:

1. Haz con dobleces una región triangular y recórtala.
2. Construye las alturas.
3. Observa que las alturas del triángulo considerado determinan seis triángulos. Consideremos tres pares de ellos, los que tienen ángulos opuestos por el vértice.
4. Observa que en cada par de tales triángulos hay dos ángulos rectos y dos ángulos opuestos por el vértice.
5. Recorta los seis triángulos y muestra que en estos pares de triángulos los terceros ángulos son iguales.
6. Rearma la región triangular ABC para observar los ángulos iguales.

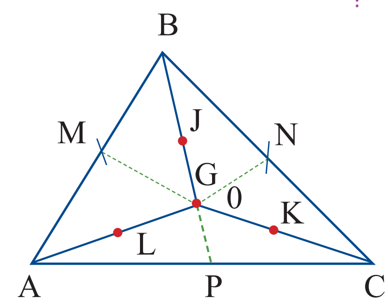
Construcción de las medianas en un triángulo

Teorema: "Las medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado baricentro."



1. Usando dobleces, construye una región triangular de manera similar a las anteriores.
2. Toma un lado y determina su punto medio con un doblez. Marca ese punto.

3. Elabora un doblez que pase por ese punto medio y por el vértice opuesto. Remarca este doblez.
4. Repite este procedimiento con los otros dos lados. Remarca estas dos últimas líneas.
5. Observa que los tres dobleces se cortan en un punto. Este punto donde se intersecan las tres medianas se llama BARICENTRO o CENTRO DE GRAVEDAD. Denótalo con la letra G.



Relación entre la distancia del centro de gravedad a los vértices

Sigue cuidadosamente las instrucciones:

1. En cada mediana, dobla el papel para marcar el punto medio del segmento comprendido entre el centro de gravedad y el vértice correspondiente. Designa los puntos medios con las letras *J*, *K*, *L*.
2. Compara cada una de estas dos mitades con el resto de dicha mediana. Dobla y une *BJ*, *JG* y *GP*, haz lo mismo con las otras dos medianas. Puedes observar que tienen la misma medida. Lo que es lo mismo afirmar que "el segmento que tiene como extremos el centro de gravedad y el vértice, es el doble de la parte restante de la mediana".
3. Apoya la hoja de papel horizontalmente con un lápiz ubicado verticalmente con su punta en el punto *G* y observa que la región triangular se mantiene en equilibrio, tal como se muestra en la figura 1.

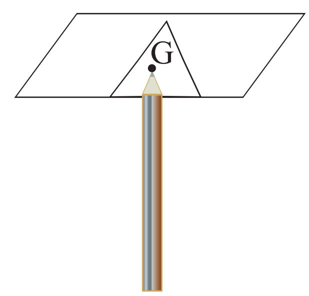
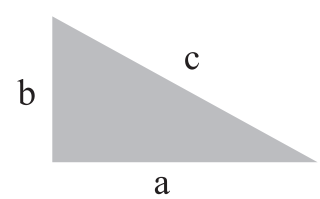


Fig 1

Teorema de Pitágoras

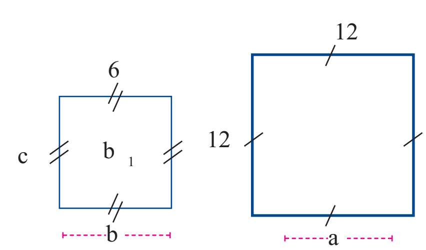
Demostración de Bháskara (1114-1185)

Una de las demostraciones visuales más sencillas con respecto al teorema de Pitágoras, es aquella que nos da Bháskara, matemático y astrónomo hindú, quien vivió entre 1114-1185, y fue el último de los matemáticos clásicos de la India.
Para ello, comprobaremos un caso particular de esta demostración, con la ayuda de piezas de rompecabezas.

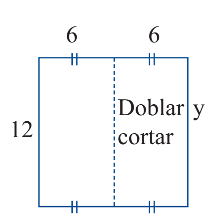


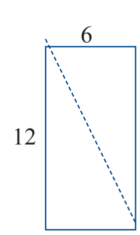
Sigue las instrucciones

1. Corta un triángulo rectángulo cuyos catetos estén en la relación de 1 a 2. Ejemplo: el cateto "*a*" puede medir 12 cm y el "*b*" 6 cm.
2. Luego corta un cuadrado con lado de igual medida que el cateto menor (*b*) y otro cuadrado con lado de igual medida que el cateto mayor (*a*). Al cuadrado de lado menor lo llamarás b_1.

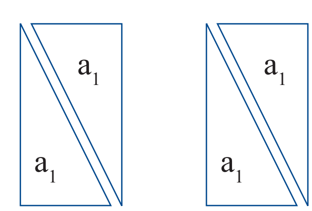


3. Toma el cuadrado mayor, dóblalo por la mitad y córtalo. Te quedarán dos rectángulos. Como se muestra en la figura.
4. A cada uno, dóblalo por su diagonal y vuelve a cortar. Entonces te quedarán cuatro triángulos rectángulos al que llamarás a_1 a cada pieza.



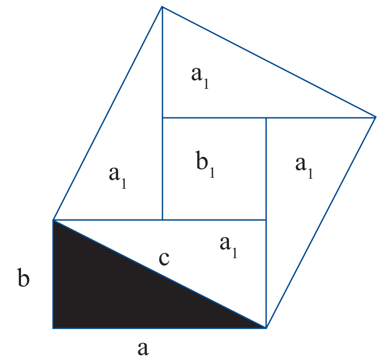


Doblar y cortar por la línea punteada



Doblar y cortar por la línea punteada

5. Une las cinco piezas cortadas, formando un cuadrado sobre la hipotenusa *c*, tal como se muestra en la figura.



Con ello compruebas que:
$a^2 + b^2 =$ suma de áreas de las piezas

En el cuadrado superior tenemos:
$c^2 = a_1 + a_1 + a_1 + a_1 + b_1$

En la figura inferior tenemos:
$a^2 + b^2 = a_1 + a_1 + a_1 + a_1 + b_1$

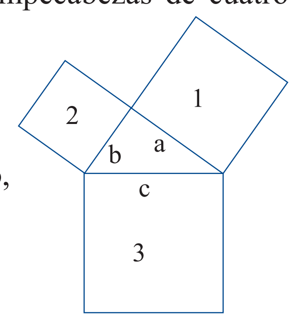
Por lo tanto, igualando las dos expresiones se obtiene:
$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

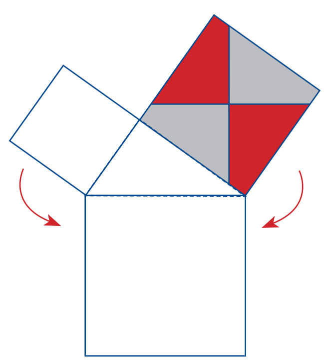
Demostración de Henry Perigal

Henry Perigal (1801-1898) ha ideado una comprobación del teorema de Pitágoras usando la papiroflexia. Se basa en un rompecabezas de cuatro piezas trapezoidales.

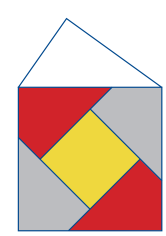
La demostración de Perigal es la siguiente:

1. Construye un triángulo rectángulo.
2. Construye un cuadrado en cada lado del triángulo, tal como se muestra en la figura.





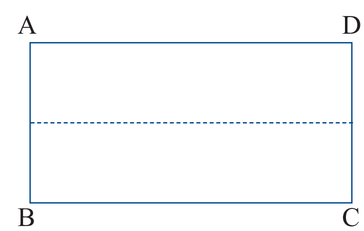
3. Sobre el mayor de los cuadrados construidos sobre los catetos se determina el centro (no necesariamente ha de ser ese punto) y se trazan dos rectas, una paralela y la otra perpendicular a la hipotenusa del triángulo. Observa que este cuadro ha quedado dividido en cuatro piezas.



4. Con las cuatro piezas obtenidas, más el cuadrado construido sobre el otro cateto, podemos cubrir el cuadrado construido sobre la hipotenusa.
5. Por lo tanto: área del cuadrado 1 + área del cuadrado 2 = área del cuadrado 3, de donde $a^2 + b^2 = c^2$.

