LABERINTOS CON ALAMBRE
(ESTRUCTURAS TOPOLÓGICO – MÉTRICAS)

Pablo Flores Martínez
pflores@ugr.es

Introducción

Actualmente están proliferando materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas. Se nos han hecho familiares los rompecabezas de teselaciones, como el TANGRAM, los pentominós, etc., así como el cubo soma y sus variantes para la enseñanza de la geometría. Gracias a estos materiales se pueden introducir en clase, de manera lúdica e instructiva, actividades que facilitan la percepción del espacio (con los materiales que exigen el manejo de formas y su relación con la teselación) y el establecimiento de relaciones métricas de comparación directa, como la de superficies y longitudes (con el Tangram, pentominós y similares). Uno de los aspectos más interesantes de la enseñanza de la geometría es la percepción de los huecos y cierres que aparecen en una figura o en una estructura de las que se encuentran en la vida cotidiana. Va difundiéndose el estudio matemático de nudos y redes (-añadir teoría de nudos y artículo de Mat. Teacher -, Coriat y otros, 1989, Gardner, 1956, otros), así como el tratamiento por grafos de estos temas (Steward., 1975).

En este artículo abordamos "nudos en alambre", es decir, estructuras en alambre que presentan nudos aparentes, y que tienen una finalidad lúdica, pero que pueden utilizarse en la enseñanza para facilitar la percepción de huecos y rellenos en el espacio. El estudio de los laberintos en alambre afectan de manera directa a la topología, aunque su textura le obliga a tomar en consideración aspectos métricos y de estudios de formas rígidas, que se saldría de esta rama de las matemáticas.

Quiero presentar unos rompecabezas muy antiguos. John Rausch, en su página web, sitúa en 1911 su difusión en conjuntos de puzzles, pero su origen es anterior. Mi afición proviene de una caja de juegos de mis abuelos –principio de siglo-, llamada *LABERINTÍN*, de ahí el llamarlos laberintos en alambre. Aunque no están muy difundidos, aun siguen de actualidad, y el motivo de traerlos a colación es la posibilidad de utilización en clase de matemáticas para favorecer la percepción de aspectos topológicos y métricos de figuras. Se trata de laberintos de alambre, figuras que se pueden encontrar en algunos vendedores ambulantes, generalmente fabricantes de los mismos, o que han llegado a comercializarse en tiendas especializadas, y que pueden adoptar formas variadas y estéticas, además de incluir estructuras ingeniosas que encierran “falsos nudos”.

1. Laberintos de alambre.

Un laberinto **(**Santarcangeli,1984)**,** es *un camino tortuoso en el que a veces es fácil perder el camino sin un guía*. Una forma de encontrar la salida es hacer una representación del mismo (dibujar un laberinto equivalente más simple), en el que aparezcan los caminos, las puertas que cierran, etc. Transformar un laberinto en otro equivalente es hacer una transformación ***topológica*** del mismo. *La **topología** es el estudio de aquellas propiedades de los objetos geométricos que permanecen inalteradas por <u>transformaciones continuas</u> (en ellas no está permitido ni desgarrar ni romper). <u>Propiedades topológicas</u> son el número de <u>agujeros</u> y número de <u>aristas</u>.* (Stewart, 1975).

Con alambres es posible hacer laberintos tridimensionales, representar situaciones basadas en problemas reales, o elaborar pasatiempos para mejorar la visión espacial. Desde hace mucho tiempo existen esos laberintos, aunque su difusión no siempre ha sido fácil. Vamos a presentar algunos modelos de éstos laberintos con alambres, y veremos su interés matemático. Estos modelos consisten en estructuras realizadas en alambre rígido, o con cierta elasticidad, en los que aparecen al menos dos piezas, la que llamaremos soporte o pieza fija (que en las figuras aparece en negro), y la pieza a extraer (que aparecerá en gris). En algunos casos estas piezas son iguales, como en el famoso laberintos consistente en dos clavos torcidos que están enlazados, como los de los de la figura 1

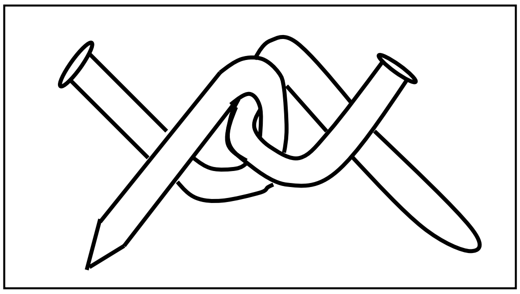

Figura1: Clavos enlazados

En otros casos, las figuras son distintas, como en el clásico laberinto de la figura 2, en el que la pieza a extraer (en el dibujo más fina) suele adoptar muchas formas, pero que en este caso adopta la de un ovoide.

