Propuesta didáctica para el trabajo de algunas nociones de topología en el grado décimo

Deisy Johana Delgado Monroy

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2012

Propuesta didáctica para el trabajo de algunas nociones de topología en el grado décimo

Deisy Johana Delgado Monroy

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Doctora en Lógica y Filosofía da Ciencia, Clara Helena Sánchez Botero

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2012

Dedicatoria

Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar en forma errónea es mejor que no pensar.

Hipatia

Agradecimientos

Expreso mis agradecimientos a todas aquellas personas que aportaron a la realización de este trabajo, en especial a la profesora Clara Helena Sánchez quién dio aportes muy significativos y oportunos, a Juan Felipe que con su cariño, paciencia y colaboración me acompañó a recorrer este camino, a mi familia por su apoyo y confianza en todo momento, y finalmente a mis compañeros porque en medio de las múltiples ocupaciones siempre hubo espacio para una sonrisa.

Resumen

En este trabajo se pretende hacer una propuesta didáctica para introducir a los estudiantes de grado décimo en los conceptos básicos de la topología general. Con este objetivo se presentan los tres problemas básicos de la topología como son: el recorrido de los puentes de Königsberg, el Teorema de los cuatro colores y la cinta de Möbius. El trabajo va acompañado de un breve recorrido histórico de los problemas mencionados y de algunos aspectos disciplinarios relevantes.

Palabras Clave: Puentes de Königsberg, teorema de los cuatro colores y teorema de Pick, cinta de Möbius, Topología y Teoría de grafos.

Abstract

This work intends to make a didactic proposal to introduce students in the tenth grade basic concepts of general topology. With this objective is the three basic problems of topology as: the bridges of Königsberg, the four-color theorem and the Möbius strip. The work is accompanied by a brief history of these problems and some relevant disciplinary aspects.

Keywords: Königsberg bridges, Four-color and Pick Theorem; Möbius strip; Topology; graph theory.

Contenido

Introducción

La enseñanza de las matemáticas en educación básica se ha constituido en un proceso que presenta múltiples retos a los docentes y estudiantes, pues se pretende desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN) que la preparación se de en los siguientes tipos de pensamiento: numérico, métrico, aleatorio, variacional y espacial-geométrico. Este último ha sido relegado a un segundo lugar ya que en muchas ocasiones presenta baja intensidad horaria, escasez en profundización y bases sólidas.

El pensamiento espacial-geométrico usualmente se encarga de abordar situaciones relacionadas con el cálculo de áreas, perímetros y volúmenes. Considero que es necesario abordar otros conceptos geométricos significativos relacionados con nociones de proximidad, posición relativa entre puntos, borde, vecindad, conectividad, compacidad, metricidad, además de una serie de teoremas y axiomas, que están muy asociados a un tipo de geometría cualitativa, es decir a la topología.

La topología es una rama de las matemáticas que además de sus interesantes propuestas, su aplicabilidad a situaciones reales y la belleza de su complejidad, hace que sea relativamente sencillo trabajar intuitivamente sus nociones básicas. Ir hasta sus inicios, recrear los problemas que llevaron a su desarrollo, proponer nuevas situaciones,describirlas, observar las nociones cualitativas de los objetos permitirán un novedoso trabajo en la educación secundaria.

Lo que se busca con esta propuesta es generar una serie de actividades para llevar al aula de clase un contenido matemático que, además de ser comprensible, brinde diferentes estrategias de acción al estudiante. Encontramos en la topología un campo muy poco explorado en la educación básica y media, que puede brindar herramientas enriquecedoras para explorar el apasionante mundo de las matemáticas, potenciando de este modo procesos cognitivos y creativos en nuestros estudiantes, de modo intuitivo, como lo plantean los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2003)[12]:

> Con el desarrollo de las matemáticas y luego de la física, se notó también que había aspectos espaciales más intuitivos y cualitativos que los de la geometría, de los que se desarrolló una ciencia abstracta del espacio (llamada topología por la palabra griega para el espacio o el lugar, topos), los cuales no necesitaban de las nociones métricas. Se notó también que las nociones métricas no se aplicaban sólo a lo espacial (como en el caso de longitud, área y volumen) sino también a lo temporal (duración y frecuencia) y a otras muchas disciplinas.(p.57)

La propuesta que haremos aborda tres famosos problemas de la topología: el recorrido de los puentes de Königsberg, el teorema de los 4 colores y la cinta de Möbius. A partir de ellos se pretende que el estudiante se familiarice con la topología y que tenga algunas nociones elementales acerca de la misma.

El trabajo se estructura del siguiente modo: en el Capítulo 1 se presenta la reseña histórica de los tres problemas antes mencionados, haciendo referencia específicamente a los hechos que llevaron al planteamiento y la solución que se dio de los mismos, los personajes que intervinieron en su solución y a los conceptos matemáticos que dieron lugar; en el Capítulo 2 se presentan los conceptos básicos de la teoría de grafos (definiciones, teoremas, ejemplos)y se mencionan algunas definiciones de conceptos fundamentales de la topología como lo son: abierto, cerrado, frontera, vecindad, superficie orientable y no orientable. Además se hará una exposición del Teorema de Pick con el que es posible determinar el área de una fígura, relacionando de algún modo los puntos del interior y de la frontera o borde de la figura dada. El Capítulo 3 muestra la relación de la topología con los estándares curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN). En el capítulo 4 se proponen una serie de actividades para estudiantes de grado 10, relacionadas con con los tres problemas clásicos de la topología antes mencionados. En los anexos se expondrán algunas actividades complementarias que ayudarán a la comprensión y apropiación de ciertos términos y definiciones topológicas, finalmente se darán las conclusiones del trabajo realizado.

1. Reseña Histórica

La historia de la matemática nos presenta un recorrido tan fascinante que incluso obliga al mismo matemático o al lector interesado en esta historia a cambiar su idea de la disciplina. El descubrimiento de las geometrías no euclidianas, el desarrollo del cálculo, los avances en la teoría de conjuntos y el descubrimiento de la topología son apenas unos pocos ejemplos de la transformación que sufrió la matemática desde el siglo $XVII$. La topología empezó a establecerse como rama de las matemáticas alrededor del siglo $XVII$, cuando Gottfried Wilhelm Leibniz $(1646-1716)$, filósofo y matemático alemán, en su *Characteristica Geometrica*, formula las propiedades básicas de las figuras geométricas, utilizando símbolos especiales para representarlas sintéticamente combinando propiedades mediante ciertas operaciones para producir otras. Leibniz llamó este estudio *análisis situs* o *geometria situs*[10].

En una carta a Huygens en 1679, Leibniz explica que no le satisface el tratamiento de las figuras geométricas mediante coordenadas porque, aparte del hecho que este método no era directo, ni bello, se refería a magnitudes: *creo nos falta otro tipo de análisis propiamente geométrico o lineal que exprese directamente la localización (situs), así como el álgebra expresa magnitud.* Los pocos ejemplos que daba Leibniz acerca de lo que se proponía construir implicaban aún propiedades métricas. A pesar de los esfuerzos de Leibniz por tratar de dar un análisis de tipo más cualitativo a la geometría, no tuvo repercusión debido probablemente a la falta de precisión de sus ideas y a la carencia de ejemplos que las sustentaran.

Años más tarde la solución a ciertos problemas, que paso a detallar, darían un impulso al desarrollo de la topología.

1.1. Los Puentes de Königsberg

Königsberg era un puerto en la antigua Alemania (actualmente pertenece a Rusia y se llama Kaliningrado), situado en la costa sur del mar Báltico, cerca de la desembocadura del río Pregel. El río dividía la ciudad en cuatro áreas de tierra separadas (A,B,C y D), y había siete puentes que le permitían a los habitantes de Königsberg cruzar el río para poder trasladarse de una parte a otra de la ciudad como lo muestra la figura **1-1**. [13]

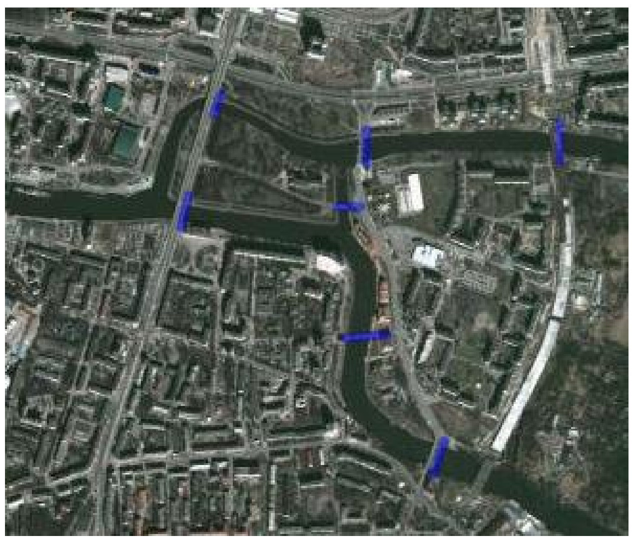


Figura 1-1.: Mapa de Kaliningrado (google maps) antes conocido como Königsberg y que muestra dónde se encuentran los siete puentes

Cuenta la historia que los habitantes de la ciudad se divertían intentando cruzar los siete puentes en un paseo continuo sin cruzar dos veces ninguno de ellos, y existía la idea generalizada de que realizar el recorrido bajo éstas condiciones era imposible, pues siempre en el recorrido terminaban omitiendo un puente o cruzando alguno dos veces, pero no tenían como sustentar esta imposibilidad. Un matemático inquieto por el desarrollo del conocimiento, se enteró de tal situación y con la posibilidad de asociarla directamente a la matemática trató de darle una solución *convincente*. Se trata del matemático suizo Leonhard Euler $(1707-1783)$[1],

[1]Leonhard Euler nació en Basilea el 15 de abril de 1707, su padre Paulus Euler, pastor calvinista, era un matemático aficionado que había sido discípulo de Jacques Bernoulli; mientras que su madre, Marguerite

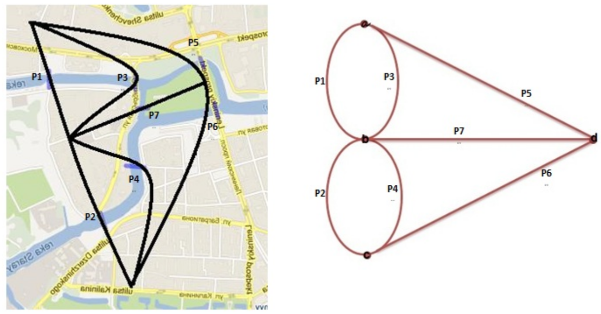


Figura 1-2.: Grafo Euler.

que resolvió el problema con una idea bastante sencilla pero genial para su época. Hizo un modelo matemático del problema, es decir, sólo tomó la información relevante de éste y se deshizo de hechos como la longitud de los puentes o el área de cada región, y se concentró en la relación entre las ciudades y los puentes, nombrando a cada ciudad como un punto y a cada puente simplemente como una línea que une dos ciudades. El diagrama tomado de [5], quedó como lo muestra la figura **1-2**.

La solución del problema se encuentra en su artículo titulado ***Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis***(La solución de un problema referente a la geometría de posición) publicado en 1736.

1.2. Teorema de los Cuatro Colores

Es común que los mapas que se dibujan en un plano sean coloreados de tal manera que para países vecinos se usen colores distintos, esto permite distinguir fácilmente los diferentes países y localizar sus fronteras.

La pregunta ¿Cuántos colores se necesitan para colorear un mapa? surge de manera natural, ya que mientras más grande y complicado sea el mapa se espera necesitar más colores, una posibilidad es colorear cada una de las regiones de colores distintos, pero el objetivo principal

Frucker, tuvo poca influencia en sus estudios. Aunque desde muy joven Euler vio afectada su salud por serios problemas visuales que más tarde lo dejarían ciego, fueron muy significativos y decisivos los aportes que este gran matemático hizo para el surgimiento y desarrollo de la matemática moderna.

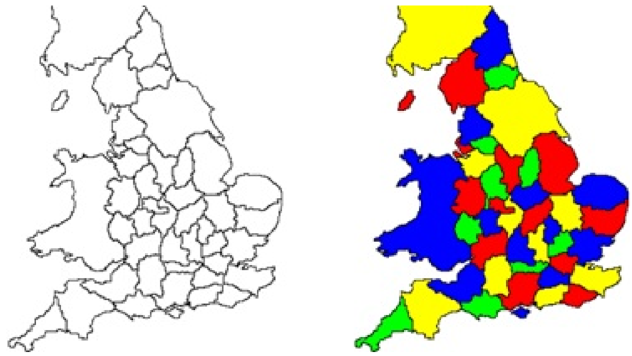


Figura 1-3.: Mapa de los Condados de Inglaterra coloreado con 4 colores. Tomado de

al colorear un mapa es el de usar el menor número de colores posible, siempre y cuando se usen colores distintos para los países que comparten una frontera.

En 1852, el matemático y botánico sudafricano *Francis Guthrie*$(1831 - 1899)$, observando el mapa de los condados de Inglaterra (fígura **1-3**) encontró que éste podía ser coloreado con cuatro colores, de tal manera que condados vecinos tuvieran colores distintos. Guthrie le preguntó al notable matemático hindú ***Augustus de Morgan*** $(1806 - 1871)$, quien en ese entonces era su profesor de Matemáticas en la Universidad de Londres, si era verdad que cuatro colores eran suficientes para colorear un mapa.

La primera referencia escrita sobre el **problema de los cuatro colores** es una carta escrita por De Morgan, dirigida a Sir William Rowan Hamilton y fechada el 23 de octubre de 1852, donde relata la pregunta de su estudiante. A Hamilton no le interesó el problema y así lo expresó a De Morgan ("I am not likely To attempt your "quaternion" of colours very soon"). Después de alguna reflexión, a De Morgan le parecía claro que cuatro colores eran suficientes, pero no pudo demostrarlo, y nadie más pudo hacerlo durante más de un siglo. La primera prueba la hizo el, matemático y abogado Alfred Bray Kempe $(1849 - 1922)$ y la publica en American Journal of Maths en 1879, pero años más tarde, en 1890, Percy John Heawood encuentra un caso para el que la prueba de Kempe no funcionaba, varios matemáticos notables [2] hicieron intentos a partir de la fórmula de Euler para poliedros (caras+vértices-aristas=2), de la construcción de grafos duales o de incidencia pero sus

[2]Como:Charles Sanders Peirce, Arthur Cayley, Peter Guthrie Tait

intentos siempre tenían errores que refutaban la validez de la demostración. Inclusive en algún momento se llegó a pensar que el problema era irresoluble.

Debido a la complejidad al tratar de demostrar dicho Teorema, se pensó en la utilización de computadores, en 1969, Heinrich Heesch ($1906-1995$), matemático alemán, desarrolla un algoritmo que intenta implementar con ordenador y realiza diversos test con el programa **Algol 60** en un **CDC1604A** (en contacto ya con su alumno Wolfgang Haken). En 1976 Haken junto con Kenneth Apple, resolvieron el problema. Así, lo que por muchos años se conoció como la **conjetura de los cuatro colores** se convirtió en el **Teorema de los cuatro colores**.

El problema fue resuelto de una manera muy diferente a la de cualquier intento previo, ya que se usaron más de 1200 horas de tiempo de una computadora de alta velocidad para producir una demostración que ocupa cientos de páginas y aproximadamente 10000 diagramas usando algunos de los algoritmos de Kempe. Hubo mucha publicidad en los medios de comunicación por tal hallazgo, pero muchos matemáticos no aceptaron este procedimiento como una demostración ya que la máquina había comprobado con una gran cantidad de mapas que podían colorearse usando únicamente cuatro colores, pero ¿Cómo asegurar la no existencia de un mapa que no cumpliera con esta condición? Uno de ellos fue Thomas Tymoczko, un filósofo especializado en lógica y filósofia de las matemáticas, quién en su artículo *The four-color Problem and Its Philosophical Significance*[20], afirma que para que la demostración de un teorema tenga validez, debe:

- Ser convincente: Una demostración debe tener una secuencia lógica que logre convencer al matemático más escéptico, sobre la veracidad de un resultado.
- Ser comprobable: Una demostración es una construcción que puede ser verificada una y otra vez, tambien se suele decir que la demostración debe ser debe ser susceptible de ser comprobada a mano.
- Ser formalizable: Una demostración, tal como se define en lógica, es una secuencia finita de fórmulas de una teoría formal que satisface ciertas condiciones. Es una conclusión a partir de la deducción de axiomas de la teoría por medio de reglas de lógicas.