1.3 Construcción de polígonos

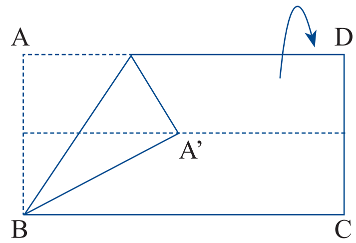
Construcción del triángulo equilátero



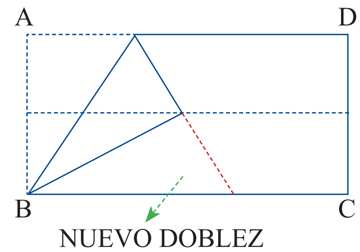
Instrucciones:

1. En una hoja de papel de forma rectangular construye con un doblez una paralela media en el sentido largo.

2. Haz un doblez que pase por el vértice *B* y que lleve el vértice *A* sobre la paralela media y marca el punto *A'*, tal como se muestra en la figura.



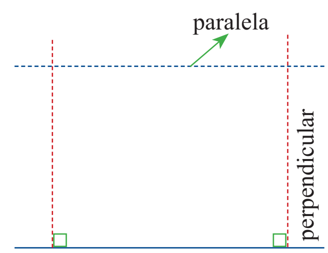
3. Sin desdoblar la figura anterior, haz un nuevo doblez que pase por *el segmento EA'* y llegue al segmento *BC*.
4. Por último, dobla el papel sobrante (vértice *C*) hacia arriba para terminar de formar el triángulo.
5. Superponiendo los ángulos de la región triangular de dos en dos, observa que los ángulos tienen la misma medida. De esta forma has construido un triángulo equilátero.

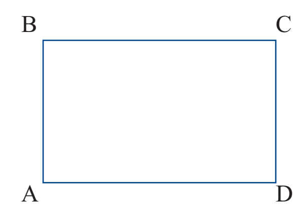


Construcción del rectángulo

En esta sección podrás observar lo fácil que es construir un rectángulo, y lo más interesante aún, lo fácil que es identificar sus elementos y sus propiedades.

1. Toma un pedazo de papel, dobla uno de sus lados y córtalo.
2. Construye con un doblez una paralela al lado que has cortado.
3. Construye dos perpendiculares a las paralelas, tal como se muestra en la figura para completar los lados que faltan al rectángulo.
4. Remarca con un lápiz la figura obtenida.

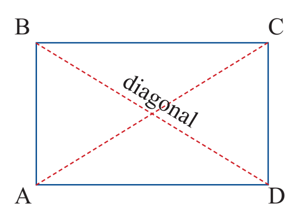




Elementos del rectángulo

¡Vamos a construir las diagonales de un rectángulo!, sigue las instrucciones.

1. Dobla el rectángulo a través de dos de sus vértices no consecutivos. Este doblez recibe el nombre de diagonal ¡qué fácil!
2. Construye la otra diagonal siguiendo el mismo procedimiento.



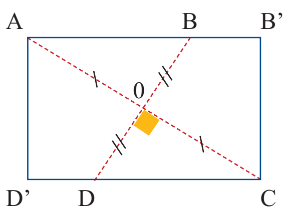
Propiedades del rectángulo

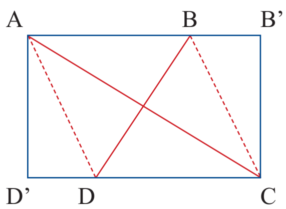
Para poder comprobar las propiedades de los rectángulos, construye varios de diferentes dimensiones.
Superponiéndolos, observa y responde las siguientes preguntas:

¿Los cuatros ángulos son rectos e iguales?
¿Las parejas de lados opuestos son iguales o no?
¿Las medidas de las diagonales son iguales o diferentes?

Construcción del rombo

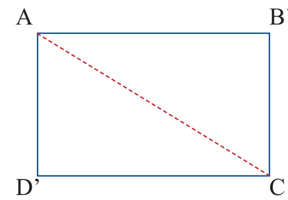
Te presentamos dos formas de construir un rombo; presta mucha atención y sigue cuidadosamente las instrucciones en cada caso.



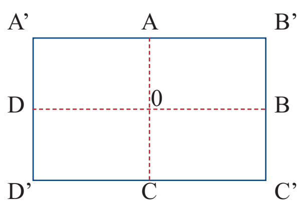


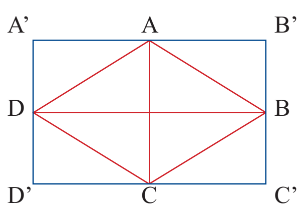
Primera forma:

1. Construye una región rectangular *AB'CD'* y haciendo un doblez de *A* a *C* obtener la diagonal $\overline{AC}$.



2. Sobrepón *A* y *C* para formar un doblez perpendicular a la diagonal en su punto medio (punto 0).
3. El punto *B* se forma de la intersección del doblez del paso 2 con el lado $\overline{AB'}$.
4. El punto *D* se forma de la intersección del doblez del paso 2 con $\overline{D'C}$
5. Dobla de *A* a *D* y corta la región triangular que se forma con los puntos *A*, *D'* y *D*. Haz lo mismo doblando de *B* a *C* y corta la región triangular *B B'C*.
6. De esta forma has obtenido el cuadrilátero *ABCD* que es un rombo.





Segunda forma:

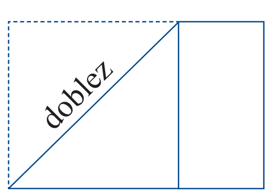
1. Construye una región rectangular *A'B'C'D'*, haz dobleces en mitad superponiendo el lado *A'D'* sobre *B'C'* y *A'B'* sobre *C'D'* para obtener los puntos medios de los lados *A*, *B*, *C*, *D* y el punto central *O*.
2. Haz un doblez que vaya de *A* a *B*, otro que vaya de *B* a *C*, otro de *C* a *D* y otro de *D* a *A*.
3. Corta las regiones triangulares que se forman con los puntos *AA' D*; *AB'B*; *BC'C* y *CD'D*
4. ¡Qué te parece, has obtenido un rombo!
5. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son las diagonales del rombo.

Propiedades del rombo

Comprobemos las propiedades del rombo
Construye un rombo con cualquiera de los dos métodos y por superposición responde las preguntas:

- ¿Los cuatro ángulos son iguales?
- ¿Los diagonales son perpendiculares entre sí?
- Con respecto al punto *O,* ¿es el punto medio de las diagonales?
- Los ángulos opuestos, ¿son iguales o son diferentes?
- El rombo, ¿es un paralelogramo?

Construcción del cuadrado

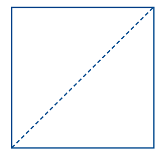


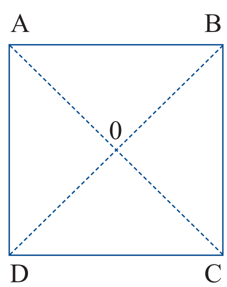
Aquí te presentamos la secuencia para construir un cuadrado y, al igual que las figuras anteriores, podrás comprobar sus propiedades.

1. Toma un rectángulo cualquiera y dóblalo de tal manera que un lado corto coincida con un lado largo. El resultado es una figura hecha por un triángulo y un rectángulo más pequeño.
2. Dobla por la línea que une el triángulo con el rectángulo pequeño y corta por ahí utilizando una tijera o una navaja.
3. Al quitar el rectángulo pequeño, te quedará únicamente un triángulo doble; desdóblalo y obtendrás un cuadrado.

Determinemos las partes del cuadrado

1. Construye un cuadrado y haz un doblez que vaya de esquina a esquina. ¿Cómo llamamos a este doblez?
2. Haz otro doblez con el otro par de esquinas.





3. Observa los puntos donde se cortan los dobleces. ¿Cómo se llama a este punto?, ¿cómo divide este punto a cada uno de los dobleces entre sí?, ¿qué ángulo forman los dobleces entre sí?

Comprobemos si el cuadrado es un caso particular de los rectángulos

Para realizar la comprobación es conveniente que trabajes con cuadrados de diferentes dimensiones. Para ello toma un cuadrado de papel y en él aplica las propiedades del rectángulo. Observa y responde:

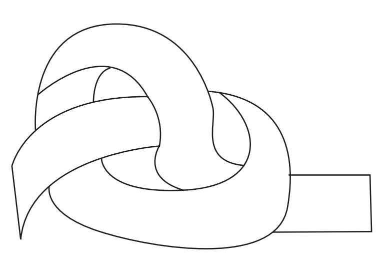
- ¿Los cuatro ángulos son iguales?
- ¿Los lados opuestos entre sí son iguales?
- ¿Los ángulos opuestos son iguales entre sí?
- ¿Es el cuadrado un caso particular de los rombos?

