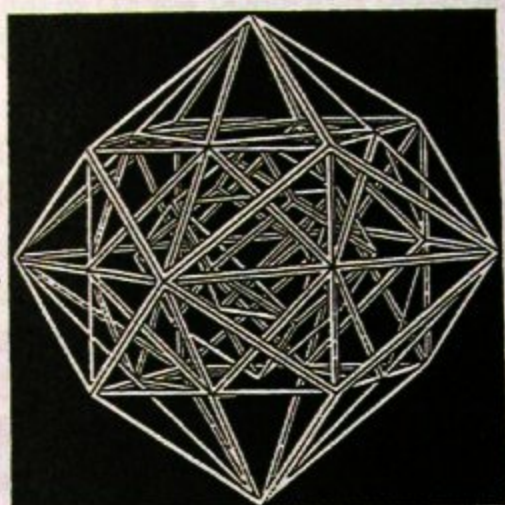


GEOMETRÍA CREATIVA

POR

JAVIER CARVAJAL

GEOMETRIA CREATIVA



J A V I E R C A R V A J A L

Imprime: Tórculo Artes Gráficas, S.A.L.
Rosalía de Castro, 45 - Santiago

I.S.B.N.: 84-921293-9

D.L.G.: C-1109-97

I. Geometría creativa

1.	La geometría en las ciencias y en las artes	3
2.	La geometría en la naturaleza	4
3.	La educación visual	6
4.	La geometría en los planes de estudio	7
5.	Lo útil y lo bello : el diseño	8
6.	Del plano y del espacio	9
7.	La forma modular	11
8.	Secciones modulares de los poliedros platónicos	12
9.	Imágenes poliédricas en los espejos	12

II. Formas lógicas tridimensionales

1.	Errores de los bloques lógicos	15
2.	Carencias	16
	A. Formas lógicas tridimensionales	17
	1.- Formas base	
	2.- División del cubo	
	3.- Transformación del cubo	
	4.- Rompecabezas tridimensionales	
	B. Juego libre de construcción	17
	C. Ejercicios de clasificación	18
	D. El cuadrado, el triángulo, la circunferencias	18
	E. Ejercicios de composición de formas planas	18
	1.- Composición por contacto	
	2.- Composición por superposición	
	3.- Composiciones libres	
	F. División del cubo	19
	1.- Sistema binario : prismas	
	2.- Sistema ternario : pirámides	
	G. Visualización de suma de quebrados	20
	H. Transformación del cubo	21
	I. Rompecabezas tridimensionales	21

III. La creatividad en el dibujo geométrico

1.	Primera propuesta :	
	Construir volúmenes a partir de un problema de geometría plana	24
2.	Segunda propuesta :	
	Visión del espacio interno de los cuerpos sólidos	25
	A. Secciones modulares del cubo	25
	B. Descubrimiento del módulo	26
	C. Tres módulos del cubo	27
	D. Desarrollos	28
	E. Construcción	28
	F. Combinaciones de un módulo	28

IV. Poliedros : planos-sección que los definen

1.	El cubo	29
2.	El tetraedro	30
3.	El octaedro	30
4.	Sección áurea y sucesión de Fibonacci	30
5.	El icosaedro	31
6.	El dodecaedro	31
7.	Dualidad de los poliedros	32
	A. Tetraedro-Tetraedro	
	B. Cubo-Octaedro	
	C. Icosaedro-Dodecaedro	

V. Retículas

1.	Retículas planas	35
2.	Retículas espaciales	36
	A. Retícula rombohexaédrica	36
	B. Retícula rombododecaédrica	37
	C. Retícula cuboctaedro-octaedro	38
	D. Retícula tetrakaidecaédrica	39
	E. Retícula tetrakaidecaédrica expandida L^3	40

VI. Imágenes palíndromas y otras simetrías

1.	Simetría bilateral	44
2.	Simetría e inversión	44
3.	Simetría radial	44
4.	Palíndromos musicales	45

VII. El signo gráfico

VIII. Forma y número variaciones : $\pi r^2 \cdot a$

1.	Secciones, intersecciones, giros y traslaciones	52
2.	Esculturas	53
3.	Forma y número crecimiento	54
4.	La escultura biológica	55