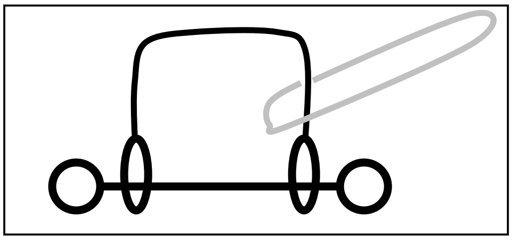

Figura 2

Como puede verse en la figura 1, las estructuras de alambre tienen medidas relativas fijas, en este caso, la abertura que tienen los bucles que forman cada clavo es inferior en su punto más próximo al diámetro del clavo, lo que impide que puedan separarse por simple colocación del clavo sobre el hueco que deja el otro. En la figura 2, el ovoide tiene que caber, al menos en su extremo, por la anilla de la figura fija, y la porción que pasa a través tiene que tener una longitud que permita que la anilla de la barra pase por su interior. Por ello, y a diferencia de los *nudos* con cuerdas (ver los artículos divulgativos sobre nudos en Investigación y Ciencia, Stewart 1994, 1996, 1998 y 2000), los laberintos con alambre introducen aspectos que no son estrictamente topológicos, sino métricos. Entre estos laberintos con alambre aparecen algunos que combinan alambre y cuerda, estos encierran unas posibilidades mixtas, y no los abordaremos en este artículo.

En los laberintos con alambre interesa observar su estructura topológica (agujeros, aristas, situación relativa de ellas, etc.), pero también sus medidas (figuras que caben, dimensiones relativas, etc.).

Por ejemplo, en la figura 1 se trata de dos anillos abiertos, con lo que su estructura topológica es trivialmente la de dos segmentos, enlazados por un falso nudo. Si permanecen unidas las dos piezas es debido a su rigidez, y a que la medida del hueco de un clavo no permite salir directamente al otro.

En la figura 2, la pieza fija es un anillo abierto, formado por dos piezas. La pieza curva abraza a la recta con sus dos anillas, pero está abierta por ellas (tiene por tanto dos agujeros). La pieza recta tiene la misma estructura topológica, pero además está enlazada con la anterior al aparecer su segmento entre los agujeros de la otra. No puede salir de la curva por tener unas anillas que no caben por las que lo abrazan. Si convirtiéramos estas piezas fijas en cuerdas, aparecería un falso nudo, ya que al poder cambiar el tamaño de las anillas de la pieza recta, saldrían sin problemas por las anillas de la pieza curva, dejando libre a la pieza móvil, que sí que es una pieza cerrada.

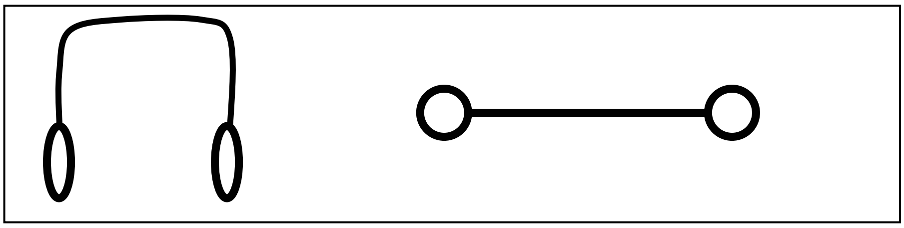

Figura 3: Pieza curva, equivalente topológicamente a la pieza recta

2. Laberintos de alambre en clase de matemáticas

En clase de Matemáticas se pueden utilizar los laberintos de alambre para favorecer la captación de la estructura topológica de una pieza, pero también para hacer que los alumnos se ejerciten en destrezas de estimación y búsqueda de estrategias para extraer unas piezas de otras. Este proceso de captación de estructuras se realiza además, a partir de procesos de ensayo y error, de búsqueda de movimientos posibles, de imaginación de variaciones, etc., lo que hace que el proceso de resolución de un laberinto (resolución de un verdadero problema) sea un ensayo para la captación de estrategias de actuación en otros menesteres.

Con el manejo de laberintos de alambre podemos favorecer la percepción topológica (Carlaville y otros, 1994), y entrar en contacto con la teoría de nudos como campo matemático poco conocido (Pagano 2000, Rousseau, 2000). Siguiendo las posibilidades educativas de esta teoría (Pagano, 1987, 2000), proponemos que se realicen actividades para que los alumnos lleguen a ejercitarse en estrategias como:

a) Estudiar la *estructura*, los movimientos y sus efectos.
b) Buscar criterios para establecer *equivalencias entre estructuras,* tales como las basadas en:
   - La estrategia de resolución
   - Los movimientos posibles
   - Los cambios que hacen que varíe la dificultad de resolución del laberinto
   - La forma de las figuras que aparecen, etc.
   - Y, el orden de conexión topológica