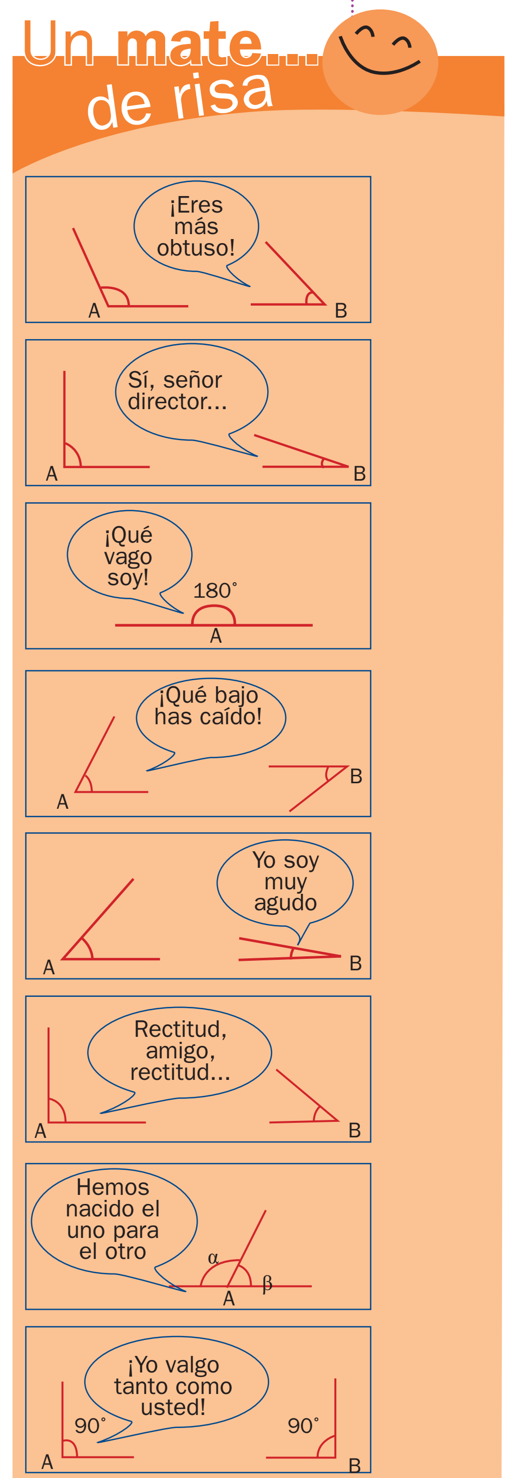
Construcción de un pentágono regular

Te vamos a presentar dos formas de construir un pentágono. Sigue detenidamente las instrucciones de cada caso.

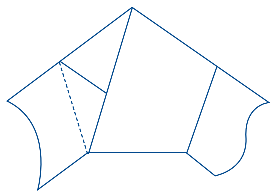
Primera forma:
Para construir un pentágono regular solo necesitas tener una tira de papel de unos 5 cm × 50 cm y mucha destreza con las manos.
¡Adelante!

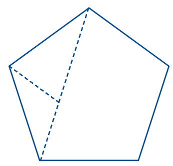
1. Toma la tira y haz los movimientos necesarios como para hacer un nudo. Ve ajustando, sin llegar a hacer el nudo tal como lo harías con una cuerda cualquiera.
2. Observa que irá tomando forma de un pentágono. Ajusta y aplana lo suficiente para que todos los pliegos estén completamente encajados (no debe quedar espacios vacíos).
3. Corta los extremos de las tiras sobrantes para que te quedes solo con el pentágono formado.

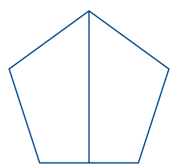


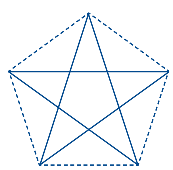


http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~41011038/DepMates/Matematicos.htm







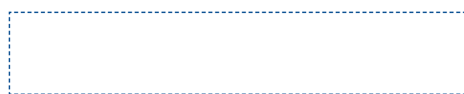


Lo interesante de esta construcción es que podrás comprobar su regularidad, para ello superpón un lado con el consecutivo, este con el siguiente, y así sucesivamente.

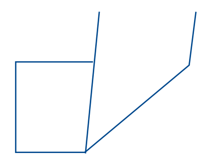
Ahora, con dobleces, construye sus diagonales y observa los triángulos que se forman en el interior. Indica qué clase de triángulos son.
¿Qué más puedes observar en esta construcción?

Segunda forma:
También puedes construir un pentágono realizando dos dobleces en la tira, hacia arriba y dos dobleces hacia abajo, consecutivamente, como se muestra a continuación. Esta secuencia fue tomada de la página *web* *http://www.sectormatematica.el/origami/oripen.htm.*

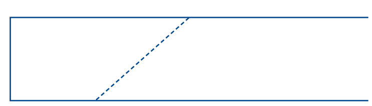
1. Inicia con una tira de papel.



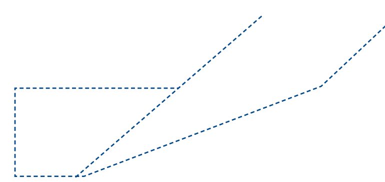
2. Dobla hacia arriba en cualquier ángulo.



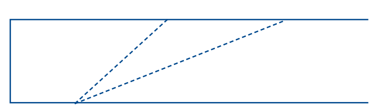
3. Desdobla la tira de papel, te debe quedar como la figura:



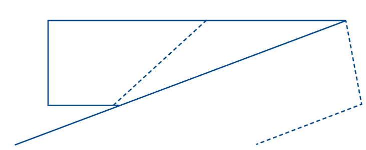
4. Nuevamente dobla hacia arriba siguiendo el doblez anterior.



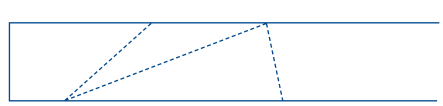
5. Desdobla. Debe quedarte como la figura:



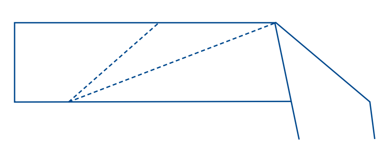
6. Dobla ahora hacia abajo siguiendo el doblez anterior:



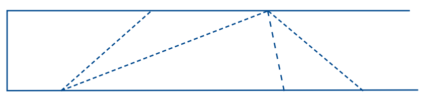
7. Desdobla nuevamente:



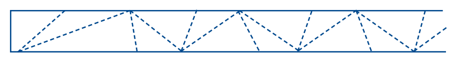
8. Dobla otra vez hacia abajo siguiendo el último doblez:



9. Desdobla nuevamente:

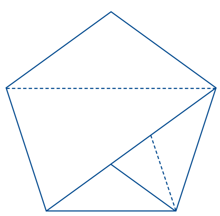


10. Continúa doblando consecutivamente dos veces hacia arriba y dos veces hacia abajo, siempre siguiendo el doblez anterior, y queda algo así:

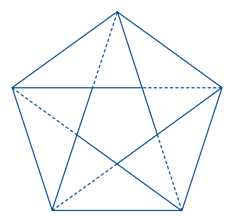


En la tira puedes observar dobleces cortos y largos.

Si usas los dobleces cortos, obtendrás un pentágono como el de la figura:



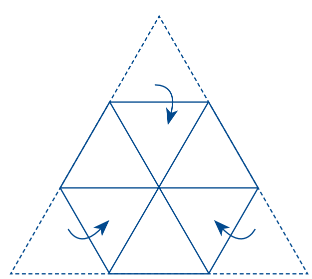
Si usas los dobleces largos, obtendrás un pentágono como el de la figura:



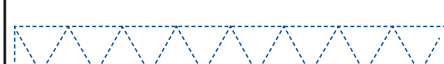
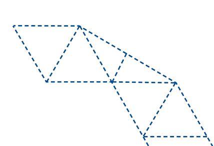
Construcción de un hexágono regular

Te vamos a mostrar dos formas de construir un hexágono regular doblando papel.

Primera forma:
1. Construye el triángulo equilátero y localiza su centro.
2. Dobla los vértices de triángulo hacia el centro.
3. Observa el polígono obtenido, ¡has construido un hexágono!



Segunda forma:
La forma de construir este hexágono la hemos tomado de la página *web*. *http://www.sectormatematica.cl/origami/oriexa.htm* Sigue cuidadosamente la secuencia presentada.