IX. Inscripción y circunscripción de poliedros

1.	Regulares	57
2.	Regulares truncados	
3.	Común y envolvente de las dualidades	

X. Un rompecabezas con los sólidos platónicos

1.	Relaciones entre los sólidos platónicos	69
	A. Dodecaedro-Cubo	
	B. Cubo-Tetraedro	
	C. Tetraedro-Octaedro	
	D. Octaedro-Icosaedro	
2.	Propuesta didáctica	71
3.	Otro orden de los platónicos	73
4.	Combinaciones varias	75

XI. ...Del cuaderno de apuntes

1.	Mosaicos árabes	79
	A. Motivo mínimo plano	80
	B. Motivo mínimo lineal	81
2.	Pirámides poliédricas especulares	84
3.	División serie 1/3 del plano	86
4.	División serie 1/7 del volumen	86
5.	Sucesión de Fibonacci y número de oro	88
6.	Proporciones dinámicas : $\sqrt{n}$	89
7.	La casa de las abejas	90
8.	Retícula caballera	93
9.	Retícula isométrica	96
10.	El espacio escénico : perspectiva cónica	99
11.	Propuesta escenográfica : La Barraca	105

XII. Bibliografía

XIII. Índice : contenido de programas

GEOMETRÍA CREATIVA

CAP. I

GEOMETRÍA CREATIVA

GEOMETRIA CREATIVA

LA GEOMETRIA EN LAS CIENCIAS Y EN LAS ARTES

Simetría, regularidad, orden, ritmo, proporción, etc., son propiedades que el número comparte con la forma y que configuran algo más y algo distinto que un tema de un programa escolar. Los polígonos regulares, los poliedros, las cadencias numéricas, la divina proporción, la armonía, suscitan permanentemente el asombro y justifican las matemáticas y las ciencias en general.

La lógica de la forma y del color no es muy distinta de las relaciones numéricas, ni el ordenamiento de ritmo y sonido, tiempo y silencio en una composición musical difiere mucho del orden sintáctico o rítmico de un poema. Pero entre la matemática y la plástica, además de esa lógica común, hay una materia común: La Geometría. Ambas pueden ejercer distintas codificaciones y sus aplicaciones pueden también ser distintas, pero los elementos que su actividad enriquece, son los mismos.

En mi afán ha estado siempre el hacer de la geometría una técnica creativa más dentro de la expresión plástica y este mismo deseo subsiste en grupos de matemáticos y en particular el Grupo Cero de Valencia, que hace suyo el grito de: ¡No hay matemáticas feas!, entendiendo el término feo como contrario de creativo. Y al famoso ¡Abajo Euclides! que produjo prácticamente el olvido de la Geometría en los antiguos programas, limitándose a unos capítulos de álgebra lineal, el profesor Hans Freudenthal, en el último Congreso de Matemáticas celebrado en Zaragoza, titulaba su ponencia: "En todos los niveles, Geometría".

En París, en 1930, se funda el grupo de Arte Concreto y publica el número único de una revista-manifiesto que resumía en su texto algunas de las ideas flotantes entre los artistas inclinados al rigor geométrico y que eran el resultado de la fusión de los principios del llamado Neoplasticismo

(Mondrian) y del constructivismo ruso (Kandinsky).

Estos manifiestos eran algo común y esencial a todo grupo que quisiera comenzar un rumbo nuevo en las características de su plástica. Eran elaborados a base de muchas discutidas reuniones y redactados normalmente por un poeta adicto al grupo. Teorizadores del cubismo, futurismo y surrealismo, lo fueron respectivamente los grandes poetas Guillaume Apollinaire, Marinetti y André Breton.

En ellos cada grupo pretende expresar sus ideas fundamentales y justificar así su actuación posterior. Solían ser agresivos y extremistas, ya que lo que buscaban era una ruptura total con el movimiento precedente.

En el Manifiesto del Arte Concreto, al hablar de los estilos precedentes dice en su punto número dos: "Lo importante en todos los dominios de la actividad humana, es la intelectualidad, fuera de lo creado por el pensamiento no hay más que lo barroco, el fauvismo, el animalismo, el sentimentalismo y esa hiperbarroca confesión de debilidad llamada fantasía".