El da esas tres condiciones con el fin de afirmar que la prueba dada al Teorema de los Cuatro Colores, no podía ser aceptada como una demostración dentro de la comunidad matemática.
A pesar de las dificultades, los intentos siguen y en 1996 Robertson y otros, utilizando un ordenador, crearon una prueba que era más corta, pero aún así su comprobación duraba casi 3 horas. Georges Gonthier verifica la prueba, confirma la validez de cada una de las etapas de la prueba de Robertson y escribe un artículo llamado *Formal proof-the four color theorem* (véase [1]).
Hasta el momento no se conoce una demostración de este teorema que no dependa de una verificación por computador, lo que despierta varias inquietudes en la comunidad matemática acerca de la validez del uso de los computadores en las pruebas y de si es realmente una demostración formal. ([13] y [1])

1.3. La Cinta de Möbius

La cinta de Möbius fascinante por sus increibles propiedades, es una figura geométrica que parece mágica y sorprende a quien la conoce.
Esta figura se obtiene tomando una banda de papel rectangular, girando uno de sus extremos cortos 180° y uniéndolo al extremo opuesto (véase figura **1-4**)

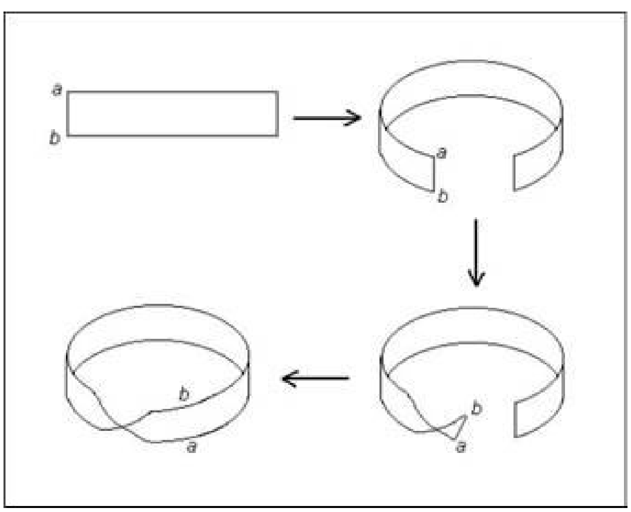


Figura 1-4.: Construcción de la cinta de Möbius

Con este movimiento se obtiene una superficie de una cara y un borde, no orientable y realizable en tres dimensiones (figura **1-5**).

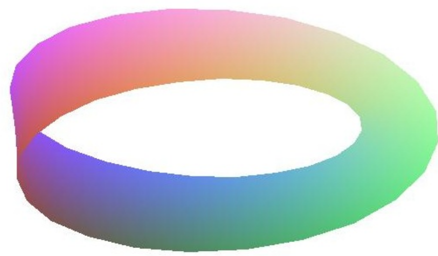


Figura 1-5.: Cinta de Möbius

Esta famosa cinta lleva su nombre en honor al notable matemático alemán August Ferdinand Möbius,($1790-1868$); el crédito debe ser compartido con el alemán Johann Benedict Listing ($1808-1882$) quien también encontró este tipo de superficies. Sus avances en topología fueron notorios; en el libro titulado *Vortstudien zur Topologie* aparece por primera vez la palabra topología, que Listing define como: *Por topología se entiende a la doctrina de las características de los objetos, o de las leyes de la conexión, de la posición relativa y de la sucesión de puntos, líneas, superficies, cuerpos y sus partes, o agregados en el espacio, sin tener en cuenta las cuestiones de medida o cantidad*. Sus hallazgos en cuanto a las superficies de una sola cara están en su trabajo *Der Census Räumlicher Complexe* [11] publicado en 1862.

Tanto Listing como Möbius fueron estudiantes del matemático alemán Johann Carl Friedrich Gauss ($1777-1855$) y se cree que fue él quien pudo haberle sugerido a sus dos estudiantes el estudio de este tipo de superficies. Móbius realizó trabajos en geometría analítica, transformación proyectiva y estructuras matemáticas, conocidas actualmente como *redes de Möbius*, *fórmulas de inversión de Möbius*, entre otras. Möbius descubrió las superficies de una sola cara y presentó sus propiedades ante la *Académie des Sciences*, tras su muerte fue recuperado su legado e inmortalizado su nombre por una pequeña banda de papel con un giro.

Las propiedades de esta cinta son sorprendentes, sus características no se restringen a su construcción sino que se extienden a los efectos que tiene al hacer cortes longitudinales o al cambiar el número de giros para su construcción, en la siguiente tabla se relacionan algunas de las posibles estructuras:

Medios giros	cortes	Fragmentos aparentes	Resultado real
1	1	2	1 banda, longitud 2
1	1	3	1 banda, longitud 2/ 1 banda de Möbius, longitud 1
1	2	4	2 bandas, longitud 2
1	2	5	2 bandas, longitud 2/ 1 banda de Möbius, longitud 1
1	3	6	3 bandas, longitud 2
1	3	7	3 bandas, longitud 2/ 1 banda de Möbius, longitud 1
2	1	2	2 bandas longitud 1
2	2	3	3 bandas longitud 1
2	3	4	4 bandas longitud 1

Por ejemplo, en la primera línea al hacer un corte longitudinal por la mitad, la conjetura sería que quedan dos cintas de Möbius, pero en realidad quedará una cinta más larga, como especifica la tabla, de longitud 2.

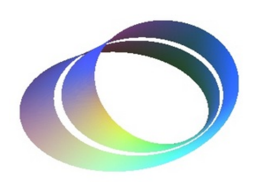


Figura 1-6.: Corte longitudinal por la mitad de una cinta de Möbius

Ahora, en la segunda línea se remite a una banda de Möbius cortada a un tercio de su anchura. En este caso parecen resultar tres trozos de papel que al estirarlos, se revelan como una banda de Möbius y una banda normal. [16]

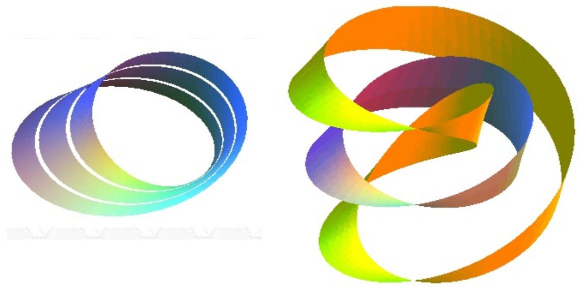


Figura 1-7.: Corte longitudinal por la tercera parte de una cinta de Möbius

Este resultado es sorprendente para nosotros, ahora es necesario darle la oportunidad a nuestros estudiantes de descubrir estos hallazgos, explorar, hacer conjeturas y llegar a soluciones y conclusiones concretas por medio de la experimentación, socialización y discusión de resultados.

Encontramos en la historia una herramienta fundamental y un recurso pedagógico muy valioso, que hemos olvidado y descuidado por años, preocupándonos más por la mecanización y la operatividad, que igual son importantes, pero a los cuales no se les da un contexto adecuado. A ello debemos la falta de comprensión, aplicación e innovación por parte de nuestros estudiantes.

2. Aspectos Disciplinares

Como ya se indicó, el objetivo del presente trabajo es proponer actividades que involucren conceptos topológicos de tal modo que se genere en los estudiantes ciertas nociones que serán importantes en el desarrollo de la comprensión de límite y continuidad. Por esto los aspectos disciplinares se abordan desde dos puntos de vista: la teoría de grafos y el desarrollo de algunos conceptos topológicos tales como: abierto, cerrado, frontera, entorno, continuidad, superficie no orientable, con el fin de dar sustento a las actividades que se presentan en el capítulo 4. Las definiciones y teoremas de la teoría de grafos y coloreado de grafos fueron tomadas principalmente de [18] y [21], mientras que las definiciones y teoremas de topología son tomados de [4] [19].

2.1. Teoría de grafos

La Teoría de grafos es una disciplina antigua con muchas aplicaciones modernas. Sus ideas básicas las introdujo Euler en el siglo $XVIII$, cuando utilizó los grafos para resolver el famoso problema de los puentes de Königsberg, reseñado en el Cápitulo 1. Para entender la solución que Euler dió al problema de los siete puentes, se estudiarán en este capítulo algunos conceptos básicos.

2.1.1. Tipos de grafos

Definición 1. Un ***grafo simple*** $G = (V, E)$ es un par que consta de un conjunto no vacío V de *vértices*, y de un conjunto E de pares no ordenados de elementos distintos de V denominados *aristas*.

Un ejemplo de grafo se encuentra en la figura **2-1** con $V = \{a, b, c, d, e\}$ y
$E = \{(a, b), (a, d), (a, e), (b, e), (b, d), (b, c), (d, e), (c, d)\}$.

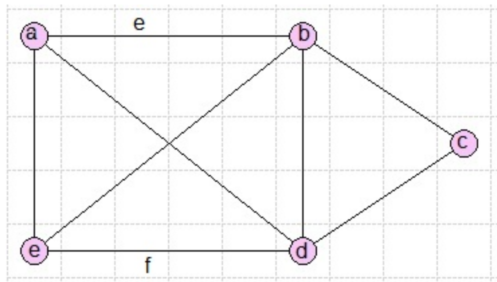


Figura 2-1.: Grafo Simple

Las aristas de un grafo no son necesariamente segmentos rectos, pueden ser segmentos curvos o arcos.

Definición 2. Un ***multigrafo*** $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{\{u, v\}|u, v \in V,\ u \neq v\}$. Se dice que las aristas e_1 y e_2 son aristas *múltiples* o *paralelas* si $f(e_1) = f(e_2)$. (figura **2-2**)

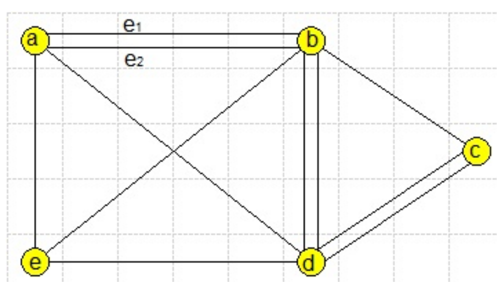


Figura 2-2.: Multigrafo.

En un multigrafo dos o más aristas diferentes conectan los dos mismos vértices. Por ejemplo, el grafo de la fígura **2-2** tiene tres pares de aristas paralelas.

Definición 3. Un ***pseudografo*** $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{\{u, v\}|u, v \in V\ \}$. Una arista e es un bucle, o lazo, si $f(e) = \{u, u\} = \{u\}$ para algún $u \in V$. (figura **2-3**)

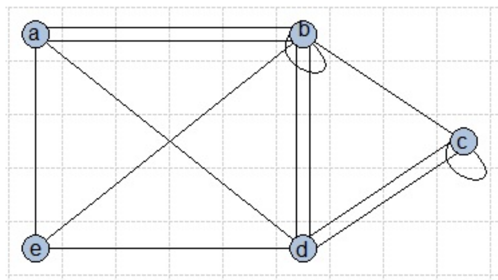


Figura 2-3.: Pseudografo.

La particularidad de un pseudografo es que puede conectar un vértice consigo mismo por medio de una arista. En la fígura **2-3** se aprecian dos bucles en los vértices b y c.

Definición 4. Un ***grafo dirigido*** $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices y de un conjunto E de aristas, que son pares ordenados de elementos de V. (véase figura **2-4**)

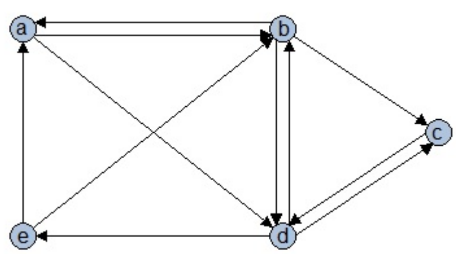


Figura 2-4.: Grafo dirigido.

En este caso todas las aristas tienen una dirección específica. En el caso de la fígura **2-4** las aristas paralelas tienen una dirección opuesta a la otra.

2.1.2. Terminología en teoría de grafos

Definición 5. Sea G un grafo y u y v dos vértices de G. Se tiene que*:*

- Son *adyacentes* o (vecinos) en G si $\{u, v\}$ es una arista de G.
- Si $e = \{u, v\}$, entonces la arista e es *incidente* con los vértices u y v.

- También se dice que la arista e *conecta* u y v.
- Los vértices u y v son *extremos* de la arista e.

En el grafo de la figura **2-1** $\{a, b\}$ es una arista de G por lo tanto a y b son vértices adyacentes, mientras $\{a, c\}$ no es una arista de G por lo tanto a y c no son adyacentes. Además la arista e es incidente con los vértices a y b así como la arista f es incidente en los vértices d y e, es decir, conecta los vértices d y e. También se dice que los vértices d y e son extremos de la arista f.

Definición 6. El grado de un vértice de un grafo no dirigido es el número de aristas incidentes con él, exceptuando los bucles, cada uno de los cuales contribuye con dos unidades al grado del vértice. El grado del vértice v se denota por $\delta(v)$.

En el grafo de la figura **2-2** $\delta(a) = 4$, $\delta(b) = 6$, $\delta(c) = 3$,$\delta(d) = 6$ y $\delta(e) = 3$

Teorema 1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido con n aristas. Entonces,*

$$2n = \sum_{v \epsilon V} \delta(v)$$

Este es denominado como el **Teorema de los apretones de manos**, y expresa que si en una reunión varias personas se dan la mano, el número total de manos involucradas es par, debido a que son dos las manos usadas en cada apretón y el número total de saludos corresponde a la mitad del número de manos. Lo que afirma el teorema es que **la suma de los grados de los vértices de un grafo es dos veces el número de aristas** y es cierto incluso si hay aristas múltiples y bucles en el grafo.
En el grafo de la figura **2-2** se tiene que $\delta(a) = 4$, $\delta(b) = 6$, $\delta(c) = 3$,$\delta(d) = 6$ y $\delta(e) = 3$ la suma de los grados de los vértices es igual a 22, el número de aristas es 11, resultado que se puede verificar fácilmente. Una consecuencia inmediata del teorema 1 se enuncia a continuación:

Teorema 2. *Todo grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.*

*Demostración:*Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea V_1 el conjunto de vértices de grado par y V_2 el conjunto de vértices de grado impar, entonces,

$$2n = \sum_{v \epsilon V} \delta(v) = \sum_{v \epsilon V_1} \delta(v) + \sum_{v \epsilon V_2} \delta(v)$$

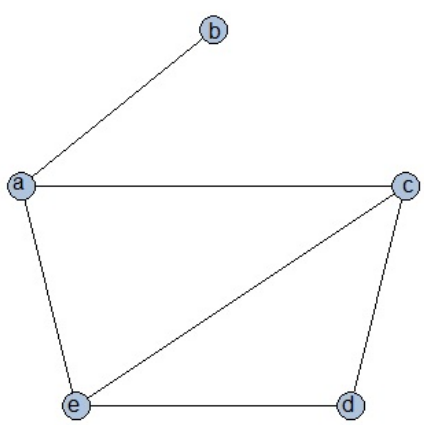
como $\delta(v)$ es par si $v \, \epsilon \, V_1$, el primer sumando del término de la derecha de la última igualdad es par. Además, la suma de los dos sumandos de dicho término es par, puesto que esa suma es $2n$; por tanto, el segundo sumando también es par. Como todos los términos que se suman en ese segundo sumando son impares, tiene que haber un número par de ellos. Por tanto, hay un número par de vértices de grado impar.

2.1.3. Representación e isomorfismo de grafos

Algunos grafos tienen exactamente la misma forma, ya que hay una biyección entre sus vértices, aristas y grados de los vértices. En tal caso, decimos que los dos grafos son **isomorfos**. Otro método consiste en comparar sus matrices de adyacencia y/o incidencia.

Matrices de adyacencia e incidencia

A continuación se presentan dos tipos de matrices que se usan con frecuencia para representar grafos. Uno se basa en la adyacencia de vértices y el otro se basa en la incidencia entre vértices y aristas.



Adyacencia de vértices	
Vértices	Vértices adyacentes
a	b,c,e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

Figura 2-5.: Grafo Simple.

Ahora bien, supongamos que $G = (V, E)$ es un grafo simple con $|V| = n$. Supongamos que los vértices de G se notan de manera arbitraria como v_1, v_2,...., v_n. **La matriz de adyacencia A** o (A_G) de G con respecto a este listado de los vértices es la matriz booleana $n \times n$ que tiene un 1 en la posición (i, j), si v_i y v_j son adyacentes, y tiene un 0 en la posición (i, j), si v_i y v_j no son adyacentes. En otras palabras, su matriz de adyacencia es $A = [a_{i,j}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \{v_i,\, v_j\} \text{ es una arista de G ;} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Nótese que la matriz de adyacencia de un grafo depende del orden elegido para los vértices; por tanto, hay $n!$ matrices de adyacencia distintas para un grafo de n vértices.

Ejemplo 1. *Se presentan dos matrices de adyacencia para representar el grafo* $G = (V, E)$, *donde* $v = a, b, c, d$ *(véase figura **2-6**). En la primera ordenamos los vértices de la forma* $v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c$ *y* $v_4 = d$ *y en la segunda ordenamos los vértices* $v_1 = b, v_2 = c, v_3 = a$ *y* $v_4 = d$.

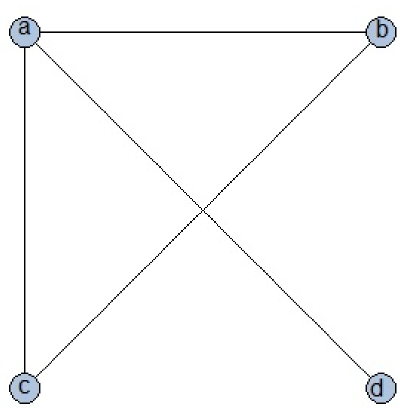
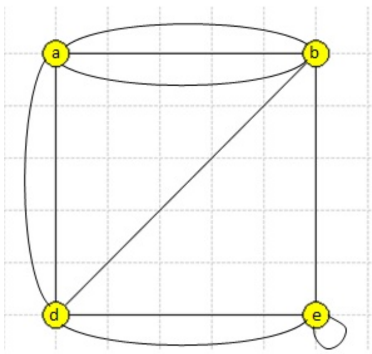


Figura 2-6.: Grafo Simple.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2. *Una matriz de adyacencia para representar el pseudografo que se muestra en la figura **2-7** donde* $v_1 = a, v_2 = b, v_3 = e$ *y* $v_4 = d$ *es:*



$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

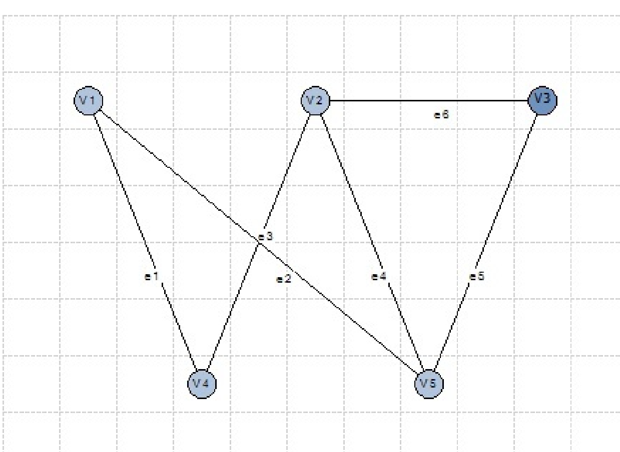
Figura 2-7.: pseudografo.