1. Iniciamos con una tira de triángulos equiláteros construidos con dobleces. Elimina los primeros triángulos rectángulos.	
2. Se realiza un doblez secundario, para lo cual doblas la tira hacia abajo, exactamente como puedes observar en la figura.	

curiosidades **matemáticas**

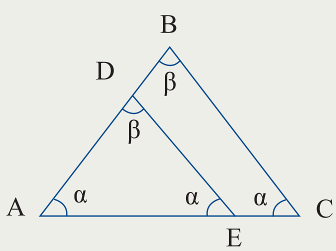
¡El poder curativo de los poliedros!
¿Sabías que los poliedros colocados en ciertos órganos de nuestro cuerpo reordenan su energía, y por ende la energía de todo el organismo? Este tratamiento con poliedros, conjuntamente con la homeopatía, resulta ser una poderosa terapia para muchas enfermedades, inclusive las más destructivas para el ser humano, como son: el cáncer, el sida, el lupus, la esclerosis múltiple, la artritis deformante, algunos tumores, algunos tipos de parálisis, alergias, asma o tos crónica y otros. También tienen poder curativo en enfermedades de estado mental y emocional como estados depresivos, estrés, angustia, ansiedad, temores, etc.

Lados homólogos

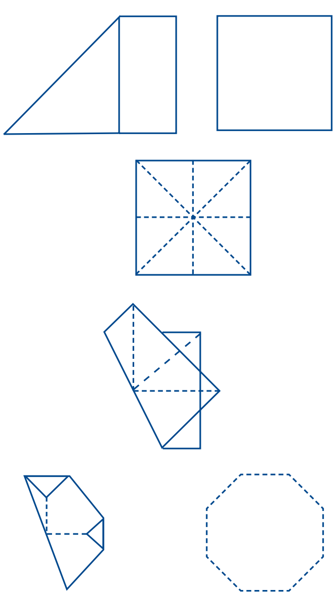
Son aquellos lados de dos polígonos que unen pares de vértices de ángulos respectivamente iguales.

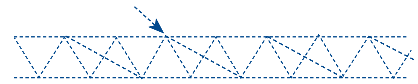
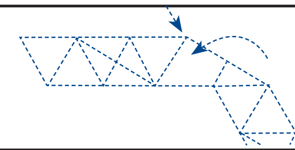
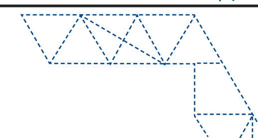
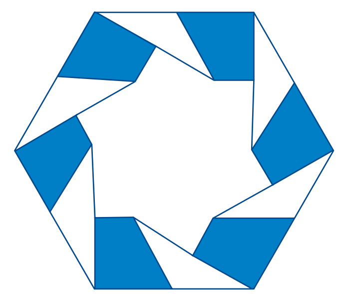
Razón de semejanza

La razón de semejanza es la razón de dos lados homólogos. Si conocemos un lado de un polígono, podemos construir un polígono semejante a él, haciendo su lado homólogo el doble, el triple, la mitad, la tercera parte, etc.



Si: BC//DE son lados homólogos
$\overline{AB}$ y $\overline{AD}$
$\overline{AC}$ y $\overline{AE}$



3. A intervalos regulares realiza el mismo doblez secundario. PLIEGA la tira siguiendo el doblez indicado por la flecha, de tal manera que los dos puntos queden uno sobre el otro:	
4. Ahora pliega siguiendo el doblez indicado por la flecha, como si se estuviera TORCIENDO la tira.	
5. El resultado es el que puedes observar en la figura, siendo este un vértice del hexágono.	
6. Nuevamente PLIEGA la tira siguiendo el doblez indicado por la flecha, de tal manera que los dos puntos queden uno sobre el otro y repite los pasos 4 y 5 a intervalos regulares. El hexágono que obtendrás será como se muestra en la figura.	

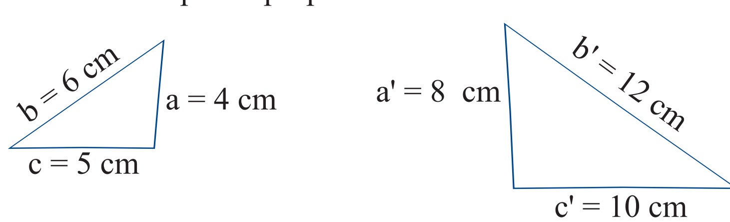
Construcción de un octógono regular

Veamos cómo obtener mediante plegado un octógono regular a partir de un cuadrado.

1. Parte de un cuadrado que puedes haber obtenido a partir de una hoja rectangular.
2. Doblando, construye los ejes de simetría del cuadrado.
3. Ahora, dobla haciendo coincidir dos ejes consecutivos.
4. Sin desdoblar la figura, dobla los cuatro puntos y luego desdoblamos.
5. Observa la figura ¡has obtenido un octágono regular!

1.4 Proporcionalidad

Para tener claro el concepto de proporcionalidad consideremos las siguientes figuras:



Si realizamos la división entre los lados homólogos (correspondientes)

$$\frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6} = 2$$

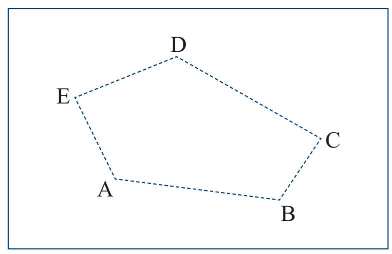
Observamos que el resultado que se obtiene es 2.
Este valor recibe el nombre de razón y cuando la razón es igual en todos y cada uno de los lados correspondientes, decimos que los lados son proporcionales, en este caso, 2 es la razón de proporcionalidad. En conclusión decimos que una igualdad entre dos fracciones se llama proporción.
El cociente de las fracciones de una proporción se llama constante de proporcionalidad o razón de la proporción.

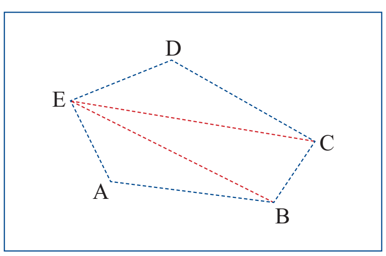
Construcción de polígonos semejantes

En esta parte del fascículo vas a construir polígonos semejantes de más de tres lados; para ello es importante que sigas correctamente las indicaciones y con un poco de paciencia y habilidad manual lograrás con éxito las actividades propuestas.

Primera forma
Instrucciones

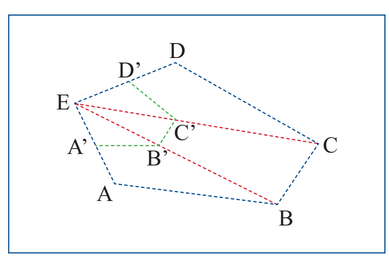
1. Realizando pliegues en una hoja de papel, construye una región poligonal como la que se muestra en la figura. Llámalo polígono *ABCDE*.

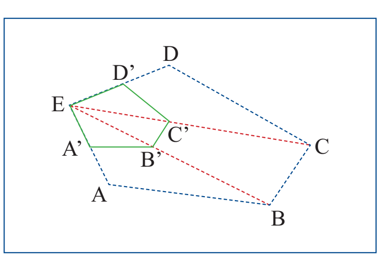




2. Con otros dos dobleces, construye las diagonales desde uno de los vértices. Observa que estas diagonales dan origen a tres regiones triangulares: *EAB*, *EBC* y *ECD*.

3. En uno de los lados que forma el vértice *E*, marca un punto *A'*, por ejemplo en $\overline{EA}$. Por este punto, con un doblez, construye una paralela al lado $\overline{AB}$ que corte a $\overline{EB}$ en *B'*. Desde este punto construye otra paralela a $\overline{BC}$, que corte a $\overline{EC}$ en *C'*. Desde *C'* construye la paralela a $\overline{CD}$, que corta a $\overline{ED}$ en *D'*.



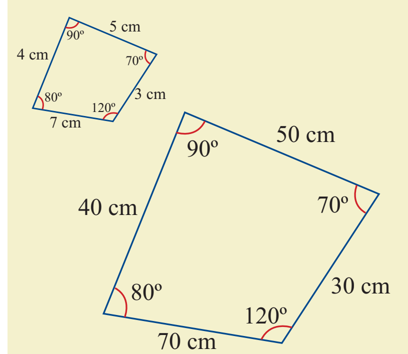


4. Traza el segmento que une los puntos y observa que los puntos *E*, *A'*, *B'*, *C'* y *D'* son los vértices del polígono semejante construido cuyos lados son: $\overline{EA'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ y $\overline{D'E}$. En este caso el polígono construido es de menor dimensión que el que se tenía inicialmente.

¡Atención!

En Matemática, el concepto de semejanza está muy ligado a proporcionalidad. Decimos que dos figuras son semejantes si guardan una proporción entre cada una de sus partes respectivas.