En el punto número cinco dice: "Antes de materializarse la obra existe de un modo completo en el espíritu, su realización debe mostrar una perfección técnica equivalente a la perfección del concepto, no debe revelar ningún rasgo de debilidad humana: ni temblores, ni imprecisión, ni titubeos, ni partes sin terminar. Si no se logra trazar una línea recta con la mano sola, se toma una regla. La escritura a máquina es más hermosa, más clara y legible que la escritura a mano. Si no se logra trazar una circunferencia a mano, se toma un compás. Todos los instrumentos y técnicas creados intelectualmente, por necesidad de perfección, son recomendables."

LA GEOMETRIA EN LA NATURALEZA

¿Qué hemos inventado o recreado que no estuviera ya en la naturaleza? Cuesta creer que no hayan participado un equipo de diseñadores y científicos en la creación de los esque-

letos de los radiolarios, los cristales de nieve, las estructuras cristalográficas de los minerales o la concha del nautilus.

Kandinsky, Mondrian, Vassarelli y todo el arte concreto, constructivista, cinético y op-art, así como anteriormente el arte árabe, terminaron por adoptar la geometría como único lenguaje plástico de su pintura.

"A partir del cono, el cilindro y la esfera, decía Cézanne, podemos pintar lo que queramos" y así nos confirma que, triángulo, rectángulo y circunferencia, proyecciones ortogonales de estos tres sólidos, son algo tan natural como lo es una manzana de sus bodegones. ¿Y quién negará que esa manzana no es menos natural que la que está en el árbol?

A Kandinsky le reprochaban que su pintura se apartaba de la naturaleza y contestaba: "¿Por qué llamar pintura geométrica a aquélla en la que aparecen formas geométricas y no decimos pintura botánica a aquélla en la que se muestran formas de plantas?", haciendo alusión claramente a la pintura de Rousseau.

Hoy día, el desarrollo de las ciencias ha extendido los límites de los sentidos hasta un grado extraordinario. El ojo, aguzado por el microscopio, puede penetrar en un mundo de formas complejas y asombrosas. El telescopio, penetra en los cielos para examinar los vastos espacios entre estrellas y formas de las nebulosas. El tubo de Rayos X permite explorar las intrincadas formas internas. El osciloscopio revela esquemas de sonidos y otras energías invisibles.

El paisaje de hoy no está restringido a una vista desde lo alto de una colina, perspectiva máxima para el hombre del Renacimiento, sino que puede contemplarse totalmente desfigurado desde un aeroplano a cinco mil o diez mil metros sobre la tierra. Así el mundo hoy es un lugar diferente para el artista, puede pintar lo que ve, pero ahora lo que ve se ha extendido al microcosmos y al macrocosmos que la ciencia le ha revelado. Y todo esto también es naturaleza.

A la pregunta primera contestaré con otra nueva: ¿quién negará que antes del avión ya volaban los pájaros?

La geometría pues tiene un lugar privilegiado como confluencia del arte, la naturaleza y la ciencia.

LA EDUCACION VISUAL

En el desarrollo de todo ser humano es como si comenzásemos con una visión imperfecta y viésemos todo en una bruma. A medida que los años pasan, la niebla va aclarándose gradualmente aunque no por completo para todos. Es un problema de acumulación de experiencias, de percepciones en suma, que nuestra educación no asume, sumida en un mar de definiciones enciclopédicas.

Vistas así las cosas, un segmento no es solamente la distancia más corta entre sus extremos, ni un triángulo equilátero es sólo la figura formada por tres puntos equidistantes. Tampoco para Platón ni para Kepler, un icosaedro regular era meramente una legión de vértices, aristas y caras, dotadas de ciertas relaciones estructurales y numéricas. Era una pieza necesaria en su concepción del mundo.

Por éso, hablando de poliedros, no me valen exclusivamente las definiciones al uso, numerando sus caras, vértices y aristas. Podemos imaginarlos sin límites definidos, viendo cómo las prolongaciones de sus aristas los agrandan o multiplican, sus ejes los dividen y la visión nos lo deforma. De manera que para que la forma sea reconocible ha de ser representada con sus propias deformaciones, representación en perspectiva, y será entonces nuestro cerebro el que a partir de la percepción de cada objeto, producto de nuestra experiencia, el que identificará cada uno de ellos corrigiendo esos errores.