Matrices de incidencia

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Supongamos que $v_1, v_2, ..., v_n$ son los vértices y $e_1, e_2, ..., e_m$ las aristas de G. Entonces, la matriz de incidencia con respecto a este ordenamiento de V y de E es la matriz $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ $n \times m$ dada por

$$mij = \begin{cases} 1, & \text{si la arista } e_j \text{ es incidente con } v_i; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo 3. *Una matriz de incidencia para el grafo que se muestra en la figura **2-8** es:*



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2-8.: Grafo no dirigido.

Isomorfismo de grafos

Definición 7. Dos ***grafos son isomorfos*** si existe una correspondencia uno a uno entre los vértices de éstos y además esta correspondencia respeta las aristas. Ésto es: llamemos $G= (V, A)$ el primer grafo y $H= (U, B)$ el segundo grafo. Un isomorfismo $\phi : G \to H$ es una función que cumple[5]*;*

1. *$\phi_v : V \to U$ es biyectiva*

2. *$\{a, b\} \in A$ si y sólo si $\{\phi_v(a), \phi_v(b)\} \in B$ para todo a, b en V.*

Ejemplo 4. *Considérese los grafos A y B de la fígura **2-9***

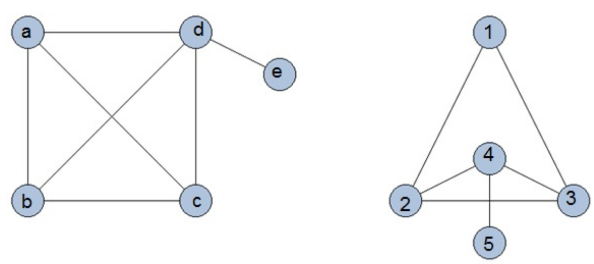


Figura 2-9.: Grafos.

Se tiene que $\delta(e)$=$\delta(5)$=1 mientras que el grado de cualquier otro vértice es 3. Ésto induce cómo construir un isomorfismo ϕ de G en H, pues se debe tener entonces $\phi(e)$=5. Ahora, para que el isomorfismo respete aristas es necesario que los vértices adyacentes de e vayan a los vértices adyacentes de 5 por tanto $\phi(d) = 4$ por la misma razón se puede tomar $\phi(a) = 1$ y $\phi(b) = 3$. Por lo tanto la función ϕ resulta un isomorfismo de G en H.

En conclusión, para que dos grafos sean isomorfos deben tener el mismo número de vértices, puesto que hay una biyección entre los conjuntos de vértices de los grafos, deben tener el mismo número de aristas y los grados de los vértices tienen que coincidir. Otra forma de verificar el isomorfismo entre dos grafos es comparando sus matrices de adyacencia, si éstas son iguales, los grafos son isomorfos.

2.1.4. Trayectorias de Euler

Definición 8. Una trayectoria es una sucesión de vértices con la propiedad de que cada vértice es adyacente al siguiente, y tal que en la correspondiente sucesión de aristas todas las aristas son distintas. Es permitido que un vértice aparezca en una trayectoria más de una vez.

Definición 9. un grafo G es **conexo** si para cualquier par de vértices v, w de G existe una trayectoria de v a w.

Definición 10. Un grafo conexo G es **euleriano** si existe una trayectoria que incluya todas las aristas de G.

La condición de que G sea conexo se requiere para excluir aquellos grafos que tienen vértices aislados. Ahora bien, cabe preguntarnos si todos los grafos tienen una trayectoria euleriana, de no ser así, ¿Qué tipos de grafo cumplen con dicha condición? Euler, tratando de resolver el problema de los puentes de Königsberg, generalizó este tipo de preguntas del siguiente modo:

Teorema 3. *Un grafo conexo G es euleriano si y sólo si el grado de todo vértice es par.*

Ejemplo 5. *El lector puede verificar que el grafo de la figura* ***2-10****, llamado* las cimitarras de Mahoma [1]*, tiene un trayecto euleriano ya que todos los vértices tienen grado par.*

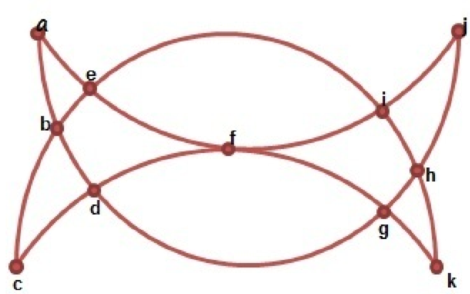


Figura 2-10.: Las cimitarras de Mahoma

[1] Este grafo se asocia a la firma que hizo Mahoma de una sola vez, con la punta de su cimitarra (o espada), formada por dos lunas crecientes opuestas

Teorema 4. *Un grafo conexo G tiene una trayectoria euleriana si, y sólo si, tiene exactamente dos vértices de grado impar.*

El teorema 4 se complementa con el teorema 2 y por esto se excluye la posibilidad de que exista un grafo con sólo un vértice de grado impar, además, para que en este caso se pueda realizar cualquier trayectoria de Euler, debe iniciar en uno de los vértices de grado impar y terminar en el otro .

Ejemplo 6. *En la figura* ***2-11****, d y b son los únicos vértices de grado impar con* $\delta(d)$=3 *y* $\delta(b)$=3*, por esto se puede decir que* G_1 *tiene un trayecto de Euler, cumpliendo la condición anterior, la trayectoría tendría como extremos los vértices b y d, así una posible trayectoría podría ser:* $b, a, g, f, e, d, c, g, b, c, f, d$

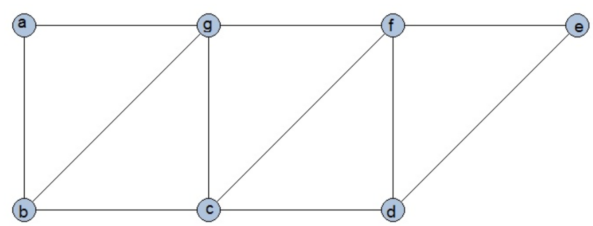


Figura 2-11.: G_1

Como consecuencia del Teorema 4 se tiene el siguiente corolario

Corolario 1. *Si un grafo G tiene más de dos vértices de grado impar, entonces no puede tener una trayectoria de Euler.*

Ya tenemos el suficiente material para responder la pregunta: ¿Es posible recorrer los siete puentes de Königsberg de modo que pueda comenzarse a caminar en algún punto de la ciudad, atravesar todos los puentes y acabar en otro punto de la ciudad? Como vimos, el problema se puede representar por medio del grafo **2-12**

El grafo a recorrer es el siguiente:

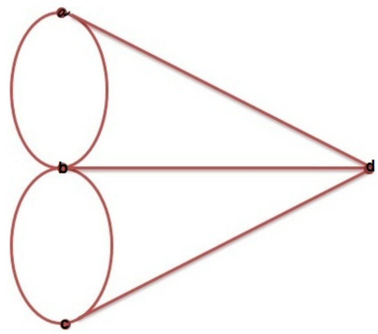


Figura 2-12.: Grafo Puentes de Königsberg

como se tiene que $\delta(a)$=3, $\delta(b)$=5, $\delta(c)$=3, $\delta(d)$=3, hay 4 vértices de grado impar, por lo tanto es imposible realizar el recorrido bajo tales condiciones, es decir, no hay un trayecto euleriano. Y así quedó resuelto el problema: no es posible cruzar los sietes puentes de Königsberg en un paseo continuo sin cruzar dos veces alguno de ellos.

2.1.5. Coloreado de grafos

El coloreado de mapas ha sido una práctica antigua que incluso se realiza desde los primeros años del colegio, pero ¿teniamos idea que una situación como esta se podía modelar matemáticamente? Pues existe una teoría denominada ***coloreado de grafos*** que se encarga del estudio de este tema. El objetivo es colorear un mapa de modo que dos fronteras adyacentes (o vecinas) no tengan el mismo color. Una forma práctica y efectiva que garantice esta condición, es colorear cada una de las regiones con colores diferentes, pero brindaría muy poca información acerca del mapa, por lo que se plantea la pregunta ¿Cuál es la mínima cantidad de colores que se pueden usar para colorear un mapa de modo que dos fronteras adyacentes no compartan el mismo color? A continuación se presentan algunas definiciones y teoremas que ayudarán a responder esta pregunta, usando la teoría de grafos.

Todo mapa en el plano se puede representar por medio de un grafo. Para hacerlo, cada región del mapa se representa mediante un vértice. Una arista conecta dos vértices si las regiones representadas por dichos vértices tienen frontera común. Dos regiones que se tocan en un solo punto no se consideran adyacentes. Al grafo resultante se le llama ***grafo dual***.

El problema de colorear las regiones de un mapa es equivalente al de colorear los vértices de un grafo dual de tal manera que ningún par de vértices adyacentes del grafo tenga el mismo color.

Definición 11. Una **coloración** de un grafo simple, consiste en asignarle un color a cada vértice del grafo de manera que a cada dos vértices adyacentes, se le asignan colores distintos.

En los anexos se especifica cómo se realiza la coloración de un grafo simple.

Definición 12. El **número cromático** de un grafo es el número mínimo de colores que se requieren para una coloración del grafo.

Enseguida se referencia, quizá, uno de los teoremas más polémicos en matemáticas por la validez de su demostración.

Teorema 5. ***EL TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES***. *El número cromático de un grafo planar es menor o igual que cuatro.*

Con este teorema queda resuelta nuestra pregunta: cualquier mapa se puede colorear con 4 colores o menos, de modo que a las regiones adyacentes se les asigne colores distintos. En [7] el lector interesado encontrará una explicación matemática detallada del Teorema de los cuatro colores.

2.2. Entornos y continuidad

Pasamos ahora a los conceptos básicos de la topología necesarios para apreciar la matemática involucrada en la cinta de Möbius.
El problema de ¿Qué es una magnitud continua? es tan antiguo como la matemática misma. Los griegos clasificaban las magnitudes (lo que se puede medir) en dos clases: continuas y discretas. Por magnitudes continuas entendían aquellas que se podían dividir indefinidamente y sus partes seguían siendo magnitudes del mismo tipo. Para los pitagóricos todas las magnitudes son discretas (todo es número o relaciones entre números) mientras que para Parménides todo es continuo. Es así como surgen las paradojas de Zenón sobre el movimiento, en las cuales se muestra la dificultad al considerar si el tiempo y el espacio son continuas

o discretas. El criterio de magnitud continua, que de alguna manera involucra la noción de infinito, seguiría causando problemas a la matemática mientras no se dió una definición precisa del concepto. Fue Cantor quien resolvió el problema al mostrar que la continuidad es un tipo de relación de orden: *Un conjunto es continuo si y solo si es denso y completo.*
En los trabajos de Cantor que dan origen a la teoría de conjuntos, también encontramos gérmenes de la topología. Allí se encuentran los conceptos de vecindad, punto límite e implícitamente lo que se llamaría después conjunto cerrado (los que tienen todos sus puntos límites).
Teniendo en cuenta una definición intuitiva de topología, se puede decir que ésta estudia las propiedades invarientes de los objetos geométricos con respecto a las funciones continuas. Es por éllo que una elipse, un círculo, un cuadrado, son topológicamente iguales. Se permite hacer casi cualquier tipo de deformación: estirar, doblar, encoger, pero no cortar o hacer agujeros. Por esto a veces se le llama a la topología, la geometría de la superficie de goma.
Un tratamiento juicioso de las nociones de topología en la secundaria, ayudaría a que los estudiantes tuvieran mayor comprensión de conceptos tales como límite y continuidad que son claves en el desarrollo del cálculo. Daremos importancia a la observación, descripción y análisis de las propiedades topológicas de los objetos estudiados. A continuación encontramos los mínimos referentes teóricos para el manejo de las nociones básicas de la topología.
La única definición formal que se da en este trabajo es la de espacio topológico, (definición 13, tomada de [14]), a partir de ésta se darán definiciones informales, de los conceptos que nos interesa desarrollar.

Definición 13. Sea X un conjunto no vacío. Una colección τ de subconjuntos de X se dice que es una **topología** sobre X si

(i) X y el conjunto vacío, $\emptyset$, pertenecen a τ.

(ii) la unión de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos en τ pertenece a τ, y

(iii) la intersección de dos conjuntos cualesquiera de τ pertenece a τ.

El par (X, τ) se llama **espacio topológico.**

Ejemplo 7. *Sean* $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ *y* $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$. *Entonces* τ_1 *es una topología sobre* X*, pues satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) de la definición 13.*

Ejemplo 8. *Sean* $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ *y* $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}\}$. *Entonces* τ_2 ***no*** *es una topología sobre* X*, porque la unión*

$$\{c, d\} \cup \{a, c, e\} = \{a, c, d, e\}$$

de dos miembros de τ_2 *no pertenecen a* τ_2*; es decir,*τ_2 *no satisface la condición (ii)de la definición 13.*

2.2.1. Entornos o vecindades

El **entorno** o **vecindad** de un punto $a \in U$ hace referencia a un subconjunto X de U al cual pertenecen los "vecinos" x en U, que están a una determinada distancia. Más precisamente:

Definición 14. Definiremos el **entorno o vecindad** de a en U de radio r, como el conjunto de todos los puntos $x \in U$ cuya distancia a a es menor que r. El entorno se representa por $V(a, U, r)$ y cuando el conjunto está claramente especificado se nombra como $V_r(a)$

$$V(a, U, r) = V_r(a) = \{x \in X / |a - x| < r\}$$

Si $U = R^2$, resulta que $V_r(a) = \{x \in X / |a - x| < r\}$ es precisamente el interior de un círculo con centro a y radio r, como se ilustra en la figura **2-13**

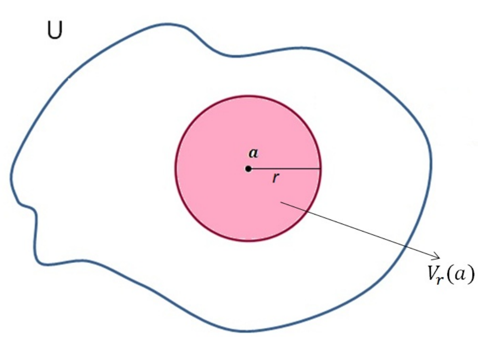


Figura 2-13.: Vecinos de a en U que están a una distancia r

Ejemplo 9. En el caso $U = \mathbb{R}$, $a = -1$, los vecinos de -1 a una distancia de $\frac{1}{2}$ es el intervalo $(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2})$

$$V_{\frac{1}{2}}(-1) = \{x \in \mathbb{R}/|x - a| < \frac{1}{2}\}$$

que se ilustra en la imagen ***2-14***

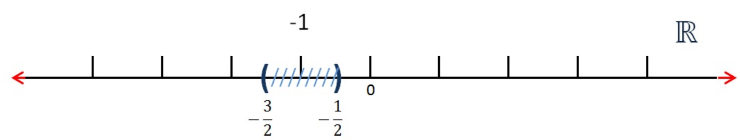


Figura 2-14.: Intervalo

En el caso de $U = \mathbb{R}^3$ si $a = (-1, 3, 5)$, $V_r(a)$ es una esfera de centro en a y radio r.

Naturalmente el concepto de vecindad se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$ sin mayores dificultades.

Este concepto de vecindad nos permite definir **punto interior**, **punto frontera** y **punto exterior** de un conjunto X, (véase fig. **2-15**) de la siguiente manera:

Sea U el universo, $X \subseteq U$, $a \in X$;a es un **punto interior** de X si existe una vecindad de a que sea subconjunto propio de X.

Sea $b \in U$; b es un **punto frontera de** X si la intersección de toda vecindad de X con su complemento en V es igual a b. Esto es, para todo$r \in \mathbb{R}^+$, se tiene que:

$$V_r(a) \cap (U - X) \neq \emptyset,$$

Y si $c \in U$ y existe una vecindad de c en U tal que $V_r(c) \cap X = \emptyset$, entonces, c se llama un **punto exterior** de X.

Un **conjunto es cerrado** si contiene todos sus puntos frontera. Por ejemplo en $\mathbb{R}$ el intervalo $[a, b]$ es un conjunto cerrado, ya que a, b sus puntos frontera, pertenecen al intervalo. Otra definición análoga es: Un conjunto es cerrado si su complemento es abierto. Para el intervalo $[a, b]$ se tiene que:$\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, que evidentemente es abierto.

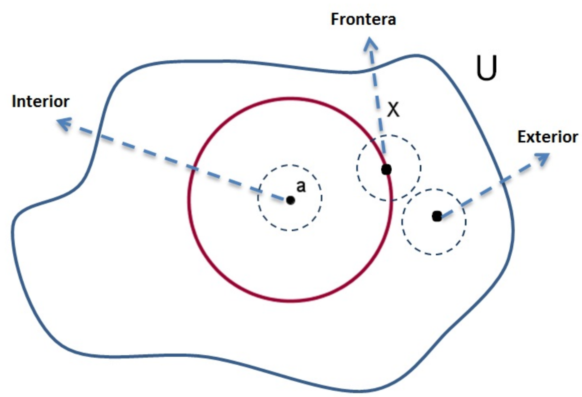


Figura 2-15.: Punto interior, exterior y frontera de X.