Polígonos semejantes
Consideremos los siguientes polígonos convexos con igual número de lados, tales que los ángulos interiores correspondientes son congruentes y las razones entre los lados son iguales. Diremos que dichos polígonos son semejantes.

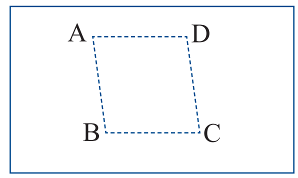


Polígonos semejantes donde la razón es 10.

Segunda forma

Te presentamos un ejemplo:

A partir del polígono ABCD de la figura, construye un polígono semejante cuyos lados homólogos sean el triple.



Resolución:

Para construir el polígono semejante seguimos los siguientes pasos:

1. Partimos del polígono *ABCD* y con un doblez prolongamos $\overline{AB}$.
2. Sobre la prolongación de $\overline{AB}$ llevamos dos veces el segmento $\overline{AB}$ (con dos dobleces), llega al punto *B*'.
3. Desde el punto A traza la diagonal $\overline{AC}$ y prolóngala. Prolonga también el lado $\overline{AD}$.
4. Por el punto B' con un doblez, construye una paralela a $\overline{BC}$, que intersecta a la prolongación de $\overline{AC}$ en *C*'.
5. Desde *C*' con un doblez, construye una paralela a $\overline{CD}$ que corte a la prolongación de $\overline{AD}$.

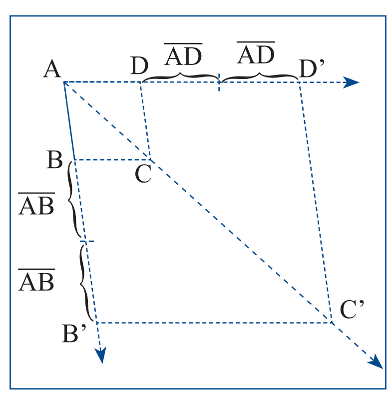
   $\overline{AB'}$ es el triple de *AB*. Comprueba haciendo dobleces que:

   $\overline{B'C'}$ es el triple de $\overline{BC}$

   $\overline{C'D'}$ es el triple de $\overline{CD}$

   $\overline{A'D'}$ es el triple de $\overline{AD}$

Así pues, la razón de semejanza de los polígonos *ABCD* y *AB*' *C*'*D*' es 1/3. Mide el primer polígono y el segundo y comprueba que se hallan en la relación 1/3.



Actividad 1

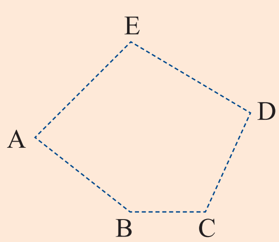
Identifica postulados geométricos y propiedades básicas de las figuras planas a través de construcciones geométricas básicas, mostrando creatividad.

1. Recorta diferentes triángulos (acutángulo, rectángulo, obtusángulo) y haz los dobleces pertinentes en cada uno de ellos para encontrar el incentro, baricentro, ortocentro y circuncentro. Observa y responde: ¿están siempre estos puntos en el interior del triángulo? Anota y comparte con tus compañeros tus conclusiones. Recuerda, todas las opiniones son valiosas y deben ser escuchadas con respeto.

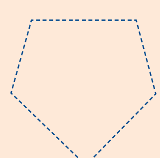
2. Si el baricentro en un triángulo dista de los puntos medios de los lados 5 cm, 6 cm y 7 cm respectivamente, calcula el valor de las medianas. Compara tu resultado con el de tus compañeros, si encuentras resultados diferentes, discute para llegar a un consenso al respecto.

3. La razón de semejanza de dos polígonos es 1/3 ¿Cuál es el perímetro del primero, si el perímetro del segundo es 36 cm?

4. Construye el polígono *ABCDE* y uno semejante a él de modo que la razón de semejanza sea ¼ .

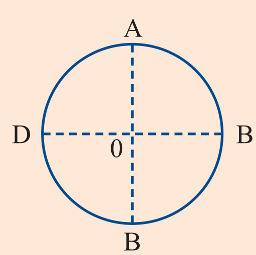


5. Construye un polígono semejante a la figura de la derecha mediante la primera y segunda forma presentada en el fascículo.

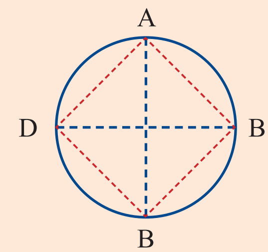


6. Realiza con tus compañeros las siguientes construcciones. Para ello elijan un modelador que guíe la secuencia de la construcción, teniendo presente que todas las personas tienen algo valioso que compartir.

   - Traza una circunferencia de centro *O* y recórtala.
   - Dobla en cuatro el círculo, remarca bien los dobleces.

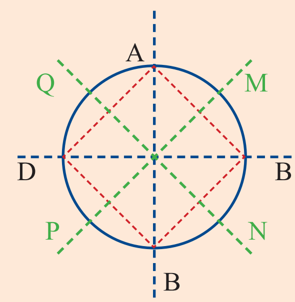


   - Marca con los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, las intersecciones de los dobleces con la circunferencia.



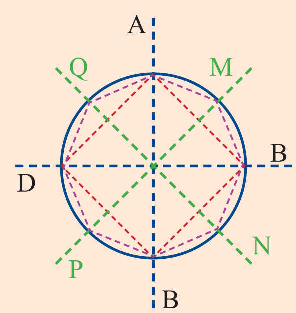
   - Haz dobleces de *A* a *B*, de *B* a *C*, de *C* a *D* y de *D* a *A*. Marca con lápiz los dobleces.

     ¿Qué figura geométrica has obtenido?
   - Construye los demás ejes de simetría de la figura obtenida y marca los puntos *M*, *N*, *P Q*, (los ejes de simetría pasan por los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *M*, *N*, *P* y *Q*).



   - Haz dobleces de *A* a *M*, de *M* a *B*, de *B* a *N*, de *N* a *C*, *C* a *P*, de *P* a *D*, de *D* a *Q* y de *Q* a *A*, marca con lápiz.

     ¿Qué figura has obtenido?



en grupo...

investiga *con tus compañeros*

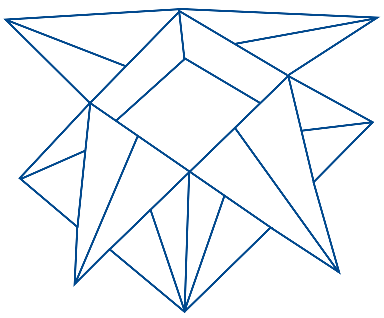
Reúnete con tus compañeros e investiga qué otros polígonos regulares puedes construir en el interior de una circunferencia solo haciendo dobleces.

Tengan presente lo siguiente:

- Todos los aportes son valiosos y deben ser escuchados con atención, respeto y agrado.
- Si encuentran ideas contrarias, discutir para llegar a un consenso al respecto .
- Elaboren un informe y compárenlo con sus demás compañeros de la clase.

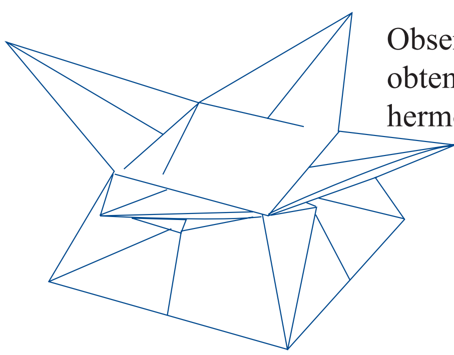
2. CONSTRUCCIONES MODULARES

2.1 Construcción de cajas

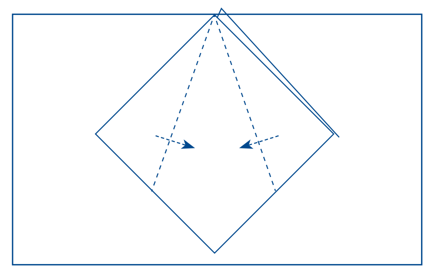


Las cajas constituyen un apartado importante en el universo de la papiroflexia; para reforzar el concepto de polígono (cuadrado, triángulo, pentágono, hexágono, etc.), resulta muy motivadora la construcción de cajas de distintas formas. Los dobleces necesarios para conseguir el ángulo adecuado en cada caso nos llevan a un interesante estudio y a un campo para la investigación por parte del alumno de cómo conseguir el objetivo que se pretende.
Realizaremos la construcción de una cajita estrellada.