La aparición de las llamadas "figuras imposibles", de solución perfecta en el plano pero irrealizable en volumen real, se producen por el intento de reproducir los objetos no tal como son, sino tal como los vemos, debiendo interpretarlos

A la pregunta primera contestaré con otra nueva: ¿quién negará que antes del avión ya volaban los pájaros?

La geometría pues tiene un lugar privilegiado como confluencia del arte, la naturaleza y la ciencia.

LA EDUCACION VISUAL

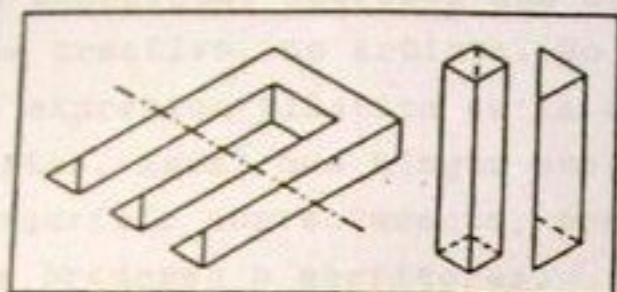
En el desarrollo de todo ser humano es como si comenzásemos con una visión imperfecta y viésemos todo en una bruma. A medida que los años pasan, la niebla va aclarándose gradualmente aunque no por completo para todos. Es un problema de acumulación de experiencias, de percepciones en suma, que nuestra educación no asume, sumida en un mar de definiciones enciclopédicas.

Vistas así las cosas, un segmento no es solamente la distancia más corta entre sus extremos, ni un triángulo equilátero es sólo la figura formada por tres puntos equidistantes. Tampoco para Platón ni para Kepler, un icosaedro regular era meramente una legión de vértices, aristas y caras, dotadas de ciertas relaciones estructurales y numéricas. Era una pieza necesaria en su concepción del mundo.

Por éso, hablando de poliedros, no me valen exclusivamente las definiciones al uso, numerando sus caras, vértices y aristas. Podemos imaginarlos sin límites definidos, viendo cómo las prolongaciones de sus aristas los agrandan o multiplican, sus ejes los dividen y la visión nos lo deforma. De manera que para que la forma sea reconocible ha de ser representada con sus propias deformaciones, representación en perspectiva, y será entonces nuestro cerebro el que a partir de la percepción de cada objeto, producto de nuestra experiencia, el que identificará cada uno de ellos corrigiendo esos errores.

La aparición de las llamadas "figuras imposibles", de solución perfecta en el plano pero irrealizable en volumen real, se producen por el intento de reproducir los objetos no tal como son, sino tal como los vemos, debiendo interpretarlos

para su reconocimiento en el plano con las deformidades propias de la visión y al querer devolverlos a su forma real se nos hace tarea imposible. Esta figura imposible es, al mismo



tiempo dos prismas cuadrados y tres prismas triangulares, según veamos la mitad superior o la inferior. La explicación es sencilla: para representar la imagen de un prisma cuadrangular nos servimos de tres líneas paralelas,

aunque en realidad tiene cuatro, y para un prisma triangular necesitamos sólo dos, aunque tiene tres. Por lo que con seis líneas tanto podremos hacer dos prismas cuadrangulares o tres triangulares.

El cubismo, punto de partida de toda la plástica moderna, hace caso omiso de todas las leyes de perspectiva y nos representa, como lo hacen los niños pequeños, las cosas tal como son en la realidad. La boca de una copa sobre la mesa, no es una elipse sino una circunferencia, la experiencia que tenemos de ese objeto es la que nos dirá cómo es en realidad. Esta doble lectura hará incomprensible este arte a personas que no tengan una práctica adecuada en su educación visual.



LA GEOMETRIA EN LOS PLANES DE ESTUDIO

Al releer orientaciones pedagógicas de programas oficiales en la enseñanza de la expresión plástica, nos encontramos con formulaciones en apariencia irreprochables, como: "La expresión plástica es, sin duda, en su doble vertiente artística y utilitaria, un medio educativo de gran valor", formulación que nos llevaría fácilmente a pensar en la inutilidad del arte.

