

TOPOLOGÍA

INTRODUCCIÓN

La palabra topología (de la palabra griega $\tau\omicron\pi\omicron\zeta$) significa lugar o posición.

Topología es el estudio de la posición y la forma, podríamos decir que por su origen es una disciplina geométrica.

La topología es una geometría no métrica. Leibniz determinó que esta geometría se tendría que ocupar solamente de la posición y las propiedades derivadas de la misma sin tomar en cuenta las cantidades ni su cálculo.

En la Topología hay elementos que aparecen antes que el concepto de medida. Aspectos como dentro o fuera, formas equivalentes, conexiones entre agujeros, caminos dentro de laberintos, etc., se pueden abordar en la infancia. Son las relaciones topológicas:

- **Relaciones de orientación:** derecha-izquierda, arriba-abajo, delante detrás.
- **Relaciones de situación:** dentro-fuera, encima-debajo, interior-exterior, recordar mi sitio-situación.
- **Relaciones de superficie:** espacios libres, espacios llenos, etc.
- **Relaciones de tamaño:** grande-pequeño, alto-bajo, ancho-estrecho, etc.
- **Relaciones de dirección:** hacia la izquierda, hacia la derecha, etc.
- **Relaciones de distancia:** lejos-cerca, agrupación-dispersión, junto separado, etc.
- **Relaciones de orden:** Ordenar los objetos en función de diversas cualidades. Primero, segundo, ultimo, al principio, al final, en medio, etc.
- **Relaciones de cantidad:** lleno, vacío, mas, menos, igual, todo, alguno, ninguno, etc.

La topología estudia las propiedades y relaciones de figuras geométricas que permanecen invariantes respecto a cierto tipo de transformaciones llamadas funciones continuas.

La topología nació del análisis realizado por L. Euler del juego de los siete puentes de Königsberg.

La topología se presenta como la «geometría de la página de goma (chicle)».

En la geometría euclídea, dos objetos serán equivalentes mientras podamos transformar uno en otro mediante isometrías (rotaciones, traslaciones, reflexiones, etc.), es decir, mediante transformaciones que conservan las medidas de ángulo, área, longitud, volumen y otras.

En topología, dos objetos son equivalentes en un sentido mucho más amplio. Han de tener el mismo número de trozos, huecos, intersecciones, etc. En topología está permitido doblar, estirar, encoger, retorcer, etc., los objetos, pero siempre que se haga sin romper ni separar lo que estaba unido, ni pegar lo que estaba separado. Por ejemplo, un triángulo es topológicamente lo mismo que una circunferencia, ya que podemos transformar uno en otra de forma continua, sin romper ni pegar. Pero una circunferencia no es lo mismo que un segmento, ya que habría que partirla (o pegarla) por algún punto.

Esta es la razón de que se la llame la «geometría de la página de goma», porque es como si estuviéramos estudiando geometría sobre un papel de goma que pudiera contraerse, estirarse, etc.

Un chiste habitual entre los topólogos (los matemáticos que se dedican a la topología) es que «un topólogo es una persona incapaz de distinguir una taza de una rosquilla».

Propiedades topológicas de los objetos:

1.- Conectividad. El objeto es de una sola pieza.

Dados tres puntos en una hoja de papel tratemos de unir cada uno de ellos con todos los demás, no se permite que el camino tenga cruces, tampoco que caminos diferentes se crucen.

- a) Consideremos la misma situación pero ahora con cuatro puntos.
- b) Hagámoslo, ahora con cinco puntos. ¿hay solución?

Diseñar una red de carreteras que comunique cinco ciudades entre sí, de forma que cada una de ellas esté unida a todas las demás.

¿Qué sucede si variamos las condiciones de conexión? ¿Qué pasaría si intentamos conectar los cinco puntos en el espacio tridimensional (el espacio en el que vivimos)?

La banda de Möbius es una superficie descubierta por el matemático y astrónomo alemán F. A. Möbius en el año 1865.

Para construir una banda de Möbius (Barr, 1964) recortemos una tira de papel y peguemos los extremos dando previamente media vuelta a uno de ellos.

Dejemos que un insecto camine en un cilindro y en una banda de Möbius con la única condición de que no pase por el borde. Notemos que si comienza su recorrido por “fuera” del cilindro nunca podría estar en el “interior”, sin embargo la banda de Möbius puede ser recorrida por ambos lados, por lo que podríamos afirmar que esta superficie sólo tiene una cara. Otra diferencia entre estas dos superficies es que el cilindro tiene dos bordes y la banda de Möbius sólo uno.

- a) Sobre la banda de Möbius se pueden conectar hasta un máximo de seis puntos sin que los caminos se corten.
- b) Compruebe que en un neumático de automóvil o una dona (en topología es llamado toro) se pueden conectar hasta un máximo de siete puntos sin que los caminos se corten.

a) Pruebe a cortar una banda de Möbius a $1/3$ del borde ¿qué obtiene?, ¿también son dos bandas? ¿sabes identificarlas?

b) Si todavía quiere seguir cortando hágalo longitudinalmente a $1/4$, $1/5$, $1/6$, $2/3$,... del borde y saque sus propias conclusiones.

c) Construya una banda con dos medias vueltas (como la de Möbius) córtela por la mitad longitudinalmente ¿qué obtiene?

d) ¿Qué ocurre con una de tres medias vueltas? si lo hace le sorprenderá el “nudo” que aparece.