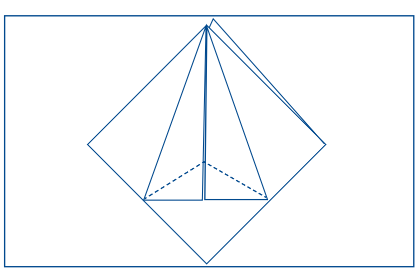
CAJITA ESTRELLADA



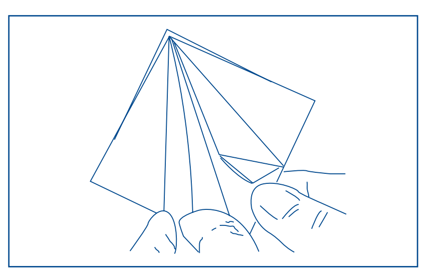
Observa las formas geométricas que irás obteniendo en la construcción de esta hermosa cajita.



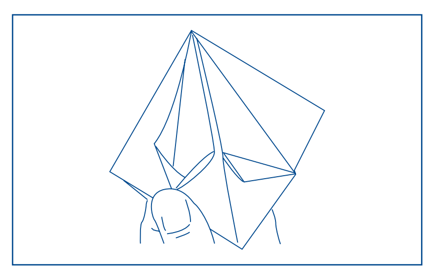
1. Construye un cuadrado de papel y dóblalo tal como se muestra en la figura. La esquina abierta queda hacia arriba. Dobla sobre la línea central.



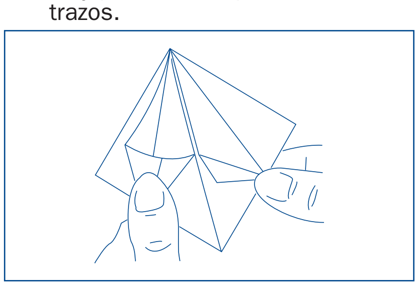
2. Las dos alas superiores por las líneas auxiliares. Hacer un doblez muy pronunciado por las líneas de trazos.



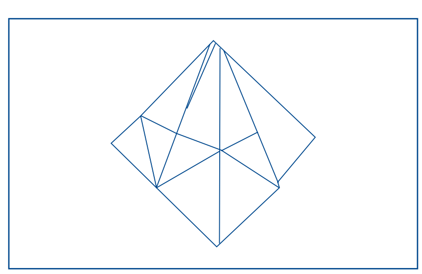
3. Levantar verticalmente un ala…



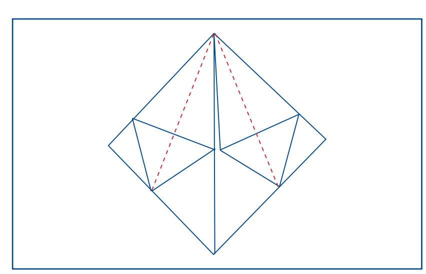
4. …abrirla…



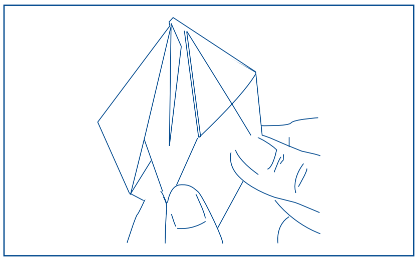
5. … y aplastarla…



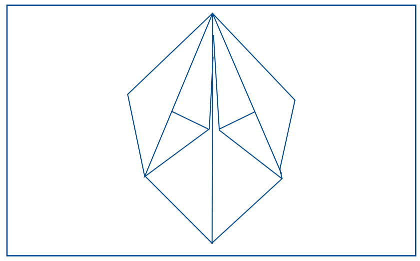
6. Alisar con fuerza el doblez.



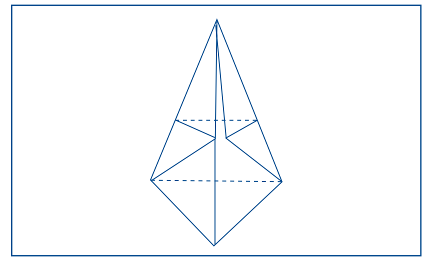
7. Repetir lo mismo con la otra ala. Dar la vuelta a la figura y repetir por este lado los pasos 2 a 6. Por la marca…



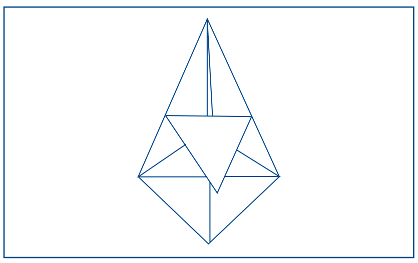
8. …dar la vuelta a las dos alas exteriores de arriba hacia atrás y hacia dentro.



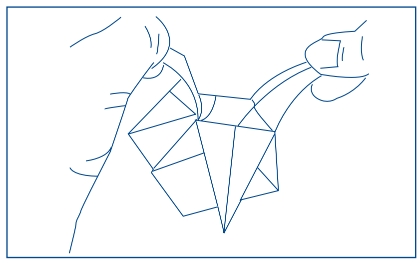
9. Alisar los dobleces, dar la vuelta a la figura y repetir el paso 8.



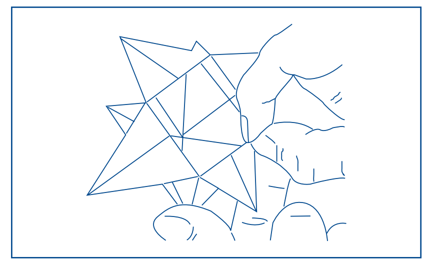
10. Hacer dos dobleces pronunciados por las líneas de trazos.



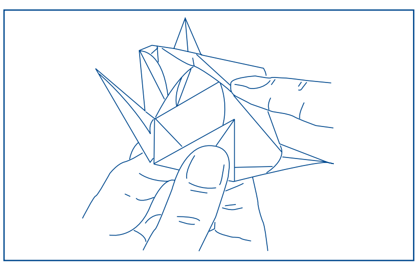
11. Doblar la punta anterior hacia delante y hacia abajo, y la punta de atrás hacia atrás y hacia abajo. Alisar los dobleces.



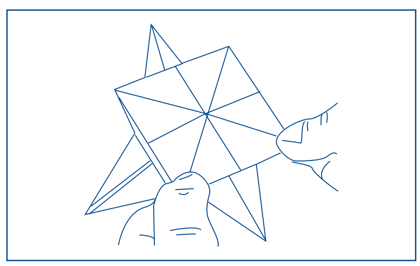
12. Separar con cuidado las puntas superiores, izquierda y derecha y abrir lentamente la cajita estrellada.



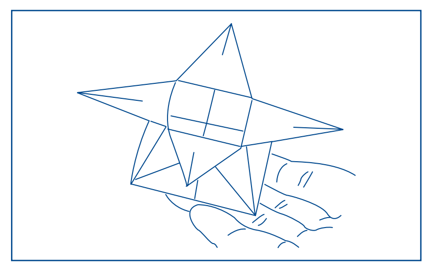
13. Alisar los cuatro lados superiores de la cajita.



14. Con ayuda de los dobleces previos dar a la base una forma cuadrada.



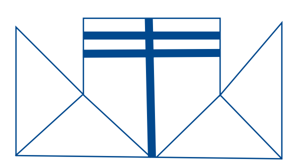
15. Alisar también los lados.



16. Esta es la cajita terminada.

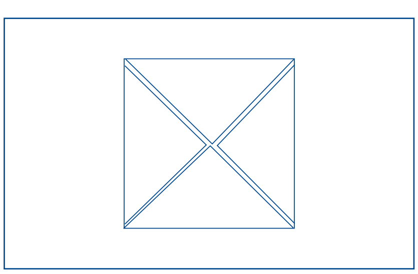
Comparte con tus compañeros la experiencia realizada y elabora un informe de todas las figuras geométricas que has ido obteniendo al realizar los dobleces.

2.2 Construcción de barcos

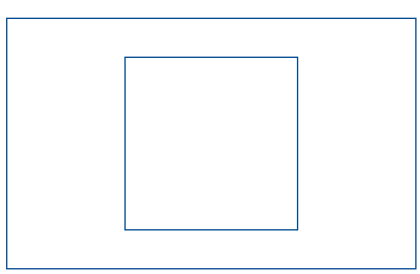


¡Vamos a construir un barco a vapor!, sigue la secuencia y observa las figuras geométricas que se van formando.