En primer lugar no debemos confundir "lo creativo" con "lo artístico", lo que sucede a menudo en el plano escolar. La causa no es otra que la manía de clasificar las cosas con

cánones prescritos o ideas preconcebidas sobre el objeto de arte. Toda obra artística es en sí creativa, pero no toda obra creativa ha de ser necesariamente artística o hecha con fines artísticos. Para entendernos mejor, ya en el plano de la enseñanza, queremos que el niño desde su más corta edad, sea creativo, no artista. No es función de ningún profesor de expresión plástica en la escuela hacer niños o jóvenes artistas, igual que ningún otro profesor al enseñarles a hablar o escribir correctamente, pretende hacer de sus alumnos futuros oradores o escritores.

Lo que hemos de procurar es desarrollar la expresión, ejercitar la imaginación, estimular la actividad mental, y no enseñar mecánicamente, poniendo excesivo celo en que aprendan unas técnicas, finalidad inferior que durante mucho tiempo ha sido preocupación única en la enseñanza del dibujo. El profesor que sigue literalmente un sistema, es esclavo de un método, puede considerar el dibujo como una serie de copias de líneas sin otro objetivo que la exactitud. Algunos profesores consideran la imaginación como un enemigo y la cratividad como un tópico, sin que jamás hayan intentado ponerla en práctica, siempre se les opone la exactitud. Insistamos en que ningún maestro pretende equiparar a los niños con el vocabulario de un idioma, el conocimiento de su gramática y la capacidad de trazar los símbolos utilizados en su escritura, para luego privarle de toda oportunidad de expresar ideas mediante su uso. ¿Para qué, entonces, dedicar todo el tiempo y esfuerzo, en adquirir conocimiento de la apariencia de las cosas y de la técnica del dibujo, si no les dejamos hacer uso alguno de ese conocimiento para expresar ideas?

LO UTIL Y LO BELLO: EL DISEÑO

La formulación ministerial antes citada, establece de hecho una distinción propicia para levantar una barrera insuperable entre el objeto artístico y el objeto utilitario. Esta separación, dice Herbert Read: "refleja la naturaleza extinguida de una educación y formación posterior en el adulto que puede tolerar ese divorcio entre forma y función, ocio y tra."

bajo, arte e industria, que es básicamente el divorcio entre mente y materia".

La forma y su función, la ética y la estética, el arte y la industria, tienen hoy en nuestros planes de estudio una errónea interpretación y separación dentro del campo del diseño. Términos muchas veces antagónicos como "lo útil y lo bello", dicotomía entre dos partes que no pueden ir por separado y que muchas veces nos parecen irreconciliables. Recordemos igualmente todo lo ya mencionado sobre el dibujo y las manualidades.

A veces no parece sino que la belleza de un objeto sólo se nos muestra cuando ha dejado de tener su utilidad. Los museos de la ciencia transfiguran los artefactos o maquinarias que una vez sirvieron en observatorios de astronomía o laboratorios de experimentación y revelan ahora la originalidad de su diseño y la pureza de su forma. Un ánfora romana o la rueca de la abuela, hoy día sólo nos sirve como objeto decorativo en un rincón del frío salón de nuestros modernos hogares.

Sin embargo, tenemos que reconocer que los objetos, cuanto más útiles, son cada vez más bellos: el último modelo de automóvil es el que más nos gusta y en el caso del avión Concorde, su utilidad para el vuelo lo convierte en un verdadero pájaro; la dificultad de su comercialización, aparte de otros problemas de tipo económico o de competencias, reside en su desproporcionado ruido. Cuando consiga la belleza del silencio del águila en su vuelo será al tiempo mucho más útil.

Una frase resume y resuelve toda la discusión sobre la prioridad en el deseo de hacer cosas útiles o bellas: "...y de la lógica de la forma, dimana la emoción de la belleza". Serán pues, dos términos no opuestos sino complementarios.

DEL PLANO Y DEL ESPACIO

Nuestra vida transcurre en un espacio, que es lo más parecido al espacio abstracto tridimensional de la geometría

euclídea, pero las representaciones espaciales, están encadenadas al marco de las figuras planas.

Los medios de comunicación, la posibilidad de las reproducciones masivas, la publicidad y el diseño, han desarrollado en la sociedad un aprendizaje espontáneo de las formas espaciales, de los volúmenes, que tienen más de cultural que de aprendido en la institución escolar.