2.2.2. Conjuntos abiertos

No es fácil ver de antemano por qué la noción de conjunto abierto llegaría a ser fundamental en la topología. Es un hecho histórico que ha sido reconocido muy lentamente. En los primeros tiempos del desarrollo de la topología $(1900 - 1930)$ se idearon y establecieron gran variedad de aproximaciones al objeto. En relación con estos conceptos están los de proximidad, espacio métrico, puntos límites, límites de sucesiones y otros. Sólo al final de este período llegó a esclarecerse que el concepto de conjunto abierto es una herramienta simple y flexible para la investigación de todas las propiedades topológicas. Desde entonces, este concepto ha constituido la aproximación preferida.

Definición 15. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Un subconjunto U de X se denomina un **conjunto abierto** de X si para cada punto de x de U existe algún entorno de x en X contenido en U. La condición puede establecerse: para cada $x \in U$ existe un número $r > 0$ tal que $V_r(x) \subset U$.

El intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, se llama **abierto** justamente por la definición anterior y $[a, b]$ es cerrado por la definición topológica de conjunto cerrado. Nótese que a y b en ambos casos son puntos frontera (o límites).
En $\mathbb{R}^2$ todos los conjuntos de la forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/(x-a)^2(y-b)^2 < r,\, (a, b) \in \mathbb{R}^2, r \in R^+\}$ son conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$, que son los círculos de centro en (a, b) sin los puntos de la

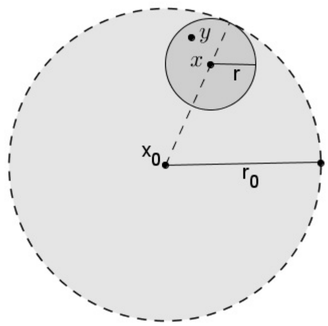


Figura 2-16.: Conjunto abierto

circunferencia que delimita el círculo.

Las vecindades, serán entonces conjuntos abiertos.

2.2.3. Continuidad

Definición 16. Sea la función $f : X \longrightarrow Y$ $(X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^n)$. Decimos que f es **continua** si y solo si, para cada $x \in X$ y para cada vecindad $V(f(x), Y, r)$ existe una vecindad $V(x, X, r')$ tal que $f(V(x, X, r')) \subseteq V(f(x), Y, r)$.

Se dice que f es continua si lo es en todo punto de X. Si se interpreta ϵ y δ como medidas del grado de proximidad, la definición dice que es posible conseguir elementos $f(x')$ tan próximos a $f(x)$ como se desee sólo con tomar x' suficientemente próximo a x. En otras palabras: Si se toma una vecindad cualquiera $V(f(x), Y, \varepsilon)$ existe $V(x, X, \delta)$ tal que $f(x, X, \delta) \subseteq V(f(x), Y, \varepsilon)$ (Véase **2-17**)

2.2.4. Cinta de Möbius

¿Si se tiene una banda de papel se puede generar una rosquilla por medio de dobleces o uniones de algunos extremos? Pues bien, hablamos aquí de lo que en topología se conoce como superficies compactas que son homeomorfas entre sí. La definición formal de compacidad y homeomorfismo requiere de conceptos más avanzados de topología que se salen de los intereses de este trabajo, el lector interesado podrá consultar las referencias [19] y [14]. Sin

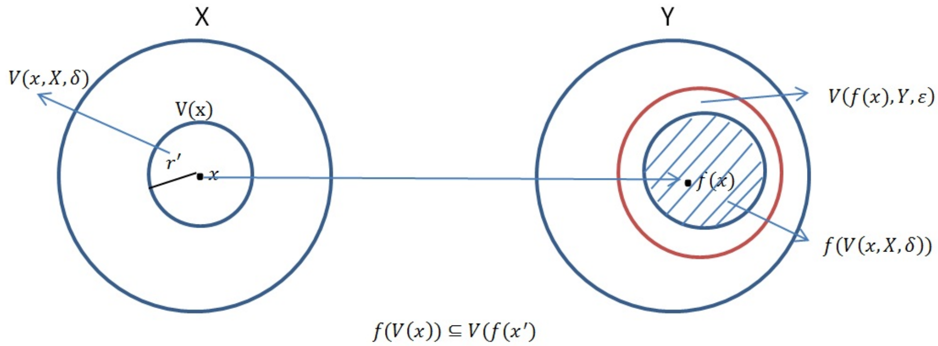


Figura 2-17.: Continuidad

embargo se darán algunos ejemplos de este tipo de superficies.

La primera figura es el toro o rosquilla. Con una cinta se arma un cilindro, si se pegan los bordes del cilindro se obtiene un toro **2-18**.

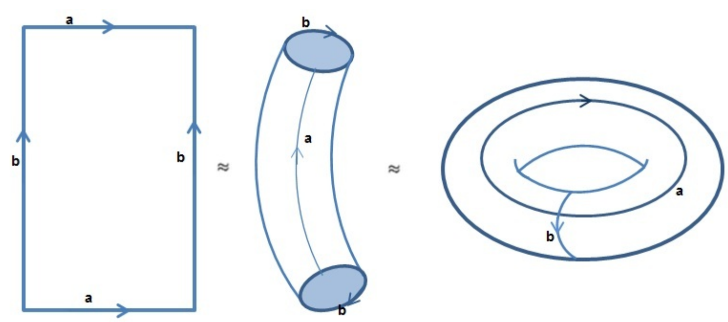


Figura 2-18.: Toro

La segunda figura es la cinta de Möbius. En capítulos anteriores se ha hablado de las interesantes características esta cinta: es una superficie de una sola cara, un solo borde y es no-orientable. Para construirla se toma una banda de papel y se pegan los dos extremos dando medio giro a uno de ellos.

Topológicamente esta banda puede definirse como el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ que tiene sus aristas superior e inferior identificadas (topología cociente) por la relación $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ para $0 \leq x \leq 1$, como se muestra en la figura **2-19**.

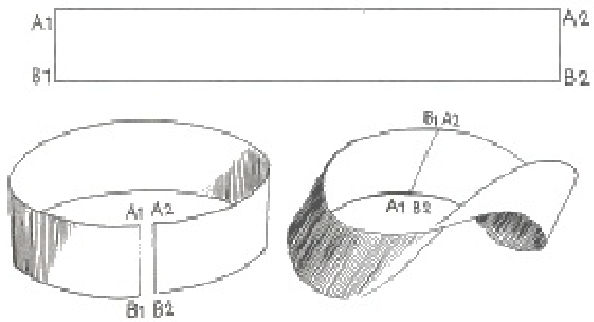


Figura 2-19.: Cinta de Möbius

Debido a sus novedosas y curiosas características ha sido objeto de inspiración para sorprendentes aplicaciones: obras de arte, poemas, pasando por la música y su aplicación en soluciones de la vida diaria como las cintas de grabación y la arquitectura.

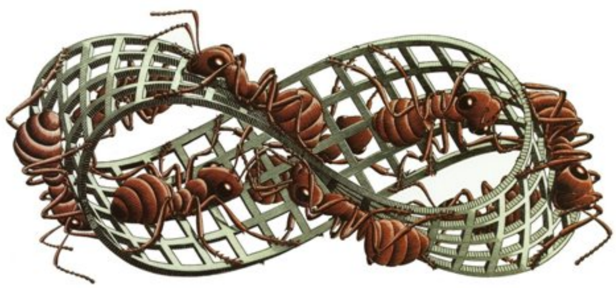


Figura 2-20.: Möbius Strip II-M.C.Esher, 1964

Otra forma de representar la cinta de Möbius es mediante la parametrización. Así una parametrización típica de la banda de Möbius es:

$$x(u,v) = (1\frac{v}{2}cos\frac{u}{2})cos(u) \tag{2-1}$$
$$y(u,v) = (1+\frac{v}{2}cos\frac{u}{2})sen(u) \tag{2-2}$$
$$z(u,v) = \frac{v}{2}sen\frac{u}{2} \tag{2-3}$$

$(0 < u \leq 2\pi; -1 < v < 1)$

Es posible graficar la cinta de Möbius en diversos programas matemáticos. A continuación se presenta el bosquejo usando el programa Maple 12. El comando usado para su construcción es:

$$plot3d([sin(t)*(1+v*cos((1/2)*t)), cos(t)*(1+v*cos((1/2)*t)), v*sin((1/2)*t)],$$

$$t=0.,2*Pi, v=-,2..,2, scaling=constrained)$$

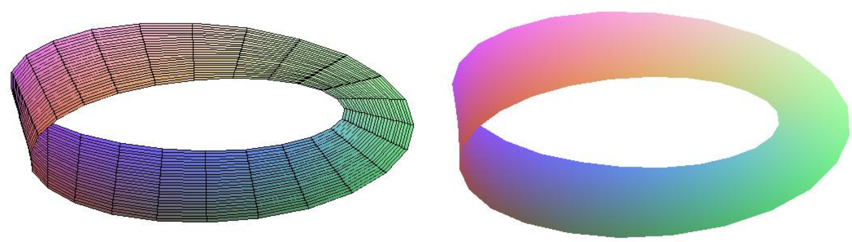


Figura 2-21.: Cinta de Möbius usando Maple 12

Nuestra tercera y última superficie es un supersólido llamdo la botella de Klein.

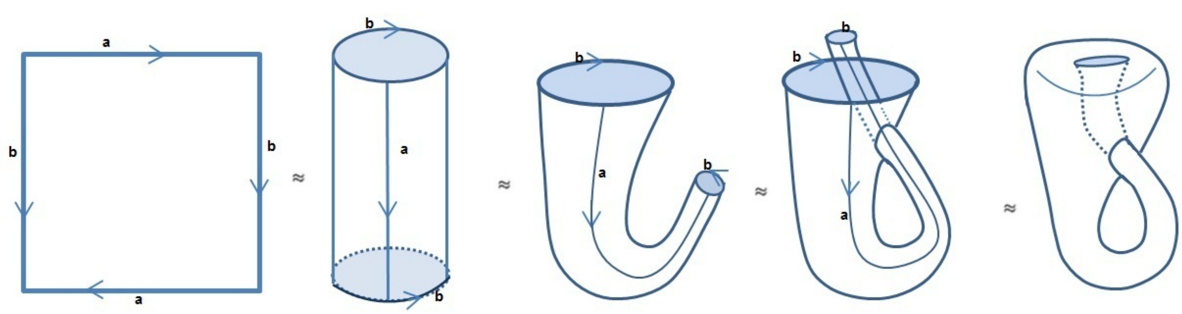


Figura 2-22.: Botella de Klein

Lo que se hace, en teoría, es pegar las aristas izquierda y derecha para formar un cilindro, y después pasar la tapa del cilindro a través de su pared, con el fin de pegar el círculo superior con el inferior desde adentro, como se representa en la fígura **2-22**. De hecho, ésta es una construcción que no es posible realizarla en R^3, porque, como se dijo anteriormente, para que dos objetos sean equivalentes no se permiten cortes ni agujeros, al tratar de construirla se tendría que hacer "trampa" y hacer un agujero, pero en esta particular botella, estos puntos no se tocan, por eso se dice que vive en un espacio de dimensión R^4. La botella de Klein es un objeto que tiene una superficie no orientable, no tiene borde, no tiene interior, ni exterior .

2.3. Teorema de Pick

Unos de los resultados más sorprendentes y sencillos de la matemática, el cual relaciona el área de un polígono con el número de vértices que hay en el borde y el interior del mismo, cuando éste es colocado sobre una rejilla o cuadrículada uniforme, es conocido como Teorema de Pick[2].

El teorema se enuncia de la siguiente manera:

Teorema 6. Sea P un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras. Si B es el número de puntos en el borde, I el número de puntos en el interior del polígono, entonces el área del polígono A(P) se puede calcular por la fórmula:

$$A(P) = I + \frac{B}{2} - 1. \tag{2-4}$$

Para la demostración de dicho Teorema, pueden consultarse las referencias [9], [6]. El siguiente ejemplo, en cual se esquematiza una corona [15], ilustra la genialidad, brillantez y belleza del Teorema de Pick

[2]George Alexander Pick: matemático austriaco nacido en Viena (1859), hijo de padres Judios, fue un hombre dedicado a la producción académica, que murió en un campo de concentración nazi durante la segunda Guerra Mundial (1942). Es reconocido por su producción intelectual. Algunos aportes son: *matrices de Pick*, *Interpolación de Pick-Nevanlinna*, algunos escritos sobre áreas como: variable compleja, ecuaciones diferenciales, análisis funcional, geometría diferencial, entre otros. Uno de sus mayores reconocimientos se debe al teorema que lleva su nombre (1899)[9]

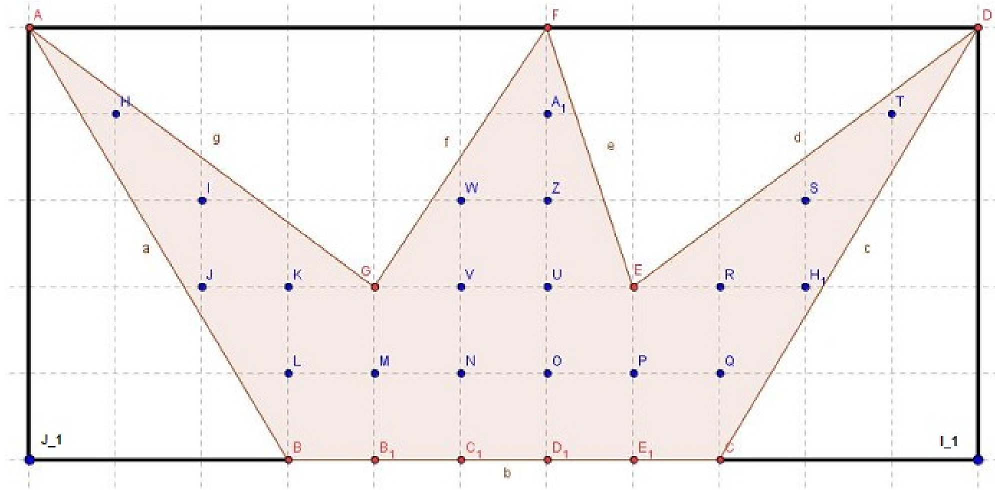


Figura 2-23.:

Nótese que en la figura **2-23**[3], el número de puntos en el interior de la corona es 19, y el número de vértices en el borde de la corona es 11. Así que, usando el Teorema de Pick, se tiene que el área viene dada por:

$$A(P) = 19 + \frac{11}{2} - 1 = 23{,}5.$$

Ahora si calculamos el área de la corona hallando las áreas de los triángulos blancos que son: $\triangle ABJ_1 = \frac{15}{2}$, $\triangle AGF = \frac{18}{2}$, $\triangle FED = \frac{15}{2}$, $\triangle DCI_1 = \frac{15}{2}$, como el área del rectángulo es 11×5 tenemos que:

$$A(P) = 55 - \frac{63}{2} = 23{,}5.$$

Tenemos un resultado equivalente, así se puede seguir verificando el área de cualquier polígono, siempre y cuando éste se encuentre en una rejilla cuadriculada.

[3]Fígura tomada de [15]

3. La enseñanza de la topología en la educación básica

La geometría se enmarca en uno de los cinco ejes de pensamiento que plantean los lineamientos curriculares. Haciendo un recorrido por éstos, se hace necesario ampliar la visión e ir más allá de la geometría euclidiana, estimulando en los estudiantes el estudio de otras geometrías ya que también brindan un soporte para explicar fenómenos del mundo real. La siguiente cita ratifica mis apreciaciones:

> Durante los últimos 200 años las matemáticas han sufrido bastantes cambios, pero el contenido que se sigue enseñando en las aulas de clase parece intacto. Los libros que sirven de guía para las clases actuales están hechos con un modelo de vida que caducó hace ya bastante tiempo. (Combariza, 2003, p. 565)

En los lineamientos curriculares encontramos que para el ciclo inicial se reseña de manera intuitiva algunas nociones topológicas tales como: estar adentro, afuera, en el borde, descripción de caminos y trayectorias que se relacionan directamente con conceptos topológicos, pero que no se retoman en grados más avanzados.
En los lineamientos los conceptos topológicos son un componente importante del currículo en cuanto que:

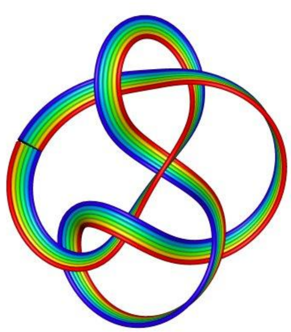
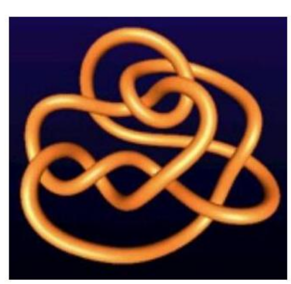
> Desde esta perspectiva se rescatan, de un lado, las relaciones topológicas, en tanto reflexión sistemática de las propiedades de los cuerpos en virtud de su posición y su relación con los demás y, de otro lado, el reconocimiento y ubicación del estudiante en el espacio que lo rodea, en lo que Grecia Gálvez ha llamado el meso-espacio y el macro-espacio, refiriéndose no sólo al tamaño de los espacios en los que se desarrolla la vida

> del individuo, sino también a su relación con esos espacios (Ministerio de Ministerio de Educación Nacional, 1998. Matemáticas. *Lineamientos curriculares* pág. 56). En este primer momento del pensamiento espacial no son importantes las mediciones ni los resultados numéricos de las medidas, sino las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, y la ubicación y relaciones del individuo con respecto a estos objetos y a este espacio. (p. 61)

Allí hay una reflexión importante desde diferentes puntos de vista, pero se restringen a una primera parte de la vida en el colegio. Lo que buscamos es ampliar esta visión y acercar a los estudiantes de educación media a este tipo de conceptos y relaciones matemáticas.