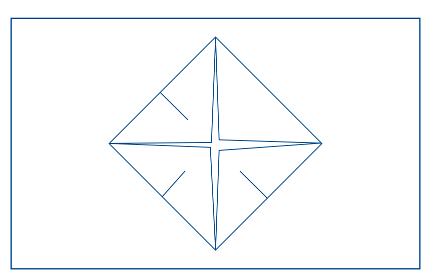
BARCO A VAPOR



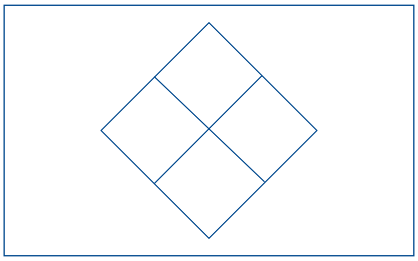
1. Toma un pedazo de papel cuadrado y dóblalo como se muestra en la figura. Dar la vuelta a la figura.



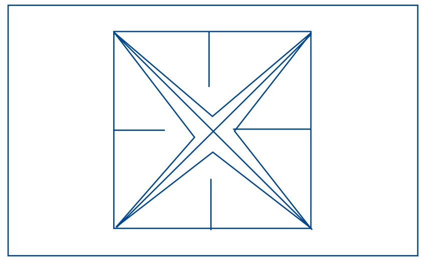
2. Las cuatro esquinas…



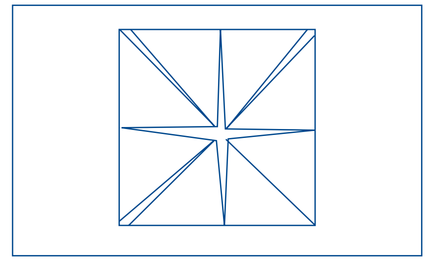
3. …doblarlas sobre el punto central dar la vuelta otra vez a la figura.



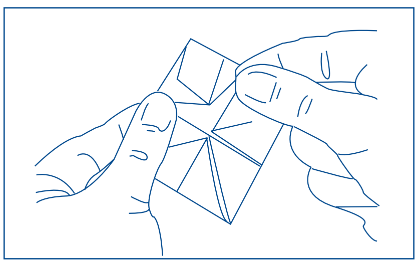
4. Las cuatro nuevas esquinas...



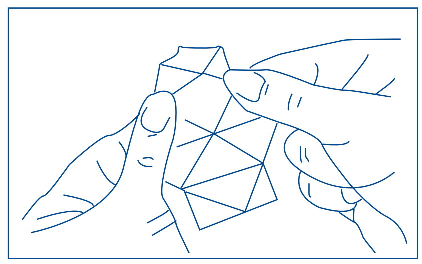
5. Doblarlas sobre el centro. Dar la vuelta a la figura.



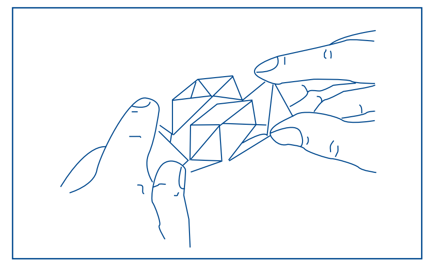
6. Ahora hay cuatro pequeños cuadrados en un cuadrado grande.



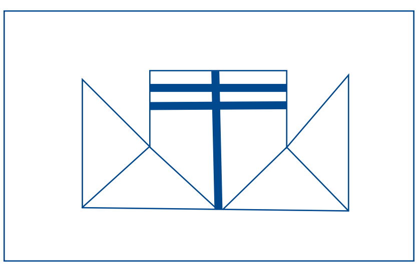
7. Abrir uno de los pequeños cuadrados y aplastarlo.



8. Repetir lo mismo con el cuadrado de enfrente. Estas serán las dos chimeneas.



9. Saca hacia afuera las esquinas del tercer cuadrado y cuarto cuadrado que están juntas en el punto central y entonces doblar, una sobre la otra, las dos chimeneas.



10. Pintar los anillos de las chimeneas con un lápiz de color. El barco de vapor puede hacerse a la mar.

Comparte con tus compañeros la experiencia realizada en la construcción de la cajita estrellada y elabora un informe de todas las figuras geométricas que has ido obteniendo al realizar los dobleces.

Actividad 2

Investiga y propón actividades que permitan reconocer figuras geométricas a través de construcciones modulares, manifestando creatividad y confianza en tus habilidades.

en grupo...

investiga *con tus compañeros*

Reúnete con dos compañeros y compañeras de aula para investigar:

1. ¿Qué otras construcciones puedes realizar donde se observen claramente figuras geométricas como las presentadas en este fascículo? Recuerda, ¡solo doblando papel!
2. Elaboren un informe con los procedimientos de construcción y sus respectivos gráficos. Cuando hayan concluido, compartan con sus demás compañeros de clase lo investigado. Recuerden todos tenemos algo valioso que aportar, por lo tanto hay que escuchar con atención y respeto.

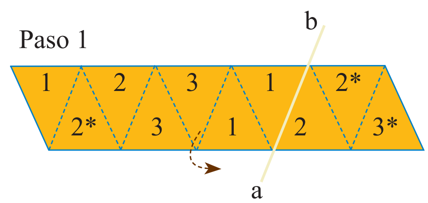
3. FLEXÁGONO

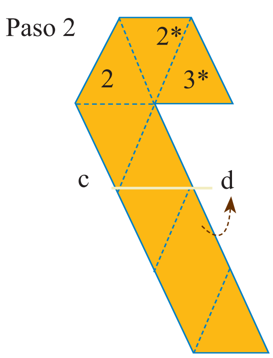
En geometría, el flexágono es un modelo plano hecho de cintas plegadas de papel que pueden ser dobladas para revelar un número de superficies ocultas.

3.1 Trihexaflexágono

El trihexaflexágono tiene tres diversas caras. Para hacer un trihexaflexágono sigue estos pasos fáciles.

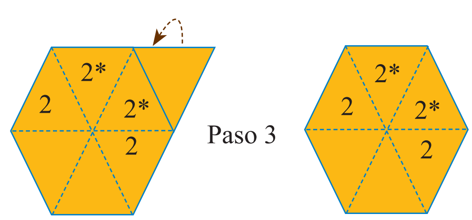
Paso 1: Corta una tira del papel y marca diez triángulos equiláteros. Numera los triángulos y pliega a lo largo de las líneas que ensamblan los triángulos. Dobla la tira detrás a lo largo de la línea *ab* marcada.



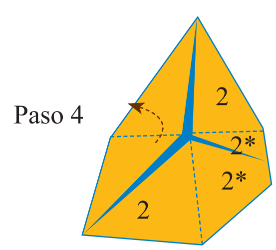


Paso 2: Dobla la tira detrás a lo largo de la línea *cd* marcada.

Paso 3: Dobla el triángulo etiquetado 1 y pegalo a la parte posterior del triángulo etiquetado 3*.



Paso 4: Para cambiar la cara de tu trihexaflexágono, coloca tu pulgar e índice en los dos triángulos etiquetados 2* y pellízcalos juntos a sus partes posteriores que se tocan. Da la facilidad del centro hacia fuera el borde interno de los dos triángulos no marcados, de modo que tu trihexaflexágono sea plano.
Ahora puedes tener cierta diversión. Colorea las tres diversas caras de tu trihexaflexágono con diversos diseños y comienza a doblar.



3.2 Hexaflexágono

El hexaflexágono se construye a partir de una plantilla que sea esencialmente una cadena de triángulos que, cuando es "doblado", revelan muchas características curiosas. La figura que se forma al utilizar el plegamiento de papel para crear una figura de tres dimensiones que se base en un hexágono, se llama un hexaflexágono.
Cuando la figura tiene seis caras hexagonales se le conoce como hexahexaflexágono.

Un mate... de risa

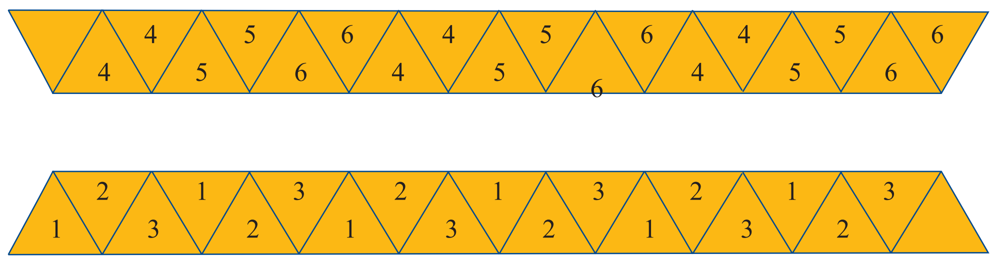
¿En qué se parecen un toro y un triángulo? El toro es un animal bruto, Brutus mató a César, César no es nada, el que nada no se ahoga, el que no se ahoga flota, una flota es una escuadra y una escuadra es un triángulo.