Imágenes como las señales de tráfico y otras muchas, llegan a ser interpretadas colectivamente de forma automática. El conjunto de ciudadanos ha interiorizado e integrado en el bagaje de sus conocimientos estas manifestaciones de la forma de un modo acrítico, tal y como le han sido presentadas. Se asimilan las formas y las estructuras de las mismas sin ninguna reflexión sobre ellas.

El proceso de depuración de las formas espaciales hasta su plasmación en ideogramas planos, la construcción de edificios a partir de planos, el diseño en general, son ejemplos en los que la plasmación definitiva, la obra que finalmente se nos presenta, ha podido recorrer complicados procesos creativos a partir de ideas simples en las que la intervención de la plástica y la geometría no son ajenos.

Resulta sorprendente comprobar cómo esta educación visual inconscientemente desarrollada, no esté potenciada y favorecida por unas enseñanzas y procedimientos didácticos que tiendan de forma sistemática a reforzarla. A partir de propuestas elementales de geometría plana y espacial, integradas en un programa más general, más humanista, más creativo, la instalación de los ciudadanos en el mundo de las formas y sus imágenes dejaría de ser la de espectadores pasivos para convertirse en partícipes críticos de la construcción de imágenes y formas nuevas.

Favorecer el "proceso de creación" de formas planas y espaciales, estudiando las leyes fundamentales de la geometría y las propiedades de los objetos en sus distintos niveles, será la única manera de que este estudio no se nos continúe

apareciendo enormemente fastidioso.

Hacer de la geometría una técnica creativa más dentro de la expresión plástica y de la expresión plástica un motor de interés que potencie el estudio de los problemas geométricos para dar solución a las ideas creadas, será una globalización bien entendida.

Todo este proceso lo resumiría en tres etapas de evidente aparición en todo aprendizaje:

- 1.- Momento creativo: invención de una forma nueva para el alumno y que muchas veces lo es también para el profesor.
- 2.- Asimilación o aprendizaje de un nuevo concepto: problemas de geometría plana o espacial.
- 3.- Técnica a desarrollar: dibujo y manualidad correspondiente.

Bien entendido que el tercer aspecto no podrá realizarse sin la consecución del segundo y éste tendrá muy poco sentido si falta el primero. Hay pues un orden de prioridades, aunque en su desarrollo han de ir paralelos. Las nuevas formas nos llevarán a la solución de nuevos problemas y estos conocimientos nos darán una mayor comprensión, el manejo de nuevas leyes para poder inventar formas más complejas. Es en fin un camino helicoidal en el que van tomando cuerpo al mismo tiempo las diversas técnicas de expresión y su uso para plasmar ideas.

LA FORMA MODULAR

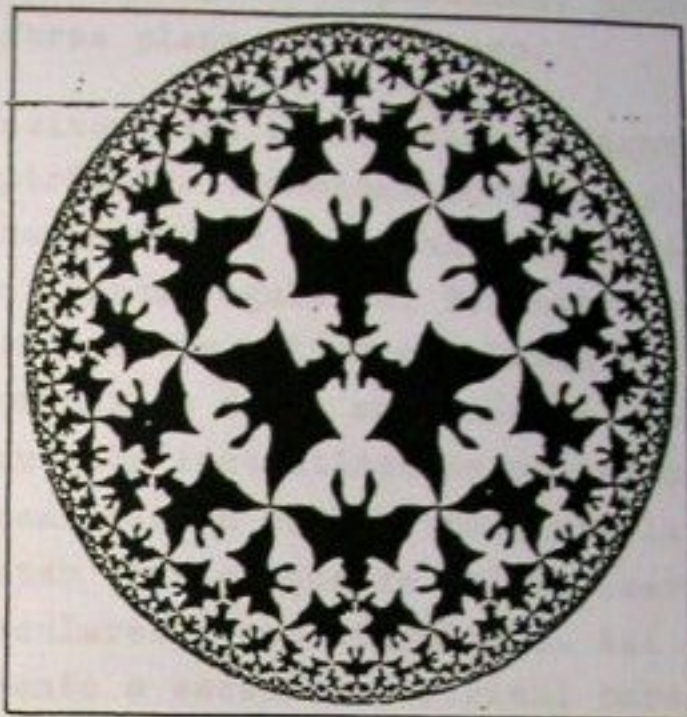


El módulo plano siguiendo la definición del arquitecto Rafael Leoz es: "un elemento encajable consigo mismo y que maciza el plano. Para su construcción se parte de un polígono regular que macice el plano y el módulo resultante ha de ser equisuperficial al polígono del que partimos."