3.1. Topologia para niños y jóvenes

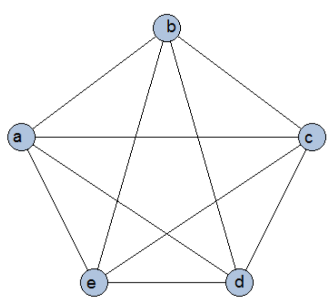
Durante los ciclos inciales (I,II, III) de la educación básica, hay diversos recursos que impulsan a preguntar, conjeturar, afirmar y generalizar. Estos recursos se relacionan de manera directa con aspectos de la topología y promueven una exploración temprana del espacio. Autores como Stephen Barr [2], han propuesto una serie de actividades encaminadas a la resolución de problemas topológicos (grafos, recorrido, forma, equivalencia,nudos), cuando éstos se abordan en el aula no pasan de un ejercicio recreativo. En una primera etapa esto no genera un obstáculo, ya que a mediano o largo plazo se pueden fortalecer procesos asociados al pensamiento lógico espacial.
Para ilustrar la idea anterior consideremos la habilidad de un niño al amarrarse los zapatos, después de adquirida la destreza es posible hacer preguntas para estimular su curiosidad e ingenio como: ¿Cuál de los siguientes nudos se puede desenredar? Si se desenreda el nudo ¿Qué se obtiene, es posible conseguir el nudo inicial?

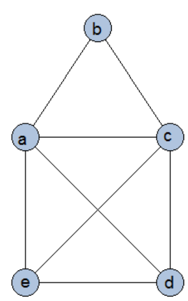
 

Esta cuestión trivial, es la oportunidad perfecta para estructurar más adelante una definición como: un nudo es un espacio topológico homeomorfo a un círculo, es decir, una curva cerrada en $\Re^3$.

Una búsqueda rigurosa en la red nos muestra escasas actividades para la iniciación al desarrollo del pensamiento geométrico asociado a la topología, y más escasas son aún las que presentan propuestas de enseñanza de la topología en la educación básica y media (ciclos III, IV y V).

Los problemas usuales de la topología para la educación básica, son un gran reto para el ingenio de los jóvenes, pero no pasan de una etapa exploratoria y habitualmente no se hace una relación rigurosa con definiciones de topología, que pueden empezar a trabajarse desde el colegio. Un ejemplo común es el trazado de una figura sin levantar el lápiz ni repetir línea (grafo-euleriano), en la mayoría de los casos se hace el ejercicio sin asociar ni analizar detenidamente esta situación desde la teoría de grafos. La práctica anterior, puede llevar al estudiante a la generalización, e introducción de conceptos como: función y generalidades de grafos. Para esbozar lo anterior describamos los grafos de la siguiente figura:





Sea a, b, c, d, e, los vértices del grafo G y $\delta(a), \delta(b), \delta(c), \delta(d), \delta(e)$ el grado de cada vértice. La expresión

$$\frac{\delta(a) + \delta(b) + \delta(c) + \delta(d) + \delta(e)}{2}$$

corresponde al número de aristas del grafo, es decir, que la mitad de la suma del número de aristas que inciden en cada vértice es igual al número de aristas del grafo (Teorema del apretón de manos). Tareas como esta, conducen al estudiante a observar regularidades y llegar a generalizaciones.

Para llegar a este tipo de generalizaciones es necesario guiar al estudiante en este proceso de descubrimiento; encontramos en el **Método de Aprendizaje Activo** una estrategia completa y adecuada que brinda importantes aportes en cuanto al procedimiento a seguir, esta estrategia sugiere los siguientes pasos por parte del estudiante:

- Predicción
- Actividad
- Observación
- Discusión
- Síntesis

El docente tiene el papel de proponer interesantes y enriquecedoras situaciones, guiar al estudiante a través de preguntas, motivar la socialización y discusión de los diferentes resultados y llegar a consensos a partir de la determinación de acuerdos, luego se buscarán situaciones análogas con diferentes características, pero que correspondan al mismo concepto. En este orden de ideas el docente ya no es el "protagonista" en el proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que se convierte en un mediador entre el saber y el estudiante.
Además, con el desarrollo de la tecnología, los programas de tipo matemático y el alcance de las calculadoras, es necesario restructurar nuestra práctica educativa, ya que el énfasis no se debe dirigir a procesos mecánicos y algorítmicos, sino que se debe enfocar en la resolución de problemas, el análisis de situaciones específicas, la creación por parte de los estudiantes de nuevas estrategias, el contraste de esas estrategias y la validación de la más acertada, llevamos a nuestras aulas contenidos desactualizados.
En la propuesta queremos dejar la reflexión de lo importante y oportuno que es reestructurar nuestra práctica pedagógica, de llevar contenidos nuevos, actualizados e interesantes, de compartir el protagonsimo con los estudiantes y de plantearles nuevos retos

4. Propuesta Didáctica

Este capítulo presenta las actividades que se proponen para el desarrollo de algunas nociones de topología en estudiantes de grado décimo. Para ello se retoman, tanto la parte histórica descrita en capítulos anteriores, como algunos aspectos de la parte disciplinar, tomando como eje principal el tratar de dar solución a ciertas situaciones que requieren de elementos de esta rama de la matemática. Los puentes de Königsberg, el teorema de cuatro colores y la cinta de Möbius, son los problemas con los que pretendemos desarrollar en los estudiantes, habilidades como la visualización, interpretación, descripción, clasificación , análisis, y creación de imágenes o situaciones que tengan que ver con nociones básicas de topología.
Si bien en los Estándares del MEN [12] para este grado se trabajan aspectos del pensamiento espacial como:

- Define la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.
- Visualiza objetos en tres dimensiones desde diferentes perspectivas y analiza sus secciones transversales.

Están encaminadas hacia el aprendizaje de la geometría analítica y el cálculo. Con actividades como recorrer una figura sin levantar el lápiz, reconocer elementos que están en el interior, en el exterior o en la frontera de alguna figura, colorear una figura y mostrando la influencia de las matemáticas en el arte, la música, y la vida diaria, buscamos darle a nuestros estudiantes la oportunidad de interactuar con elementos que son sencillos pero a la vez muy enriquecedores. Para ésto es necesario brindar nuevas e interesantes estrategias a nuestros estudiantes, motivar la exploración y dar a conocer el origen de ciertos conceptos matemáticos. Ésto nos obliga cada vez más a plantear actividades que promuevan el interés y la indagación hacia las matemáticas.

Parte de la motivación para lograrlo, consiste precisamente en dar a conocer el contexto histórico de una situación o hecho en particular con el fin de humanizar las matemáticas, para que se evidencien los problemas que en el momento generaron la necesidad de crear una estrategia para resolverlos; es interesante conocer quienes intentaron resolverlos y quién lo logró finalmente y bajo qué condiciones, tal como afirma Miguel de Guzman en [8].

> La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. Cuántos de esos teoremas, que en nuestros días de estudiantes nos han aparecido como verdades que salen de la oscuridad y se dirigen hacia la nada, han cambiado de aspecto para nosotros al adquirir un perfecto sentido dentro de la teoría, después de haberla estudiado más a fondo, incluido su contexto histórico y biográfico.

Usar la historia como soporte didáctico exige preparación y conocimiento por parte de los docentes, tener unos objetivos claros para que no se vuelva el solo hecho de contar el “cuento”, sino que tenga una finalidad bien definida para aportar elementos importantes y significativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiates.

4.1. Actividades de Grafos

Esta primera actividad, tiene como fin proponer una situación que no se podrá resolver inicialmente con los preconceptos que tienen los estudiantes, pero la misma actividad irá guiando al estudiante en la búsqueda de una explicación. Es interesante ver cómo las ideas previas, de los estudiantes, que muchas veces son producto de su experiencia en la vida diaria, dan el punto de partida para el desarrollo de cierta actividad. El docente debe tener la habilidad para utilizarlas y así mismo modificar esas ideas previas, ya que la mayoría de las veces son erróneas. Además, cabe destacar el paralelismo que existe entre muchas de las ideas previas de los alumnos y determinadas teorías históricas de otras épocas generalmente precientíficas [3].

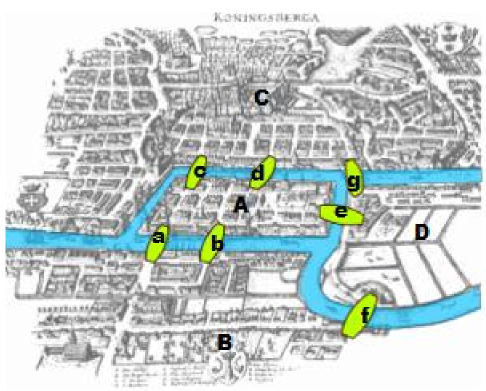
La actividad consiste en caracterizar los grafos y por medio de la observación y la generalización, llegar a definir cuáles tienen un recorrido euleriano y cuáles no. El objetivo es

que en un primer momento el estudiante haga una reflexión individual y luego a través de la comparación de resultados y la discusión en grupo (siguiendo el método de aprendizaje activo) logre llegar conclusiones correctas.
Además, la actividad que se propone logra conectar cierto tipo de grafos con formas que se encuentran en la naturaleza [1], lo que dará al estudiante una visión más amplia de la topología y en general de las matemáticas.

4.1.1. Actividad 1

Parte 1

En un puerto de la antigua Alemania, llamado Könisberg, situado en la costa sur del mar Báltico, el río dividía la ciudad en cuatro áreas de tierra separadas (A,B,C y D), y había siete puentes que le permitían a los habitantes de Königsberg cruzar el río para poder trasladarse de una parte a otra de la ciudad como lo muestra la figura.



Cuenta la historia que los habitantes de la ciudad se divertían intentando cruzar los siete puentes en un paseo continuo sin cruzar dos veces ninguno de ellos.

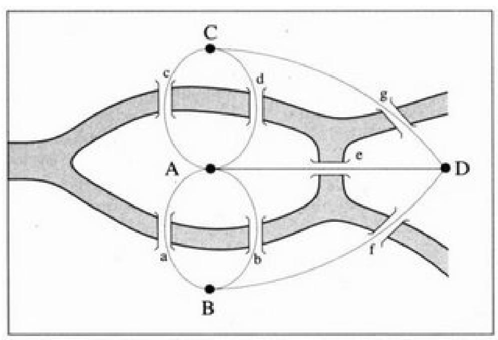
1. Observe la imagen e intente trazar un camino continuo cruzando por todos los puentes pero sin cruzar dos veces ninguno de ellos.

[1]La propuesta de grafos en la naturaleza, Natugrafos se desarrolló en una actividad en la clase de Taller Experimental de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Autores: Jimena Rodríguez, Andrea Castelblanco y Oswaldo Rubiano.

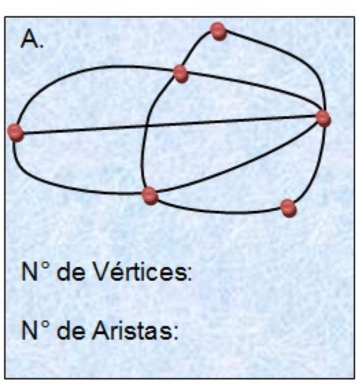
2. ¿Fue posible hacer el recorrido?

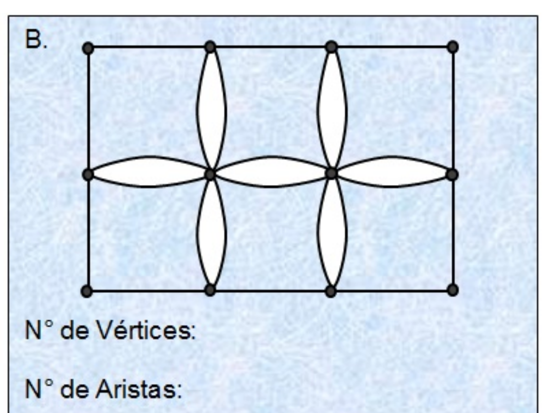
3. Consulte con sus compañeros ¿Alguno pudo hacer el recorrido bajo éstas condiciones?

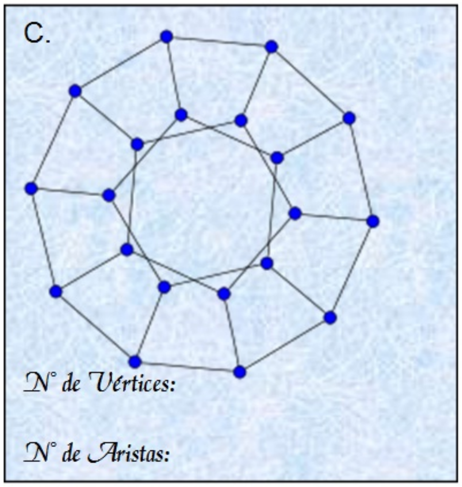
Existía la idea generalizada de que realizar el recorrido bajo éstas condiciones era imposible, pues siempre en el recorrido terminaban omitiendo un puente o cruzando alguno dos veces como le pudo haber sucedido en el intento, pero no tenían como sustentar esta imposibilidad. Pues Leonard Euler, un famoso matemático del siglo $XVIII$ que escuchó la historia, decidió tratar de darle una solución. Observando la distribución de los ríos y los puentes en la ciudad hizo un esquema, usando tan solo dos elementos esenciales los vértices y las aristas (líneas que unen dos vértices).

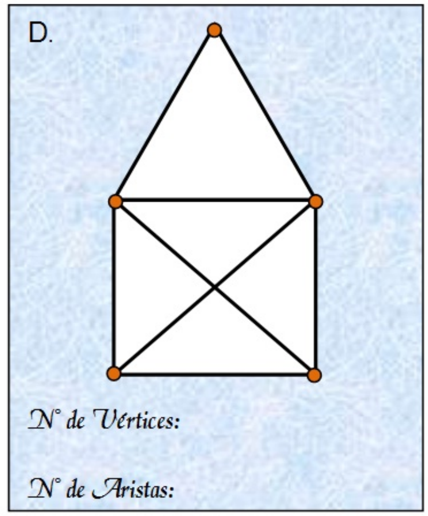


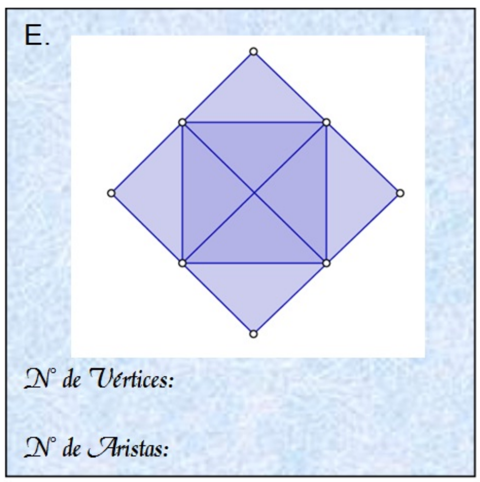
En el dibujo cada puente estaría representado por las aristas (a, b, c, d, e, f y g) y cada una de las cuatro ciudades por un vértice (A, B, C, y D). A este tipo de esquema lo denominó grafo. A continuación encontrará varios grafos. Identifique en cada uno, los vértices y las aristas. Para reconocerlos, los vértices estarán representados por puntos y las aristas por líneas (rectas o curvas) comprendidas entre dos vértices. Responda en cada caso:









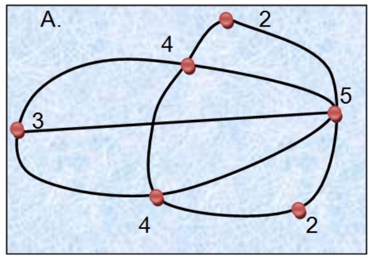


Ahora el reto es tratar de recorrer los anteriores grafos de modo que pase por cada una de las aristas sin levantar el lápiz del papel, pasando por cada una de ellas sólo una vez y terminando en el punto de inicio. Luego, responda:

1. ¿En cuáles grafos pudo hacer el recorrido?
2. ¿En cuáles grafos no fue posible hacer el recorrido? Forme un grupo de 3 personas y compare sus resultados con el de sus compañeros.