Por ejemplo, es interesante ver la equivalencia de laberintos como el de la figura 2 y el siguiente, de la figura 4, aunque en este último sólo hay una componente en la pieza fija (gris en la figura):

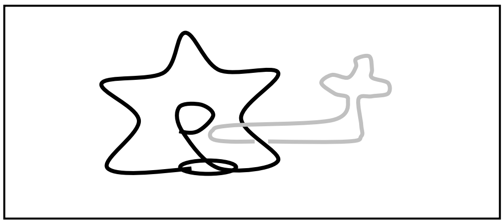

Figura 4: Laberinto equivalente a la Figura 2

c) Afrontarlo como *resolución de problemas*, relacionados con situaciones reales, como el que aparece cuando tenemos que transportar un mueble y no sabemos si ,y cómo, cabrá por un pasillo o por una puerta (figura 5), cuando tenemos que extraer una pieza de un entramado (una reja, por ejemplo, figura 6), o cuando tenemos que atar algo de manera que no quede nada suelto, como cuando queremos amarrar una bicicleta sin que quede suelta ninguna pieza de las que son extraíbles (figura 7)

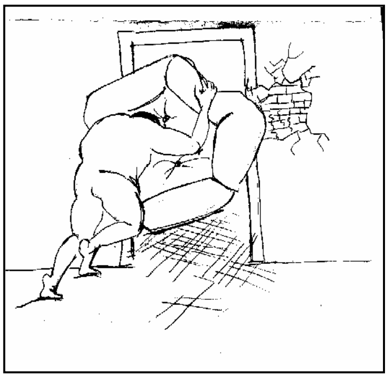

Figura 5: ¿Cabe el sofá por la puerta?

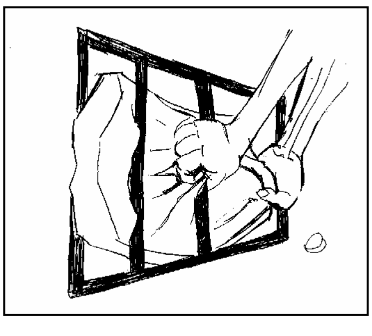

Figura 6: ¿Todo lo que entra sale? ¿Cómo sacar una pieza de una estructura en la que ha quedado atrapada?

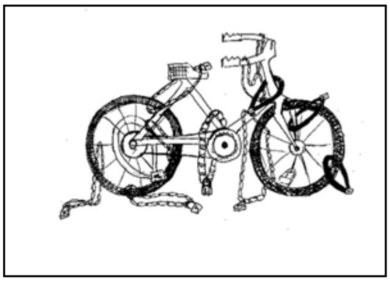

Figura 7: ¿Cómo amarrar la bicicleta con una cadena para que no se puedan llevar ni las ruedas, ni el sillín, etc.?

d) Y... *anticipar la solución sin manipular* (representación mental icónica, movimientos, *aristas* y *agujeros*)

Se trata entonces de que en clase se propongan actividades de manipulación de laberintos de alambre, tratando de resolverlos, probando, buscando movimientos posibles, clasificándolos, etc., pero además yendo un poco más lejos, procurando que se haga una representación física y mental de las figuras y se llegue a comprender su estructura.

3. Equivalencia de estructuras según la forma de resolución

Vamos a presentar algunos laberintos de alambre, y para ello hemos adoptado como criterio de agrupación la forma en que se resuelven. Hemos destacado seis grupos. El primero (figura 8, Grupo A) se está representado por el de la figura 2, y en todos ellos la solución se obtiene intercalando la pieza móvil por la (o las) anilla(s) de alguna de las partes de la pieza fija, y tratando de enlazar con la móvil la parte de la fija que queda fuera de la anilla. El proceso puede ser muy complejo, como se puede observar al ver algunos verdaderos laberintos. Los más actuales han comenzado a emplear anillar sueltas para separar partes de la pieza fija, pero el principio es el mismo.

Una generalización del anterior es el grupo B (figura 9), formado por laberintos que están formados por varias piezas fijas semejantes, formando una figura en escala. Estas escalas pueden ser bidimensionales, si todos los escalones están en el mismo plano, o tridimensionales, si algunos escalones son perpendiculares entre sí. Su resolución es similar a la del grupo A, pero hay que elaborar un algoritmo que permita el avance de la pieza móvil a lo largo de la escala.

El grupo C (figura 10) está formado por laberintos en los que predomina la orientación de espiras. El más representativo es el muelle, que acepta dos niveles, aquel en el que la anilla está enlazada a una vuelta, y el que está enlazado a más de una vuelta. La resolución de estos laberintos consiste en buscar la orientación de la espira que permita el avance de la anilla (o de la pieza móvil), basándose a veces para ello en la elasticidad del alambre.