La forma modular, entendida como forma encajable consigo

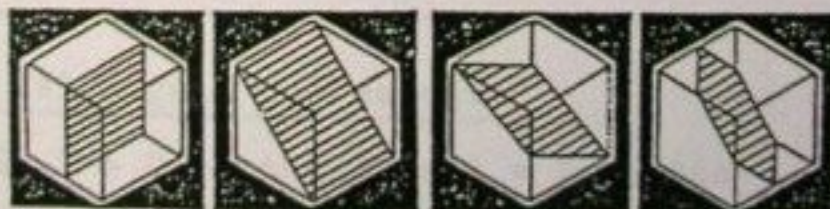
misma en todas direcciones, será el ejemplo más esclarecedor de la total dependencia entre el espacio vacío y el espacio lleno, siendo sus partes concavas al mismo tiempo convexas de ellas mismas.

Recordemos la variedad de los mosaicos árabes o los más espectaculares dibujos de Escher, donde ángeles y demonios conviven en perfecta armonía, debido a que los espacios que separan a unos son a la vez la forma de los otros.



SECCIONES MODULARES DE LOS POLIEDROS PLATONICOS

La definición de Leoz referida al plano puede aplicarse idénticamente a los cuerpos sólidos espaciales: los poliedros. Cada uno de ellos tiene una serie de secciones identificables en polígonos que los dividen en dos partes iguales: son sus secciones modulares.



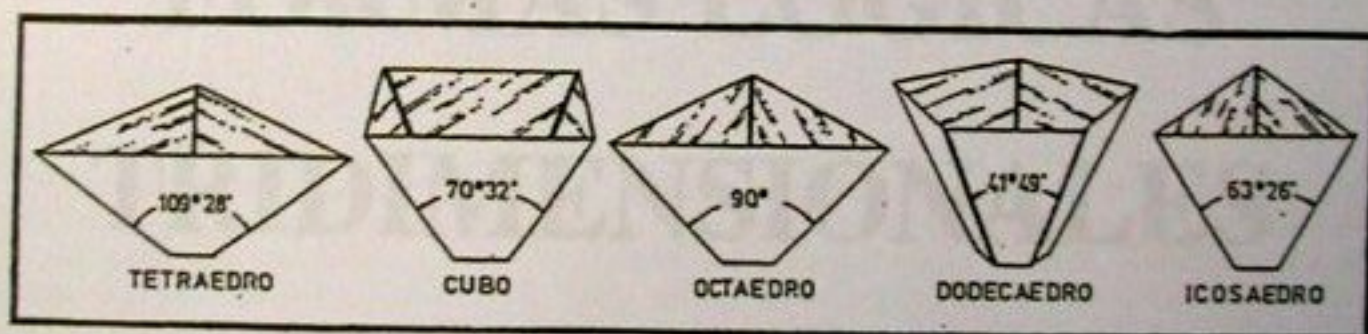
IMAGENES POLIEDRICAS EN LOS ESPEJOS

Los espejos desempeñan por lo común tres papeles: producir imágenes, plasmar leyes ópticas y ser motivos de inspiración literaria y mitológica, pero raramente se emplean para la creación de formas y espacios y para la materialización de conceptos geométricos.

Si el caleidoscopio nos produce la imagen repetida de un objeto mediante reflejos en los espejos, los poliedros podría

mos decir, que son formas caleidoscópicas espaciales, producto de la repetición de una forma plana, el polígono.

El primer problema a resolver será la creación mediante espejos, de una especie de pirámides truncadas invertidas, en cuyo interior se nos aparecen debido a la multiplicación de sus imágenes los cinco poliedros regulares. Por extraordinarios que puedan aparecérsenos estos poliedros platónicos especulares, no es sino el principio de la creación de otros muchos, es decir, la "construcción" instantánea de poliedros de difícil y muy trabajosa realización manual, mediante la sencilla operación de incrustar módulos que se multiplicarán creando configuraciones especulares y espectaculares. Así los espejos serán un instrumento o escenario original para el estudio de los cuerpos sólidos, sus propiedades, relaciones de dualidad, componentes primarios de la simetría, estudio de sus ángulos diedros, etc.