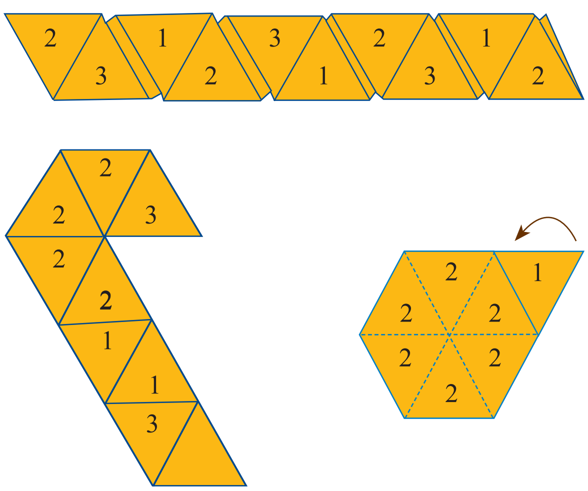
http://www.sitiochistes.com/view.php?joke=5467

Un hexahexaflexágono tiene seis diversas caras.

Construye un hexahexaflexágono como sigue:

Paso 1: Toma un pedazo más largo de papel (casi dos veces en relación al trihexaflexágono) y marca 19 triángulos equiláteros como se muestra. Etiqueta cuidadosamente los triángulos en ambos lados del papel (como se muestra arriba) y del pliegue a lo largo de las líneas que ensamblan los triángulos.





Paso 2: Dobla de modo que los triángulos etiquetarán la cara 4, al igual que los triángulos etiquetados 5 y los triángulos etiquetados 6. Esencialmente estás envolviendo el papel en un espiral. Tu tira debe ahora asemejarse a lo usado para hacer el trihexaflexágono.

Paso 3: Dobla y pega como en las instrucciones para el trihexaflexágono. Debes encontrar que todos los triángulos en cada lado tienen el mismo número.
Comienza a doblar y ve si puedes encontrar todos los otros lados (algunos lados son más difíciles de encontrar que otros), los cuadros del color o de la goma en las seis diversas caras y flexiones ausentes. ¿Cuántos diversos patrones puedes hacer?

Actividad 3

Aplica conceptos geométricos a través de la construcción de flexágonos, manifestando confianza en tus habilidades.

1. Construye con tus compañeros trihexaflexágonos y hexaflexágonos con motivos ecológicos, sociales, etc.

en grupo...

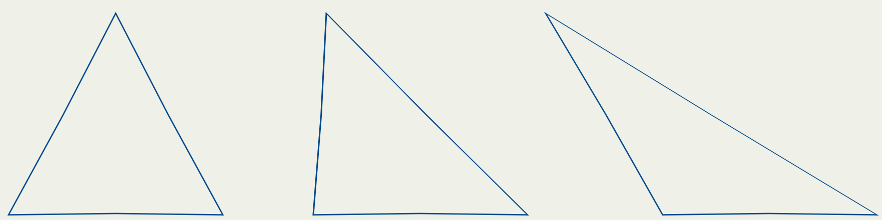
investiga *con tus compañeros*

Investiga sobre la construcción de otros tipos de flexágonos en las siguientes páginas *web* sugeridas. Discute con tus compañeros lo investigado; recuerda que todas las opiniones son valiosas y deben ser escuchadas con atención y respeto.
http://translate.google.com/translate?

4. EVALUACIÓN

Lee atentamente y, luego de analizar cada pregunta o actividad, da soluciones a lo que se refiere.

1. En los siguientes triángulos, construye las alturas y encuentra el ortocentro en cada uno de ellos.

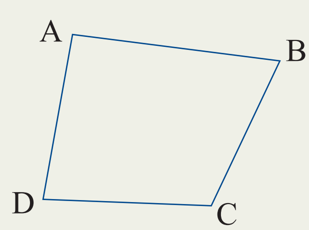


2. ¿Qué propiedad tienen las medianas de un triángulo?

3. Si el baricentro en un triángulo dista de los puntos medios de los lados 7 cm; 8 cm y 9 cm respectivamente. ¿Cuánto miden las medianas?

4. La razón de semejanza de dos polígonos es 4. ¿Cuál es el perímetro del segundo, si el perímetro del primero es de 36?

5. Construye un polígono semejante a ABCD de modo que la razón de semejanza sea 2.



6. La razón de semejanza de dos polígonos es 2/5. Sabiendo que los lados del primero miden 6; 4; 3 y 2 cm, calcular los lados del segundo.

7. ¿Qué clase de triángulos se observan en la construcción de la cajita decorativa y del barco?
   ¿Qué otras figuras geométricas observaste en su construcción?

5. Metacognición

Metacognición es la habilidad de pensar sobre el discurso del propio pensamiento, es decir, sirve para darnos cuenta cómo aprendemos cuando aprendemos.

Responde en una hoja aparte:

1. ¿De qué manera te organizaste para leer el fascículo y desarrollar las actividades propuestas?
2. ¿Te fue fácil comprender el enunciado de las actividades? ¿Por qué?
3. Si no te fue fácil, ¿qué hiciste para comprenderlo?
4. ¿Qué pasos has seguido para desarrollar cada una de las actividades?
5. ¿Cuáles de estos pasos te presentaron mayor dificultad?
6. ¿Cómo lograste superar estas dificultades?
7. Al resolver la evaluación, ¿qué ítems te presentaron mayor dificultad?
8. ¿Qué pasos has seguido para superar estas dificultades?
9. ¿En qué acciones de tu vida te pueden ayudar los temas desarrollados en este fascículo?
10. ¿Qué nivel de logro de aprendizaje consideras que has obtenido al finalizar este fascículo?

Muy bueno	Bueno	Regular	Deficiente

¿Por qué?

11. ¿Crees que las actividades de investigación fueron realmente un trabajo de equipo? Explica.
12. ¿Tuviste la oportunidad de compartir tus conocimientos con algunos de tus compañeros? ¿Qué sentimientos provocaron en ti este hecho?

BIBLIOGRAFÍA *comentada*

1. González González, Noraísa y Víctor Larios Osorio. **El doblado del papel: una experiencia en la enseñanza de la Matemática.** México. ANPM/ENSEM, 1994.

   Contiene los puntos esenciales que desarrollamos en este fascículo.

2. Gutiérrez Rodríguez, Ángel y Adela Jaime Pastor. **Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática.** México. Grupo Editorial Iberoamérica S.A., 1995.

   Contiene reflexiones sobre la enseñanza de la Matemática y por qué los estudiantes no comprenden la Geometría.

3. Rivera Gómez, Juan José. **Matemáticas**. Barcelona. Ediciones CEAC, 1985.

   Presenta los contenidos matemáticos de una manera didáctica, facilitando su comprensión. Está elaborado con el objeto de que el estudiante adquiera hábitos y métodos propios del pensamiento matemático.

4. Ubaldo Caballero, Luis. **Geometría.** Lima. Editorial San Marcos, 2005.

   Contenidos generales de geometría plana y del espacio.

5. Zubieta Badillo, Gonzalo. **La enseñanza de la geometría en el bachillerato.** México. Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.

   Encontraremos demostraciones matemáticas e investigaciones en el área del nivel superior.

ENLACES *web*

1. *http://www.divulgamat.net/weborriak/Cultura/papiroflexia/Pitagoras.asp*
Publica retos matemáticos, historia de la Matemática, textos *on-line*, exposiciones virtuales, recursos en la internet y enlaces interesantes.

2. *http://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/Estalmat/doblandopapel.pdf*
Presenta amplia información sobre construcciones geométricas doblando papel.

3. *http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_Theorem*
Página en inglés que ilustra y explica la demostración del teorema de Pitágoras.

4. *http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=61&Itemid=66*
Revista digital de divulgación matemática, presenta información sobre la construcción de poliedros a través de la papiroflexia modular.

5. *http://www.pajarita.org/index.php*
Sitio oficial de la asociación cultural española donde se promueve y difunde la práctica de la papiroflexia

6. *http://es.geocities.com/cibernenes/papiroflexia.htm*
En esta página enseñan de manera práctica y sencilla la manera de hacer muchas cosas con un simple trozo de papel.

7. *http://wwwarturosoria.com/botanica/art/abejas.asp*
Esta página presenta información sobre la vida social de las abejas y su trabajo en la colmena.

8. *http://www.uninoja.es/cu/luhernan/dival/poliedros/imagenespoliedrales/s1d007.html.*
En esta página se presenta diversas imágenes con formas poliedrales, entre ellas, el panal de abejas.