El grupo D (figura 11) está formado por laberintos de material rígido, tales como el de la figura 1. De hecho hay muchas variaciones de los clavos enlazados, tal como puede observarse. En todos ellos hay que buscar la forma de combinar los huecos que aparecen en ambas piezas, tratando de que la suma de las oberturas permita obtener la dimensión suficiente para separar ambas piezas. El grado de dificultad varía, según el tipo de transformaciones que haya que hacer antes de afrontar las dos aberturas. Unos laberintos especialmente llamativos de este grupo son los formados por figuras que tienen una ligera diferencia de longitud en sus brazos, lo que hace que no se aprecie a primera vista, y, junto con la necesidad de hacer movimientos de torsión no plana, le dan mucha dificultad.

El grupo E (figura 12) está formado por aquellos laberintos que presentan una anilla abrazada a la parte más estrecha de dos piezas, generalmente iguales, unidas por anillas. El más conocido es el "ocho tumbado". En todos ellos la anilla sale por medio de una torsión en las piezas simétricas, que dejan la anilla suelta.

El grupo F (figura 13) lo componen los laberintos en los que la anilla está obstaculizada por una pieza grande, que se puede mover sobre la fija (generalmente aparece enlazada a ella), y la pieza fija está formada, como en el grupo E, por varias piezas que permiten doblarse una sobre otra. Las más conocida son la "doble W", o la "doble cruz". En todas ellas se trata de llevar a la anilla a un extremo en el que se pueda doblar la pieza fija, y hacerla recorrer una pieza que ha quedado abierta al doblarse. Una variación de este grupo está constituido por aquellos laberintos en que la anilla está abrazada y atrapada por una pieza que puede escamotearse en algún pasaje de la pieza fija. El ejemplo más conocido es “la balanza”. Para resolverlo hay que buscar el lugar en el que se puede escamotear la pieza que impide el paso de la anilla, tratando de que pase a través de ella.

Una derivación de este grupo es el grupo G (figura 14), constituido por los laberintos en los que la pieza que soporta la anilla móvil puede salvarse por medio de una articulación de la pieza fija. El ejemplo más clásico es “la romana”. Para resolverlo hay que buscar que la pieza que soporta a la anilla abrace alguna parte de la pieza fija y deje pasar la anilla a través de la pieza que la soporta.

Como el interés del artículo es la iniciación en el tratamiento de estos laberintos, hemos elegido laberintos típicos, y su clasificación es relativamente buena (exhaustiva y excluyente), pero se encuentran frecuentemente algunos laberintos mixtos, es decir, que presentan dificultades y hay que realizar estrategias de resolución de dos o más de las categorías establecidas.

4. Conclusiones

Como se puede observar, la mayoría de los laberintos que presentamos son *fáciles de replicar*, con un buen alambre, y tratando de que tengan un tamaño adecuado al material. Es recomendable *copiarlos en papel* e *intentar repetirlos en alambre*. En tiendas especializadas (y algún vendedor ambulante) se encuentran otros modelos. Recomendamos comprar especialmente los laberintos rígidos (grupo D), que son los más complicados de realizar por uno mismo..

En las siguientes páginas Webs se pueden encontrar diversidad de modelos para copiar, aunque muchas de ellas están destinadas a su venta por correspondencia, y en algunas se incluye información respecto a los nombres y cualidades. En general, en ellas se incluye una clasificación del grado de dificultad de resolución.

http://www.puzzles.ca/index.html, está en inglés, es la más completa en cuanto a variedad y número de puzzles. Cada uno se presenta con una ficha, en la que se indica las dimensiones, la dificultad y algunas referencias, así como los nombres.

http://www.arabesk.nl/index.html es una página holandesa con puzzles tipo D, muy artísticos, para su venta. Tiene una buena colección de puzzles en madera.