Parte 2

Si observas detenidamente cada uno de los grafos notarás que en cada vértice se encuentran una o más aristas, esto es denominado el **grado del vértice**. En el grafo A, el grado de cada uno de los vertices se muestra en la siguiente figura



Ya se ha familiarizado con algunos de los términos usados en teoría de grafos, pero vamos a tener en cuenta otro término para la realización de este punto: Dos vértices son **adyacentes** o (vecinos) en G si $\{u, v\}$ es una arista de G. Es decir una arista que tiene cómo extremos los vértices u y v. Teniendo en cuenta esta definición construya el siguiente grafo:

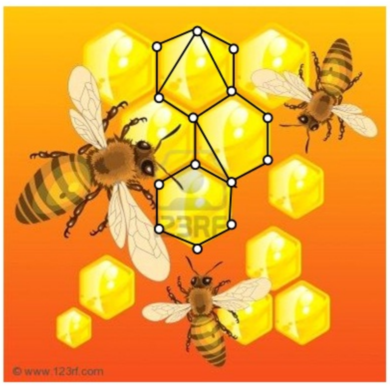
- El grafo tiene 7 vértices $(a, b, c, d, e, f y g)$ y 7 aristas. (Procure que los vértices no queden colineales)
- El vértice a es adyacente con los vértices c y f, y el vértice c es adyacente con los vértices a y e
- El vértice b es adyacente con los vértices d y g, y el vértice d es adyacente con los vértices b y
- El vértice e es adyacente con los vértices c y g

Después de construido el grafo, responda:

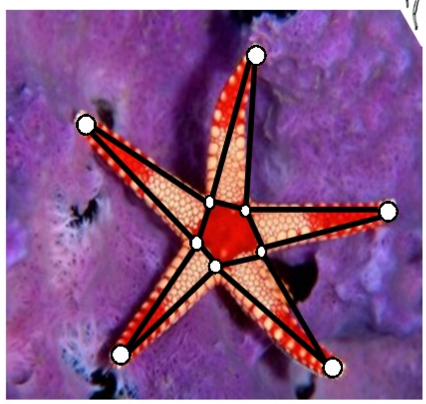
1. ¿Cuál es el grado de cada uno de los vértices? Sume los grados de los vértices y trate de encontrar alguna relación con el número de aristas.
2. Compare su grafo con el de otros compañeros, ¿Quedó igual?
3. Construya un grafo y dé a sus compañeros las indicaciones precisas para hacerlo, luego compare los resultados con el que había construido inicialmente ¿Son iguales?

Puede que los grafos construidos no tengan aparentemente la misma forma, pero tienen el mismo número de aristas, el mismo número de vértices y el grado de los vértices también coincide. A estos grafos se les denomina **grafos isomorfos**.

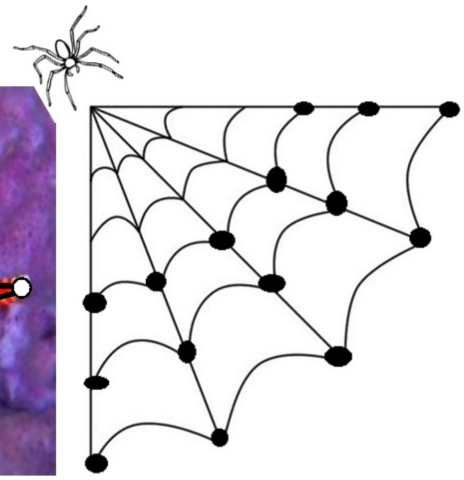
La belleza de las matemáticas radica en que en la naturaleza encontramos sorprendentes expresiones de la misma. Observa los siguientes ejemplos y completa la tabla:



COLMENA



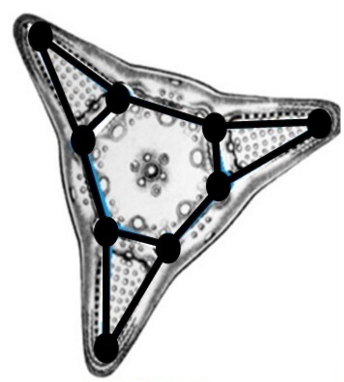
ESTRELLA DE MAR



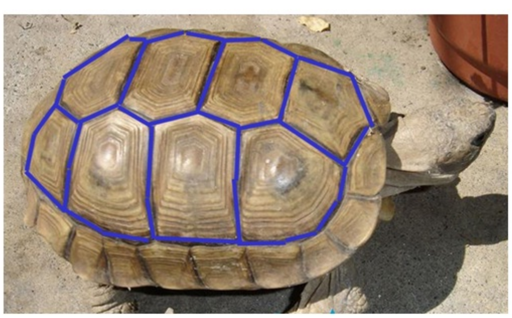
TELARANA

FLOR 1

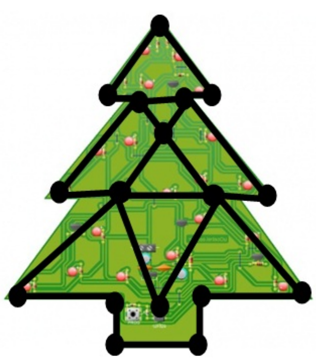
FLOR 2



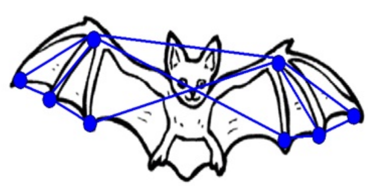
DIATOMEA



TORTUGA

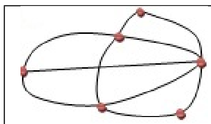
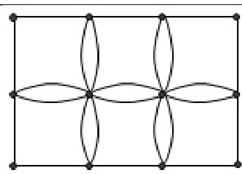
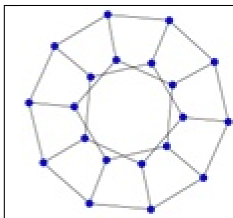
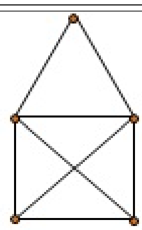
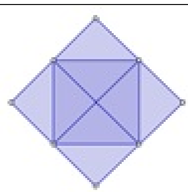
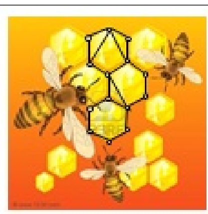
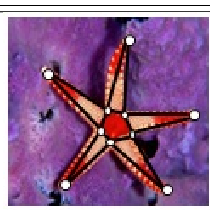


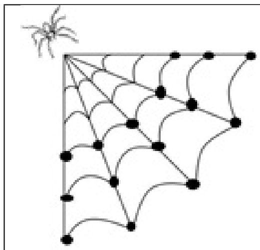
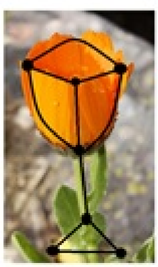
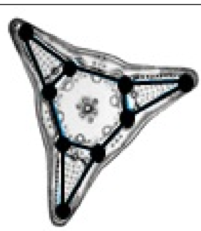
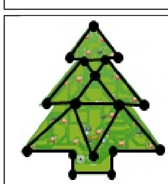
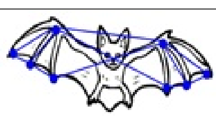
ÁRBOL



MURCIÉLAGO

Teniendo en cuenta los grafos A,B,C,D y E de la primera parte, completa la siguiente tabla

Grafo	Número de vértices pares	Número de vértices impares	¿Es recorrible?	Número de aristas	suma de los grados de todos los vértices
					
					
					
					
					
					
					

Grafo	Número de vértices pares	Número de vértices impares	¿Es recorrible?	Número de aristas	suma de los grados de todos los vértices
					
					
					
					
					
					
					

Teniendo en cuenta los datos registrados en la tabla, responde:

- ¿Existe alguna relación entre el número de aristas y la suma de los grados de todos los vértices? ¿Cuál?
- Si el grado de todos los vértices es par ¿El grafo es recorrible?
- Observe la información del grafo e. ¿Cuántos vértices de grado par tiene? ¿Cuántos vértices de grado impar tiene? ¿Es recorrible?
- ¿Qué otros grafos no son recorribles?
- Observe los grafos con un número de vértices de grado impar ¿Existe alguna relación entre esta información y el hecho de que el grafo sea recorrible o no?

4.2. Actividad Intervalos

Este grupo de actividades tiene como finalidad acercar a los estudiantes a algunas nociones topológicas como abierto, cerrado, frontera, interior, exterior, vecindad, tomando elementos propios del grado décimo como intervalos, ecuación de la circunferencia, ubicación en el plano, que ayudarán a la comprensión y preparación para conceptos como límite y continuidad que se abordarán en el grado 11, antes de realizar la actividad el docente dará algunas orientaciones acerca de estos conceptos.

4.2.1. Actividad

Definimos el conjunto universal, como el conjunto de todos los números reales.
Grafique el intervalo $X = [-5, \pi)$ y responda:

1. ¿-5 es un punto interior del intervalo?
2. ¿Es -5 una frontera del intervalo?
3. ¿Es π un punto interior del intervalo?
4. ¿Cómo se definiría el complemento del intervalo?

5. ¿El complemento del intervalo sería un conjunto cerrado o abierto? Explique su respuesta.

Grafique el intervalo $Y = [-3, 2]$ y responde:

1. ¿Cuáles son los punto frontera del intervalo?¿Están estos puntos en el conjunto Y?
2. ¿Cuál sería el complemento del intervalo presentado?
3. ¿Es $\sqrt{2}$ un punto interior del intervalo?
4. ¿Es π un punto interior o exterior del intervalo?

Ahora gráfique un círculo de radio 1. En las siguientes expresiones explique si se hace referencia a punto interior, punto exterior o punto frontera; en cada caso explique su respuesta.

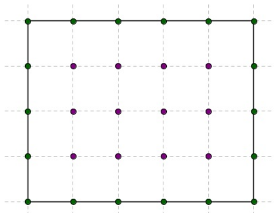
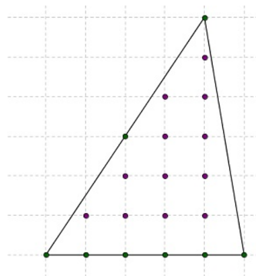
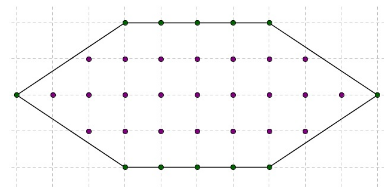
1. $\{(x, y)$ tal que $x^2 + y^2 > 1\}$
2. $\{(x, y)$ tal que $x^2 + y^2 = 1\}$
3. $\{(x, y)$ tal que $x^2 + y^2 < 1\}$

4.2.2. Teorema de Pick

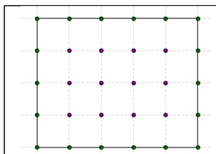
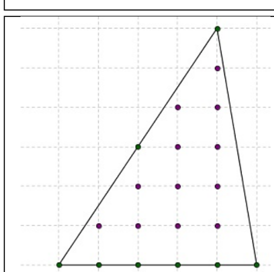
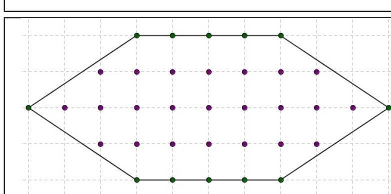
Esta actividad tiene como principal objetivo identificar puntos en el interior y en la frontera para la determinación de áreas de diferentes figuras, haciendo uso del Teorema de Pick. Se inicia con polígonos que los estudiantes conocen y han trabajado anteriormente como lo son el rectángulo y el triángulo y donde se asume que conocen las expresiones usuales de determinación del área (base x altura y (base x altura)/2 para el rectángulo y triángulo respectivamente) y se sigue con polígonos en los que hallar el área es más complicado.

Determinación de áreas de figuras usando el Teorema de Pick

Observe las siguientes figuras, en cada caso determine el área del polígono y explique el método utilizado.

Observe detenidamente las figuras que están sobre la cuadricula y complete la siguiente tabla:

Polígono	Puntos en el interior del polígono (I)	Puntos en el borde (B)	Puntos en el borde sobre 2 ($B/2$)	Área $A(P) = I + \frac{B}{2} - 1$
				
				
				

Compare con los resultados obtenidos inicialmente y explique.

4.3. Coloreando de mapas

¿Es posible que una actividad como colorear un mapa se pueda modelar matemáticamente? El objetivo de esta actividad es familiarizar a los estudiantes con el coloreado de diferentes figuras, por medio de la representación de un modelo matemático. Para colorear cada una de las figuras sugeridas primero deberá hacerlo de manera intuitiva, pero cumpliendo dos condiciones:

- Dos fronteras adyacentes no deben tener el mismo color.
- Debe usar la mínima cantidad de colores posible.

Luego deberá hacerlo de manera más elaborada usando la construción del grafo dual, descrita en el anexo B.

4.3.1. Actividad el mapa de Colombia

1. A continuación encontrará el mapa político de Colombia.

    a) Intente colorearlo con la menor cantidad de colores posible de tal manera que dos fronteras no tengan el mismo color.

    b) ¿Cuál fue la mínima cantidad de colores que usó?

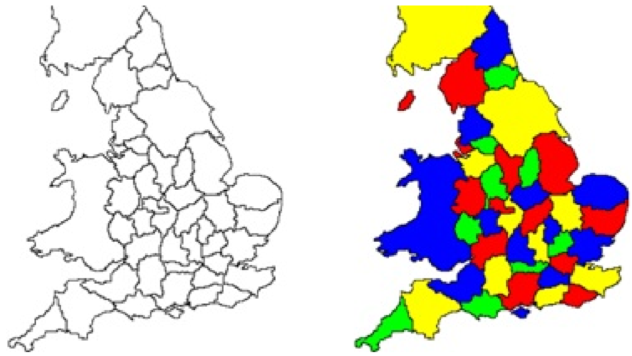
    c) ¿Y sus compañeros?

    d) De acuerdo con los colores usados, ¿Cuáles son las fronteras de Cundinamarca? ¿Cuáles son las fronteras del Amazonas? ¿Cuáles las fronteras del Huila?

2. Observe el mapa de Inglaterra con sus condados, [2] realice los puntos a, b y c que hizo con el mapa de Colombia.

[2]El docente debe aprovechar para explicar que en Inglaterra los condados corresponden a departamentos en Colombia


COLOMBIA
DIVISIÓN POLÍTICA
N
W
E
S



En 1852 el notable matemático hindú ***Augustus de Morgan*** $(1806 - 1871)$era Profesor de Matemáticas en la Universidad de Londres. Uno de sus estudiantes, *Francis Guthrie*, le comentó que el mapa de los condados de Inglaterra podía ser coloreado con 4 colores de tal manera que condados vecinos tuviesen colores distintos, y el pregunta ¿Eso sucedería con todos los mapas?

3. Considere un mapa de Suramérica.

   a) Con colores diferentes delinee todas las fronteras de Colombia.

   b) Consulte en el diccionario la definición de: Borde, orientación, frontera y escoja la que sea más apropiada para este caso.

4.4. Actividad cinta de Möbius

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes se familiaricen son superficies que no son usuales en la vida diaria. Encontrarán en la cinta de Möbius propiedades sorprendentes que aunque están ahí y de algún modo se pueden evidenciar será díficil comprenderlas. Por esto se hace una guía detallada a través de la comparación con un cilidro para que a través de la comparación y diferenciación de éstas superficies se llegue a conclusiones bien definidas. La clave de esta actividad está en el descubrimiento de nuevas propiedades a través de la experimentación.

4.4.1. Actividad

Materiales

- Hojas de papel blanco y pergamino
- Témperas
- Resaltador y colores
- Tijeras
- Colbón, cinta pegante
- Flechas de papel

Las matemáticas son el lenguaje con el cual Dios ha escrito el universo. Pitágoras

A continuación se presentan diversas preguntas las cuales le permitirán observar lo que hay alrededor, describir y detallar las diferentes formas, su color, su tamaño, su textura. Un recurso indispensable en este momento es su imaginación. Empecemos:

- Imagine qué ocurriría si cambiara alguna de las características de una de ellas, por ejemplo si las paredes en vez de tener caras rectangulares, tuvieran caras circulares.
- ¿Qué se sentiría si caminara por el techo? ¿Cómo visualizaría todo?
- ¿Qué sentiría si las paredes estuvieran pintadas de negro y el ambiente se tornara oscuro?, ¿Qué sentiría si las paredes fueran blancas y entrara demasiada luz?, Probablemente las sensaciones serían diferentes.

Ahora represente mentalmente un cubo que tiene un pequeño orificio en una de sus esquinas, levántelo, sople por ese orificio pues el material del que está hecho además de ser resistente es muy flexible. Intente tapar el orificio para que no se escape el aire. ¿Puede ahora describir y dibujar la "nueva" figura?

Qué ocurriría si pudiera hacer lo mismo con las paredes?

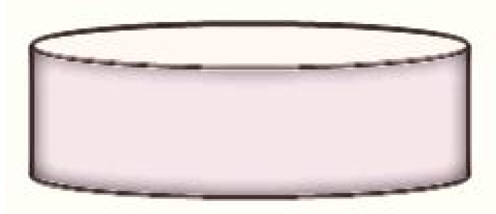
Ahora un reto mayor: supongamos que el punto de partida es el colegio, y admitamos que hay una trayectoria en línea recta y después de transitar unos minutos por dicha ruta, nuevamente se retorna al punto inicial. ¿Algún descuido o desvío? ¿Es imposible concebir que desplazarse en línea recta nos lleve al inicio del recorrido? Ilustre la situación descrita.

Y si el desplazamiento en línea recta se hace en la superficie de una esfera, o un cilindro, es posible retornar al inicio? Todo es un poco confuso, ¿verdad? especialmente que en la superficie de una esfera o cilindro sea posible seguir una trayectoria en forma de línea recta. Entonces, si la superficie de nuestro planeta es esférica quiere decir no es posible describir un recorrido lineal?

Ahora realiza la siguiente construcción usando los materiales indicados al inicio de la guía.

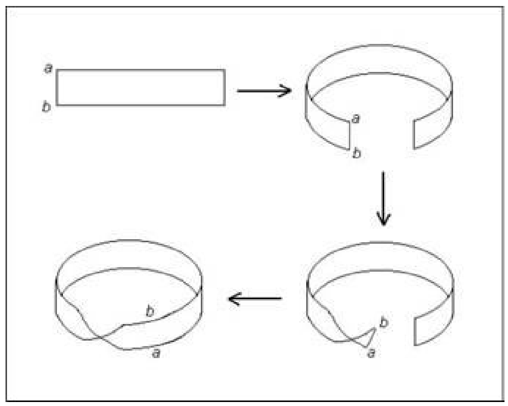
1. Corte cuatro tiras de papel de 3 cm a lo largo de la hoja.
   - Marque cada cara de la tira con un color diferente. ¿Cuántos colores usaste?
   - Recorre el borde de la hoja con un dedo. ¿Lo lograste?
   - Entonces.¿Cuántos bordes tiene la tira de papel?