http://www.johnrausch.com/PuzzleWordl/index.html es una página particular estadounidense, editada por John Rausch, coleccionista y gran interesado en ellos, por lo que indica los lugares de producción más conocidos y sus orígenes.
http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hall/3964/ es la página de Javier Santos, por lo que está en español, presentando algunos puzzles con comentarios.
http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/4795/
http://www.hlavolamy.cz página checa en elaboración, prometiendo texto en inglés y alemán, pero sólo presentando la checa; aún con pocos laberintos, presenta algunos originales checos.
La mayoría de estas páginas me las ha suministrado Carlos Montoya, compañero argentino, quien a partir de una visita a un mercado ha montado una experiencia extraescolar para estudiar estos laberintos (Montoya y Gómez, 2001). Para ello ha realizado un cuidadoso proceso de estudio de las variables que entran en juego, hasta llegar a presentar el lenguaje matemático como una herramienta que permite avanzar en su estudio. La comunicación presentada con el profesor mexicano Guillermo Gómez hace un análisis de la estructura matemática de los laberintos (especialmente los del grupo A), que supone un gran avance en el tratamiento de estos rompecabezas particulares. Desde aquí quiero agradecer sus importantes aportes.
Esta experiencia nos muestra que es posible utilizar los laberintos de alambre en clase de matemáticas, planteando verdaderos problemas, y asumiendo los pasos y estrategias para ello. Sin llegar a estos trabajos de investigación tan elaborados, desde este artículo animamos a introducir los laberintos en clase para estimular la percepción espacial, proponiendo que los alumnos: manipulen con los laberintos como materiales lúdicos, los clasifiquen, traten de incluir nuevos laberintos en las clases definidas de antemano, representen sus estructuras, realicen laberintos con alambre, inventen otros nuevos, etc. Para realizar estas actividades el alumno tiene que llegar a interiorizar la estructura espacial del laberinto, con lo que estaremos colaborando a generar estrategias de relación con el espacio (Guzmán, 1984). Se pueden sugerir clasificaciones inspiradas en las clasificaciones matemáticas de los nudos (Pagano 2000, Rousseau 2000), como el número de cruces, el índice de los puentes o el género del nudo. Nosotros hemos empleado una actividad basada en el uso de laberintos para los futuros psicopedagogos (Oliveras y otros, 1996), tratando de mostrar una estrategia de enseñanza basada en la resolución de problemas, a la vez que tratando de analizar las teorías del aprendizaje matemático implícito en ellas.

Esperamos que este artículo estimule el empleo de estos materiales, y lleguen a ser de utilidad en la enseñanza de las matemáticas.

Como coleccionista de estos laberintos e interesado en la enseñanza de las matemáticas, estoy abierto a todas las sugerencias de aquellos que compartan este interés por este tipo de material, así como a los aficionados que estén dispuestos a intercambiar experiencias y modelos.

Referencias

Coriat, M. y otros (1989). *Nudos y nexos*. Madrid, Síntesis.

Carlavilla, J.L. y Fernández, G. (1994). *Aventuras topológicas*. Madrid, Rubes.

Gardner, M. (1956). *Mathematics magic and mystery*. Dover.

Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. Actas de las IV JAEM. Sta Cruz de Tenerife.

Montoya, C. y Gómez, G., (2001). Una aproximación matemática a los rompecabezas de alambre. RELME 15 http://webs.sinectis.com.ar/ccrespo/comunica.htm

Oliveras, M.L. y otros (1996). La formación didáctico matemática del orientador como problema de investigación. RELIEVE.

Pagano, C. (1987). Noeuds et entrelacs. *PLOT 40*, pp. 17-21.

Pagano, C. (2000). Noeuds et entrelacs. *PLOT 93*, pp. 19-24.

Rousseau, Ch. (2000). Les noeuds et la médecine. *PLOT 93*, pp. 25-27.

Santarcangeli, P. (1984). *El libro de los laberintos*. Madrid, Siruela.

Stewart, I. (1975). *Conceptos de matemática moderna*. Madrid, Alianza.

Stewart, I. (1994). Nudos, cadenas y cintas de vídeo. *Investigación y Ciencia*, marzo, 1994. pp. 86-89.

Stewart, I. (1994). Topología de la prestidigitación. *Investigación y Ciencia*, abril, 1994. pp. 86-89.

Stewart, I. (1996). De cómo rellenar el espacio con nudos. *Investigación y Ciencia*, enero 1996. pp. 88-90.

Stewart, I. (1998). Un cálculo para la cuna del gato. *Investigación y Ciencia*, febrero 1998. pp. 85-87.

Stewart, I. (2000). Nudos al desnudo. *Investigación y Ciencia*, septiembre 2000. pp. 84-85.

Figura 8: GRUPO A: Simples

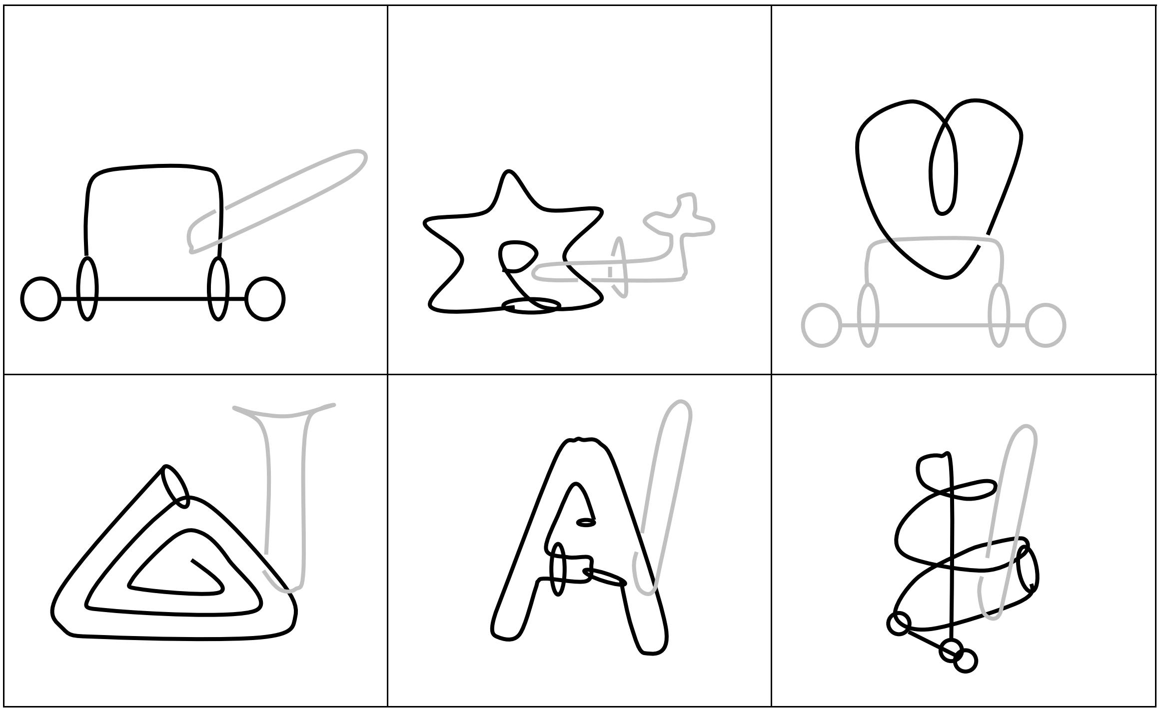

Figura 9: GRUPO B: Múltiples

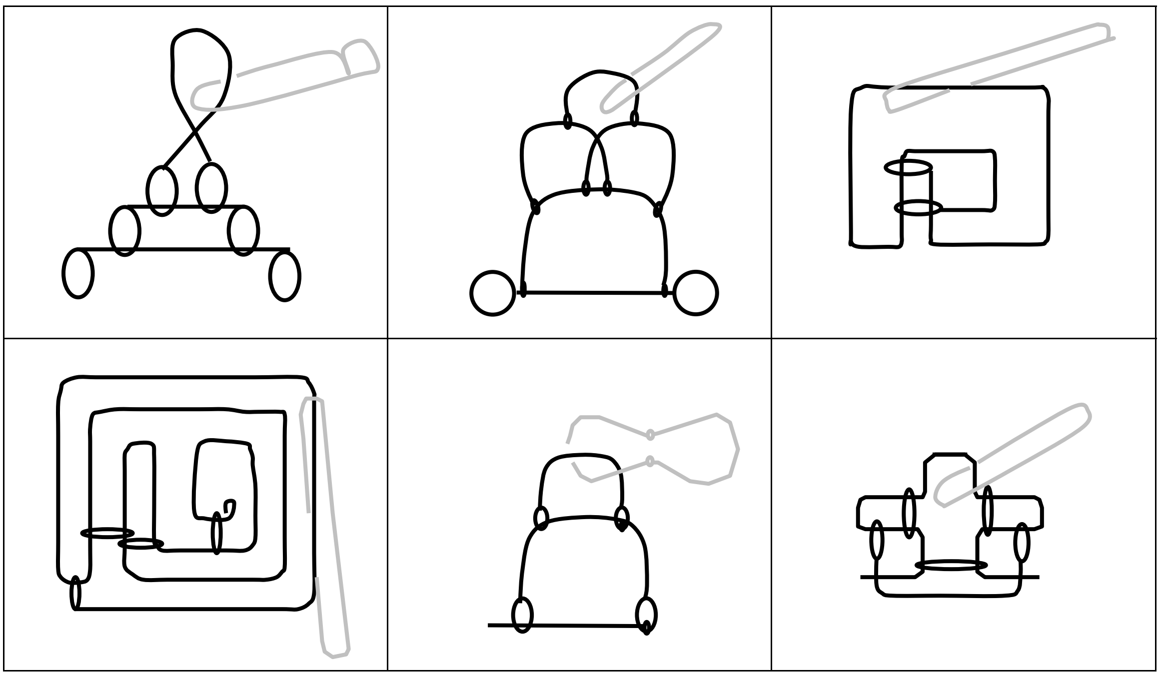

Figura 10: GRUPO C: Muelles