2. ¿Puede un cilindro o una rosquilla generarse a partir de una tira de papel? ¿Cuál sería el procedimiento para formar ambos cuerpos?
   - Tome una de las tiras y una sus bordes con cinta, formando un cilindro, así



- Marque cada cara del cilindro con un color diferente. ¿Cuántos colores usó?
- Recorra el borde del cilindro con un dedo. ¿Lo logró?
- Entonces.¿Cuántos bordes tiene el cilindro?

3. Tome otra tira de papel y una los bordes con cinta luego de darle media vuelta a uno de los extremos, como se muestra en la figura 3, que se llama cinta de Möbius



a) Observe el objeto armado y responda: ¿Cuántas caras tiene?

b) Unte su dedo índice con témpera o trace una línea con lápiz y recorra la superficie de la cinta sin levantar el dedo o el lápiz. ¿Qué ocurrió?

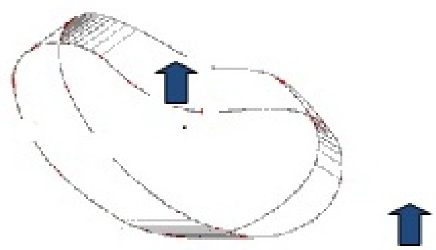
c) Recorra ahora el borde de la cinta de Möbius con el resaltador sin levantarlo ¿Cuántos bordes tiene?

Es sorprendente encontrar tales propiedades en un objeto tan ”simple”. Encontramos dos propiedades que no son fáciles de visualizar.

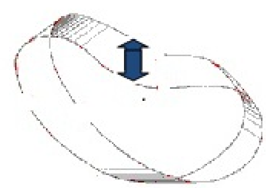
- Esta cinta tiene una sóla cara y un sólo borde

Hay otra propiedad que nos falta encontrar. Tome una hoja de papel pergamino y construya un cilindro. Construya una flecha con el papel blanco y píntela de color azul, ubíquela en el mismo sentido de la flecha dibujada en el cilindro. Ahora mantenga la flecha presionada y vaya moviendo el cilindro.¿Cuándo se encuentren las flechas qué cree que pasará?¿Qué pasó?

Tome una hoja de papel pergamino y construya una cinta de Möbius. En algún punto de la cinta pegue una flecha como se muestra en la figura.



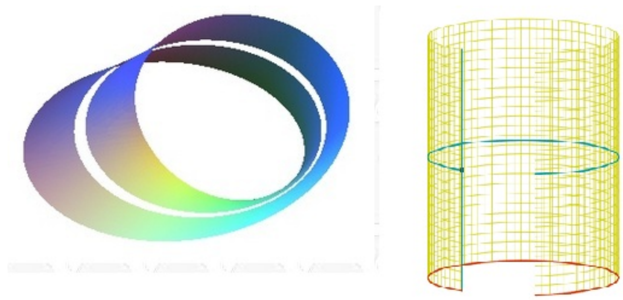
Construya una flecha con el papel blanco y píntela de color azul, ubíquela en el mismo sentido de la flecha dibujada en la cinta. Ahora mantenga la flecha presionada y vaya moviendo la cinta.¿Cuándo se encuentren las flechas que cree que pasará? ¿Qué pasó?



Se dice que una **figura es orientable** cuando todos sus puntos mantienen la misma dirección, el cilindro es orientable, ya que las flechas no cambiaron su orientación con el recorrido. La cinta de Möbius tiene la propiedad de ser **No orientable** ya que en alguno de sus puntos la flecha cambió de sentido.

La cinta de Móbius es un objeto de características muy particulares, fue descubierto hace poco por el notable matemático alemán August Ferdinand Möbius,($1790 - 1868$).

Pero aún falta por encontrar otras características muy interesantes. Para descubrirlas realice lo siguiente: en dos tiras de papel trace una línea a lo largo, de modo que las divida exactamente por la mitad, construya un cilindro y una cinta de Möbius.



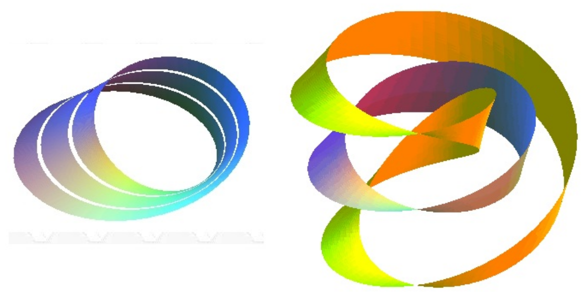
a) ¿Qúe ocurriría si corta el **cilindro** por la línea trazada?

b) Tome las tíjeras y haga el corte por la línea de la mitad. ¿El resultado coincide con lo que había previsto? ¿Qué ocurrió? ¿Qué se formó? Tome ahora la cinta de **Möbius**:

c) ¿Qúe ocurriría si la corta por la línea trazada?

d) Tome las tíjeras y haga el corte. ¿El resultado coincide con lo que había previsto? ¿Qué ocurrió? ¿Qué se formó? imagen

Tome dos tiras y trace líneas a lo largo de modo que quede dividida en tres partes iguales, construya un cilindro y una cinta de Möbius.



Tome el **cilindro**

e) ¿Qúe ocurriría si lo corta por una de las líneas trazadas?

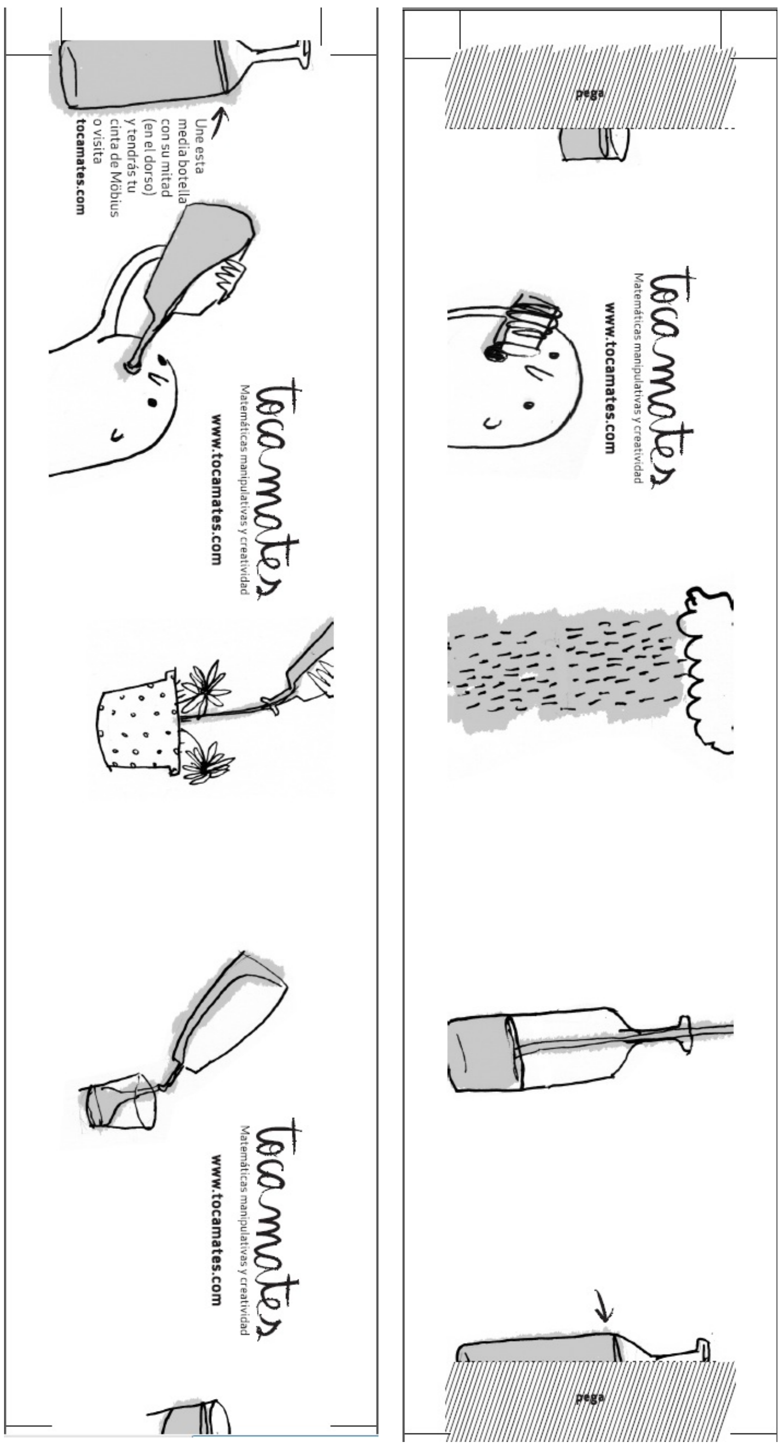
f) Tome las tíjeras y haga el corte por una de las líneas trazadas ¿El resultado coincide con lo que había previsto? ¿Qué ocurrió? ¿Qué se formó?

Tome la cinta de **Möbius**

g) ¿Qúe ocurriría si corta la cinta por una de las líneas trazadas?

h) Tome las tíjeras y haga el corte por una de las líneas trazadas ¿El resultado coincide con lo que había previsto? ¿Qué ocurrió? ¿Qué se formó?

Para completar la actividad recorte la historia que hay a continuación, pegue los reversos, arme su cinta de Möbius y cree su propia historia.



5. Conclusiones y trabajo futuro

Observando el camino recorrido hasta llegar a este punto del trabajo, resalto la importancia y la necesidad de incluir elementos de Topología en el aula de clase. Además de gran variedad de actividades que se pueden plantear usando material visual y manipulable, las cuales son muy significativas, atractivas y permiten el desarrollo de varios elementos del pensamiento lógico-espacial. Sería muy provechoso trabajar estos preconceptos con niños de primaria, impulsados desde los estándares del MEN.

Un trabajo futuro puede centrarse en la aplicación y análisis de las actividades de topología propuestas para el desarrollo de las nociones de límite y continuidad. Así como el posterior análisis de elementos topológicos de la cinta de Möbius a partir fórmulas trigonométricas. Una posible aplicación puede centrarse en el número de combinaciones que pueden darse a partir de colorear determinada figura usando 4 colores o menos, es decir, se puede asociar este problema a un trabajo que implique teoria combinatoria.

A. Anexo:Complemento de actividades

Se presentan algunas actividades complementarias que tienen el objetivo de llevar al estudiante a crear modelos matemáticos de las situaciones propuestas. El énfasis radica en desarrollar el pensamiento lógico-matemático a partir del contraste y socialización de resultados.

A.1. Anexo: Actividad de diagnóstico

El objetivo de la actividad de diagnóstico es determinar un conjunto de ideas previas de los estudiantes de grado décimo (ciclo V), ya que frecuentemente se observa que sus preconceptos sobre contenidos matemáticos son débiles. Además de verificar los conceptos fundamentales se pretende observar el nivel de abstracción y su disposición para abordar la solución de acertijos que permitan crear diferentes estrategias para su solución.

A.1.1. Topologia recreativa

1. Los Nueve Puntos: Unir los nueve puntos de la figura **A-1** usando solamente 4 lineas, sin levantar el lápiz, ni repetir línea.

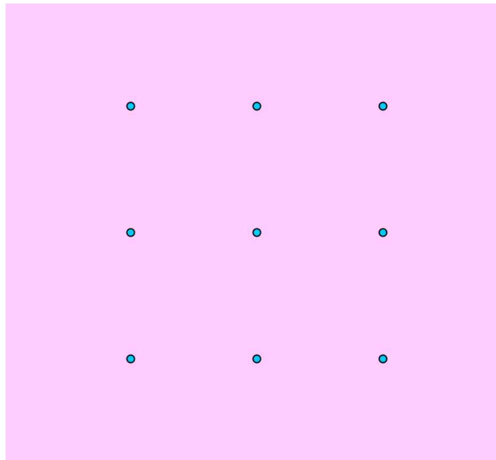


Figura A-1.:

2. Los Servicios públicos:Se necesita conectar tres casas A, B y C a tres servicios públicos: agua, luz y gas. ¿Cómo harías la conexión?

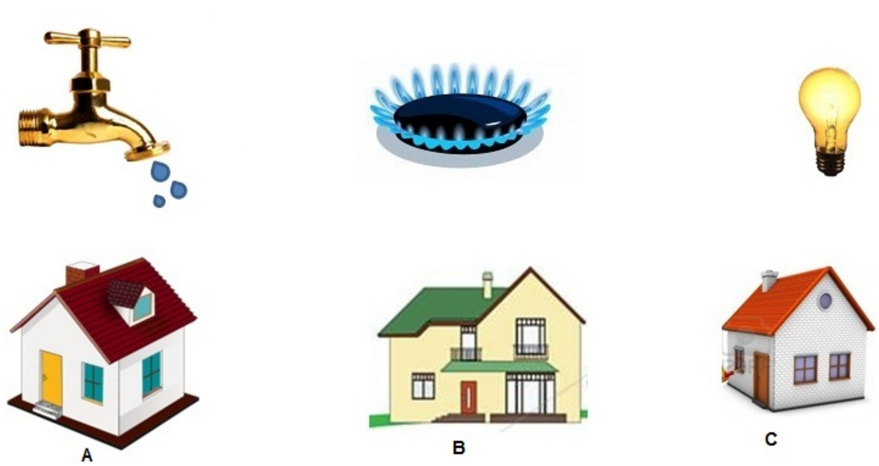


Figura A-2.:

Una solución al problema planteado, puede ser:

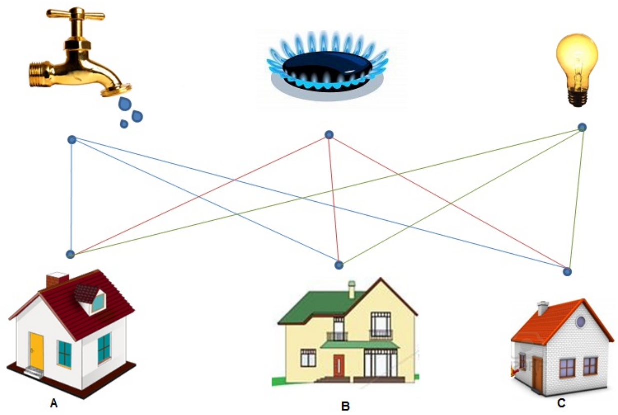


Figura A-3.:

Ahora, por cuestiones de seguridad es necesario que las conexiones no se crucen entre sí ¿Es posible conectar los servicios? Inténtalo y explica tu respuesta.

3. Describa los elementos geométricos de las siguientes figuras. Luego intente trazar el recorrido sin levantar el lápiz y sin repetir línea.

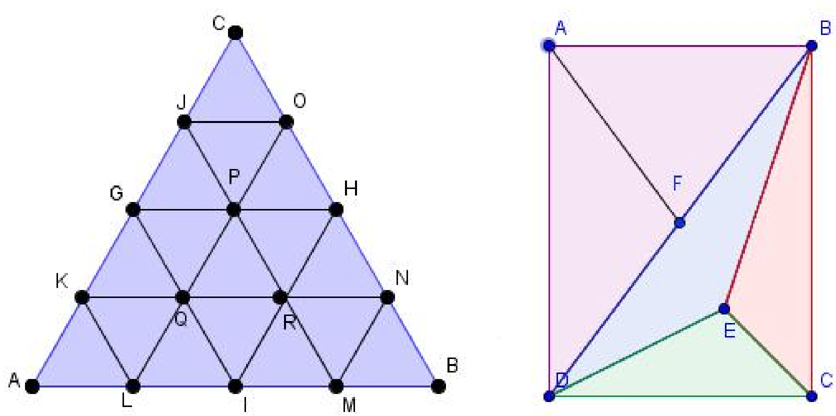


Figura A-4.:

4. Los novios celosos: En la figura se muestra el plano de un pequeño pueblo. los cuadrados marcados con letras A, B, C, D y E son los lugares donde viven cinco estudiantes no muy amigos entre sí. Los círculos marcados con las mismas letras son los lugares donde

viven sus respectivas novias. ¿Qué rutas deben tomar los 5 estudiantes para visitar a sus novias si se quere que sus caminos nunca se crucen?