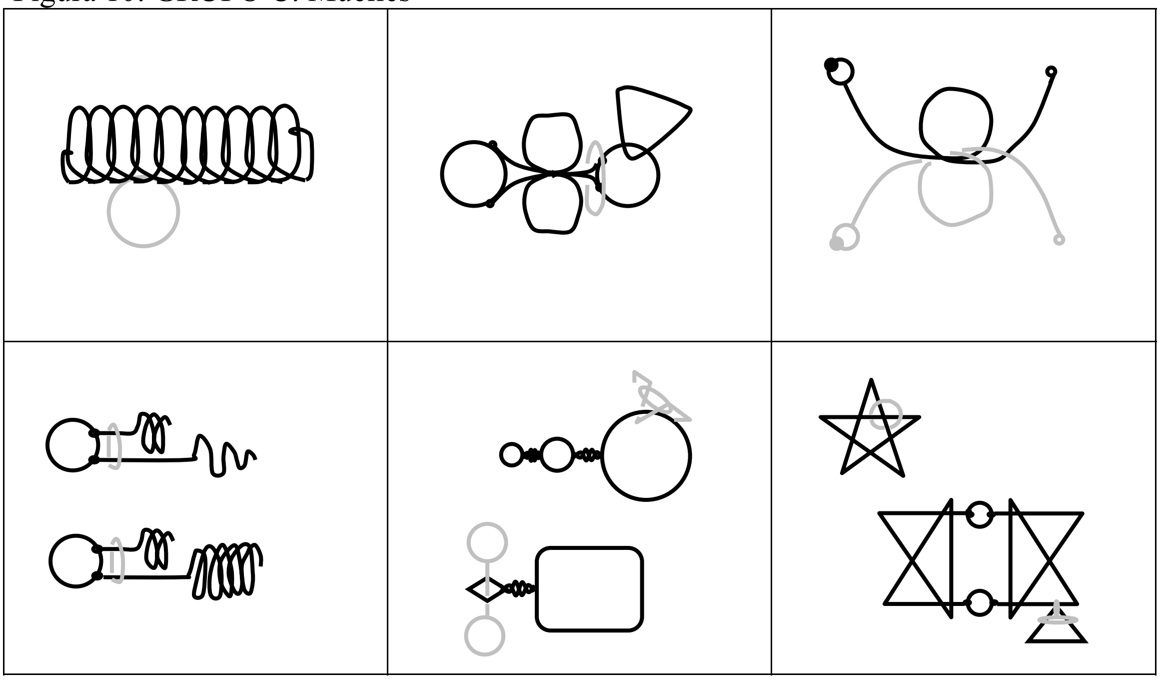

Figura 11: GRUPO D: Figuras rígidas

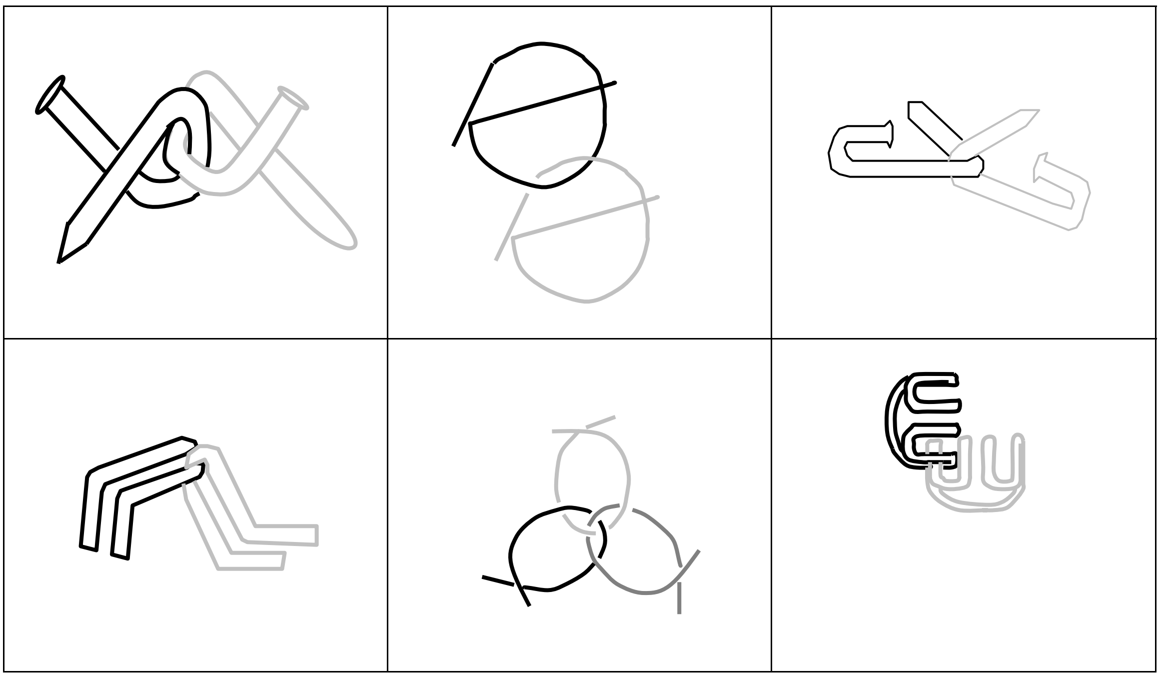

Figura 12: GRUPO E: Anilla abrazada

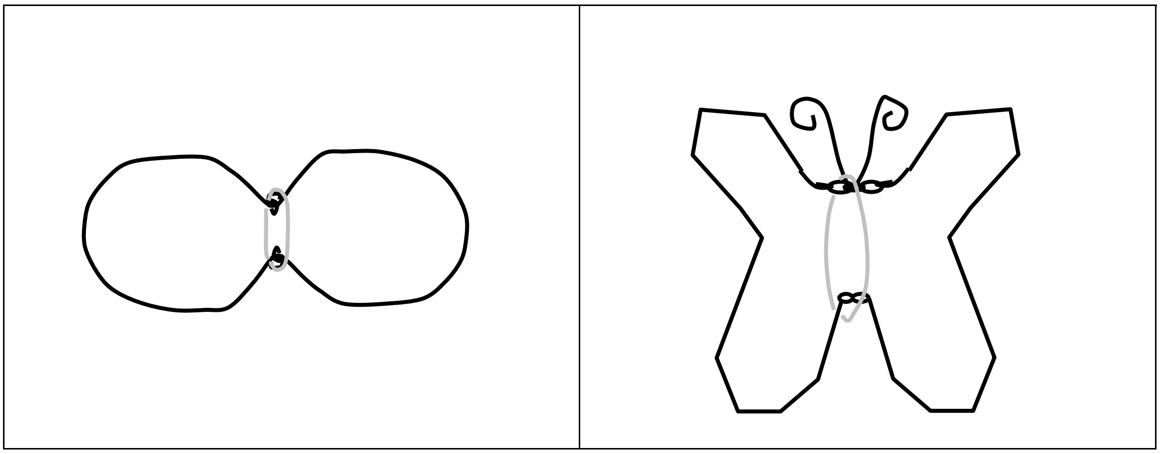

Figura 13: GRUPO F: Piezas escamoteables

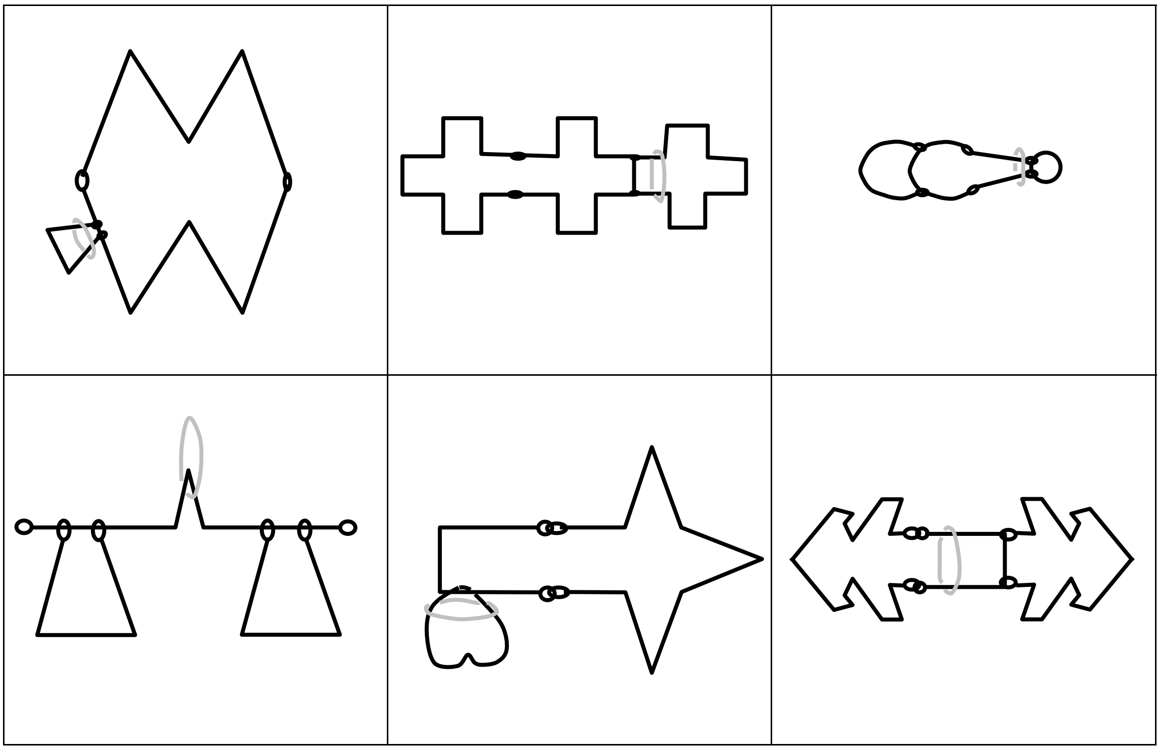

Figura 14: GRUPO G: Piezas enlazables