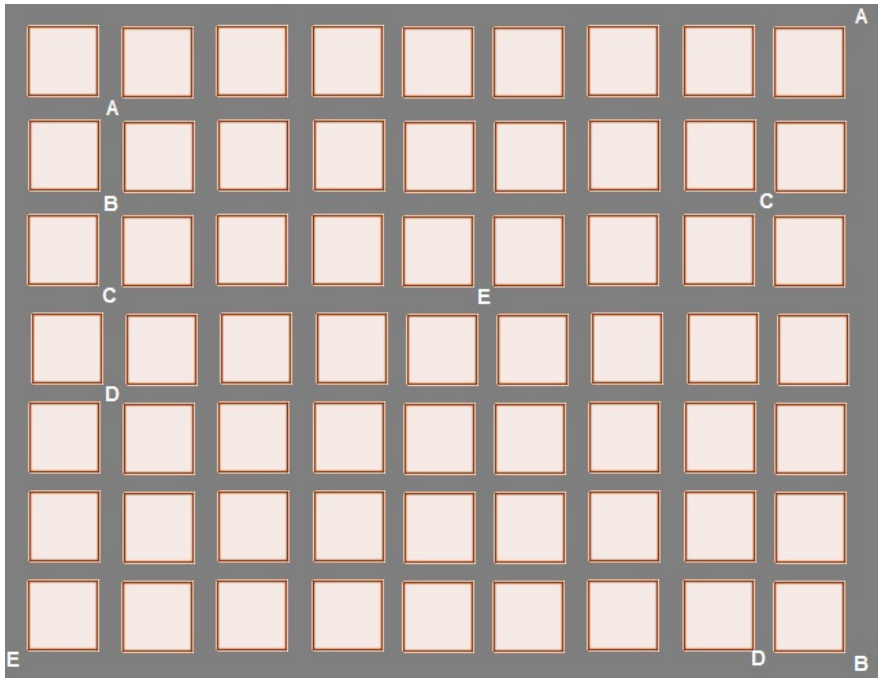


Figura A-5.:

A.2. Anexo: Actividad de lógica

1. A continuación se presenta el acertijo de Einstein:

   Se tienen 5 casas de colores diferentes y en cada una de ellas vive una persona de una nacionalidad diferente. Cada uno de los dueños bebe una bebida diferente, fuma una marca de cigarrillos diferente y tiene una mascota diferente.

   Tenemos las siguientes claves:

   - El británico vive en la casa roja.
   - El sueco tiene un perro.
   - El danés toma té.
   - La casa verde esta a la izquierda de la blanca.
   - El dueño de la casa verde toma café.
   - La persona que fuma Pall Mall tiene un pájaro.
   - El dueño de la casa amarilla fuma Dunhill.
   - El que vive en la casa del centro toma leche.
   - El noruego vive en la primera casa.
   - La persona que fuma Brends vive junto a la que tiene un gato.
   - La persona que tiene un caballo vive junto a la que fuma Dunhill.
   - El que fuma Bluemasters bebe cerveza.
   - El alemán fuma prince.
   - El noruego vive junto a la casa azul.
   - El que fuma Brends tiene un vecino que toma agua.

   ¿Quién es el dueño del pez?

2. El viejo Arturo era el dueño de un terreno perfectamente cuadrado, en cada una de cuyas esquinas había un pozo inagotable de agua. Poco antes de morir, Arturo

mandó construir cuatro casas idénticas (A, B, C, D), una seguida de la otra, tal y como se muestra la figura **A-6**. Era su deseo que a cada uno de sus hijos le quedara una de las casas, y una cuarta parte del terreno, con uno de los pozos (a, b, c, d) en cada una de ellas. No sólo eso. En su testamento Arturo estipuló que las cuatro partes del terreno deberían tener la misma área y la misma forma. ¿Cómo debió dividirse el terreno de Arturo para cumplir sus deseos?

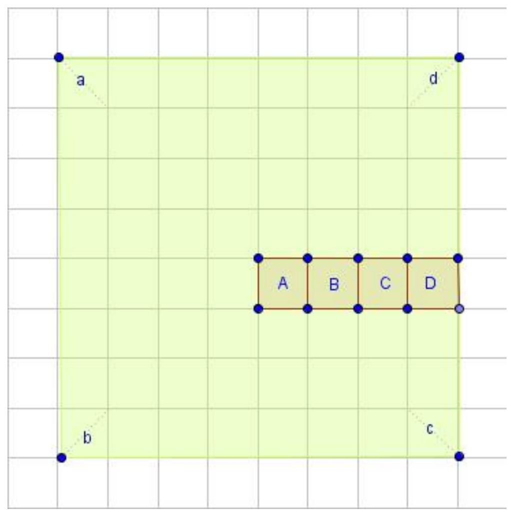


Figura A-6.:

Ejercicios 1 y 2 tomados de [17].

B. Anexo: Sección Grafos duales

Como se dijo en el capítulo 3, hay todo una teoría acerca del coloreado de mapas, pero se pide que se cumplan principalmente dos condiciones:

1. Regiones con fronteras adyacentes no pueden compartir el mismo color.

2. Se debe usar el mínimo número posible para la coloración, garantizando que se cumpla la condición 1.

   Observa la fígura **B-3**, coloreala de modo que se cumplan las condiciones 1 y 2

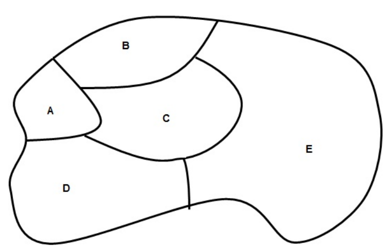


Figura B-1.:

Una forma efectiva de colorear un mapa de modo que se cumplan las condiciones nombradas es por medio de la construcción de un grafo dual, como se referenció en el Cáp. 4.

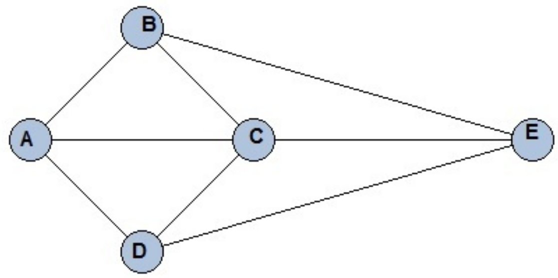


Figura B-2.:

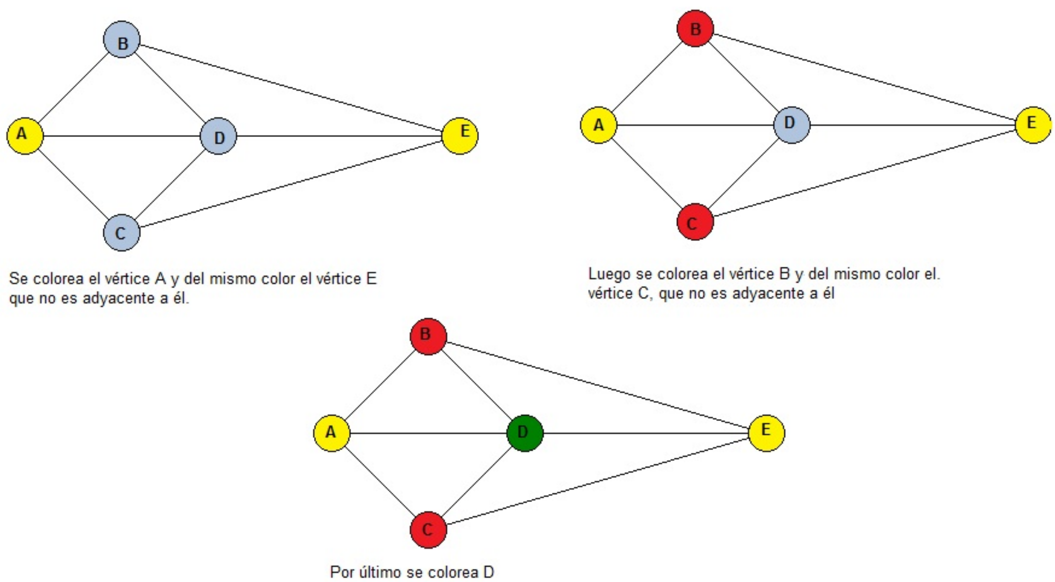


Figura B-3.:

Cada región está representada por un vértice y cada frontera por una arista, se colorean los vértices del grafo de modo que dos vértices adyacentes no queden del mismo color. Cuando el grafo esté completo, se pintan las regiones del mapa tomando la información del grafo, así sí los vértices A y E se pintaron de amarillo, las regiones A y E se pintarán del mismo color. De este modo se usará la mínima cantidad de colores, que para este caso fue 3.

Observa la siguiente fígura

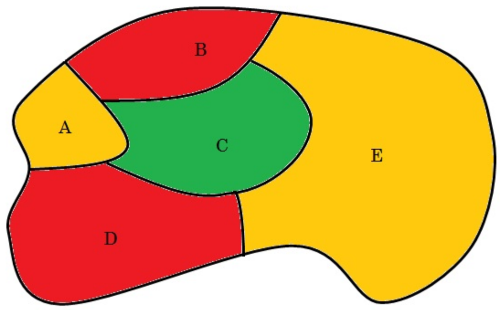


Figura B-4.:

Ahora, tratemos de colorear el siguiente mapa,

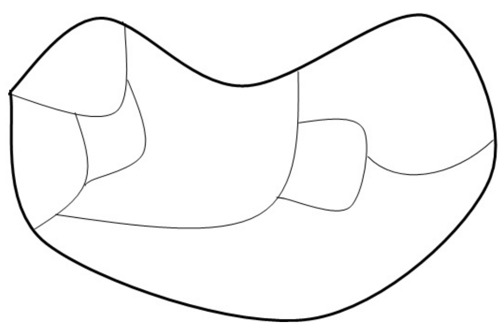


Figura B-5.:

en la fígura **B-6**se puede ver el grafo dual y la coloración que se hace del mismo teniendo en cuenta las indicaciones de la fígura **B-3**. Como se puede ver, en este caso es necesario el uso de 4 colores para que se cumplan las condiciones dadas.

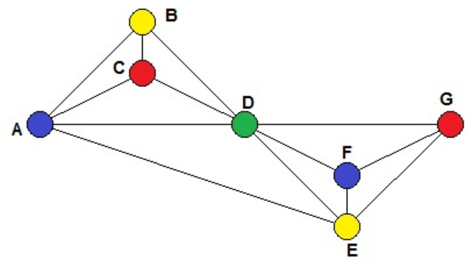


Figura B-6.:

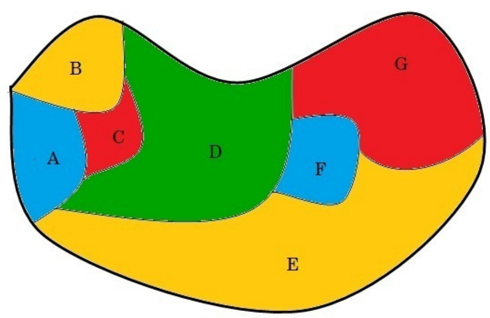
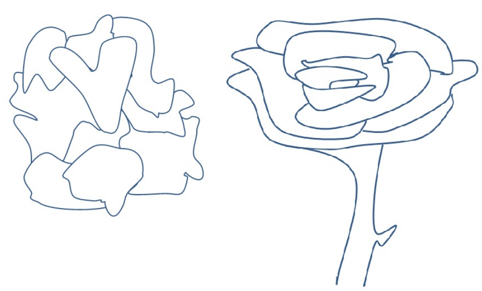


Figura B-7.:

a) Intente colorear las siguientes figuras usando la menor cantidad de colores posible.

b) Construya el grafo dual para cada una de las figuras y plantee dos formas diferentes de colorear la misma figura.¿De cuántas formas diferentes cree qué se pueden colorear cada una de las superficies? Explique su respuesta.



B.1. Grafos

3. Supongamos que son entregadas las siguiente nueve fichas de dominó..

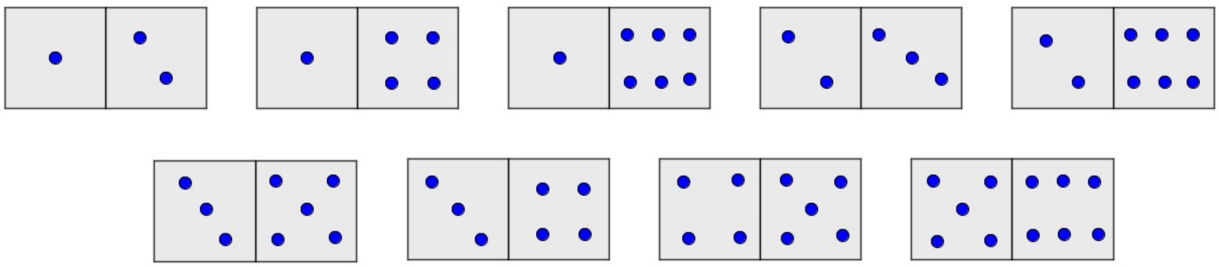


Figura B-8.:

¿Es posible unir las nueve fichas para formar una hilera horizontal, de tal manera que el primer número en la hilera sea el mismo que el último? Sólo se pueden unir dos fichas cuando los cuadrados correspondientes tienen el mismo número.

4. Para representar una exposición temporal, un museo ha dispuesto cinco salas como se muestra en la figura

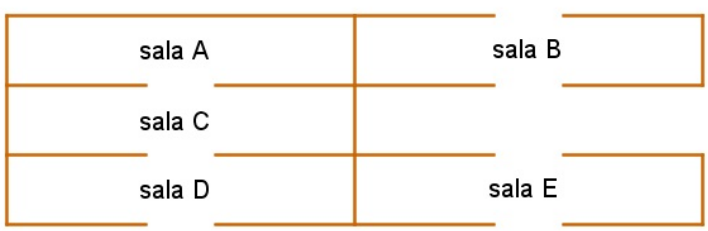


Figura B-9.:

¿Existe alguna forma de recorrer la exposición completa de modo que se pase por cada puerta exactamente una vez?

B.2. Caminos de longitud mínima

La siguiente figura muestra una porción de un pequeño pueblo en donde vive doña Remedios. Su casa está ubicada en el punto P. Todos los días tiene que caminar por el pueblo para ir a las tortillas (T), al mercado (M), a la casa de su comadre (C), a la iglesia (I) y al puesto de revistas de su marido (R)

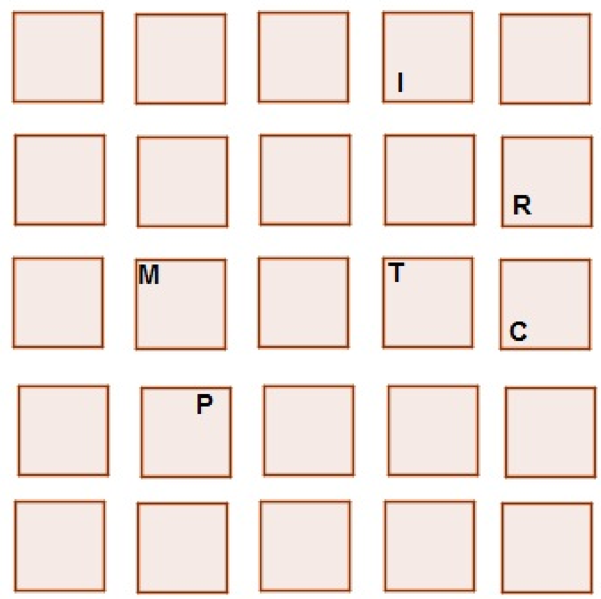


Figura B-10.:

- ¿Cuál es la longitud (en número de calles caminadas) de la ruta más corta que inicia en su casa, visita todos los lugares requeridos y después regresa a su casa?
- ¿Doña Remadios (a la que le encanta el chisme) insiste en que su primera parada sea la casa de su comadre (C). ¿Afecta esto la longitud de su ruta más corta?

Bibliografía

[1] ANÓNIMO: *El teorema de los cuatro colores.* http://www.ehu.es/∼mtwmastm/Colores_Durango_21febrero2011.pdf, 2011

[2] BARR, S: *Experiments in Topology.* Dover Publications, 1964.

[3] CAMPANARIO, J.M. ; OTERO, J.C.: *Más allá de las ideas previas como dificultades de aprendizaje: las pautas de pensamiento, las concepciones epistemológicas y las estrategias metacognitivas de los alumnos de ciencias.* Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 2000

[4] CHINN, W.G ; STEENROD, N.E: *Primeros conceptos de topología.* Alhambra, 1975.

[5] COMBARIZA, Germán: Una Introducción a la Teoría de Grafos. En: *Memorias XIV encuentro de geometría y II de aritmética* (2003)

[6] ELDUQUE, A.: El teorema de Pick. En: *Universidad de Zaragoza* (2007)

[7] GONTHIER, G.: *Formal proof-the four color theorem.* http://www.ams.org/notices/200811/tx081101382p.pdf, 2008

[8] GUZMAN, M. d. ; PEREZ, D.: *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática.* http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm, 1993

[9] JARA, P. ; RUIZ, C.: El teorema de Pick. En: *Universidad de Granada, Esmalat.* (2008)

[10] KLINE, M.: *Historia de las Matemáticas Vol. III.* Addison-Wesley Longman, 1998.

[11] LISTING, J: *Der census räumlicher complexe.* http://www.maths.ed.ac.uk/∼aar/papers/listing2.pdf, 1862

[12] MEN. *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* 2010

[13] MICHA, E.: *Matemáticas Discretas.* Limusa, 1998

[14] MUNKRES, J.: *Topología.* Pearson Educación, S.A., 2002

[15] MUÑOZ, J: *El stomachion de Arquímedes para la enseñanza de la resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos y la verificación de ciertas relaciones trigonométricas en el grado décimo.* http://www.bdigital.unal.edu.co/4692/1/TesisMSc.pdf, 2011

[16] PICKOVER, C.: *La banda de Möbius.* Almuzara, 2009.

[17] RECAMÁN, B.: *Juegos y acertijos para la enseñanza de las matemáticas.* Grupo Editorial Norma, 1997

[18] ROSEN, K.H.: *Matemática Discreta y sus Aplicaciones.* McGraw Hill, 2004.

[19] RUBIANO, G: *Topología General.* Bogotá, Colombia : Universidad Nacional, 2010

[20] TYMOCZCO, T.: *The four-color Problem and Its Philosophical Significance.* http://thatmarcusfamily.org/philosophy/Course_Websites/Math08/Readings/tymoczko.pdf, 1979

[21] WILSON, R.J: *Introducción a la teoría de grafoss.* Alianza Editorial, 1983.