Fórmula del ángulo del espejo:

Espejo de X + Diedro del dual = 2 rectos

$$180^\circ - 70^\circ 32' \text{ (Diedro del tetraedro)} = 109^\circ 28'$$

$$180^\circ - 109^\circ 28' \text{ (Diedro del octaedro)} = 70^\circ 32'$$

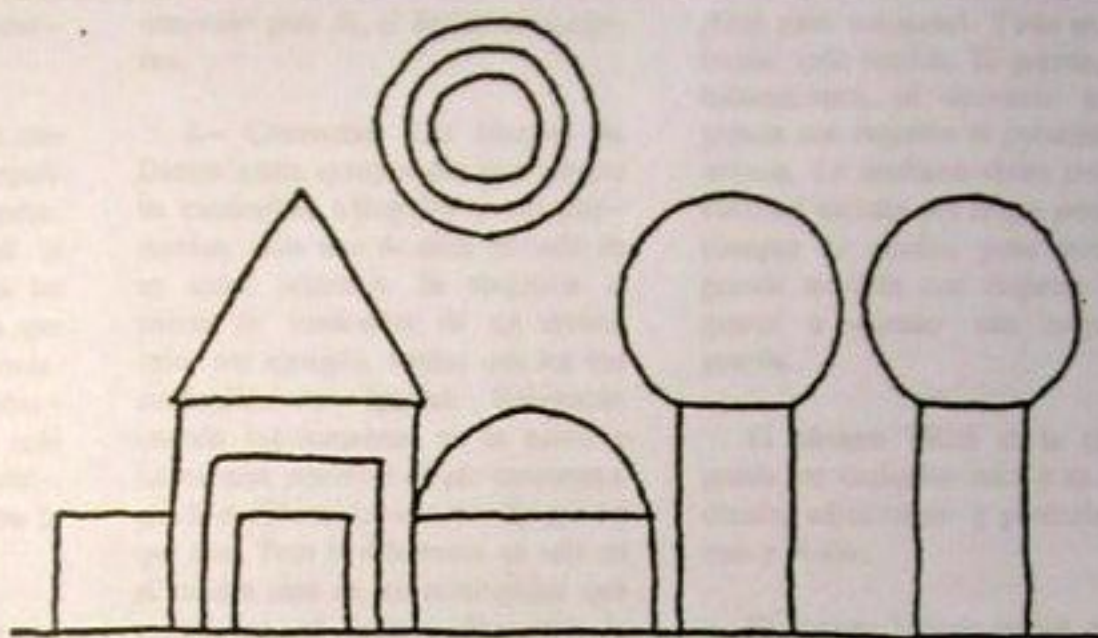
$$180^\circ - 90^\circ \text{ (Diedro del cubo)} = 90^\circ$$

$$180^\circ - 138^\circ 11' \text{ (Diedro del icosaedro)} = 41^\circ 49'$$

$$180^\circ - 116^\circ 34' \text{ (Diedro del dodecaedro)} = 63^\circ 26'$$

CAP. II

FORMAS LÓGICAS TRIDIMENSIONALES



FORMAS LOGICAS TRIDIMENSIONALES

El matemático canadiense Z. P. Dienes diseñó ya hace años un material didáctico para preescolar, los Bloques Lógicos, sumamente extendido en todas las escuelas. Básicamente consisten en el reconocimiento de formas y colores primarios y de juegos elementales de conjuntos simples. Las posibilidades de un material estructurado como éste de Dienes, son muy amplias, pero en mi opinión adolece de ciertos errores graves y carencias significativas que trato de corregir con el conjunto de Formas Lógicas Tridimensionales.

1.- Errores: Los Bloques lógicos son formas planas o imitan a las formas planas. Estas en realidad no existen porque no son tangibles. Todo lo que existe es tridimensional por ocupar un lugar en el espacio.

Sin embargo, las cosas las vemos como proyectadas en un plano, es como si al mirar fuésemos continuamente filmando una película. Así obra

el ojo, al igual que una cámara fotográfica, siempre dibuja en perspectiva y ésta ya sabemos que no es más que la ilusión del espacio, su representación en el plano.

El gatito de pocas semanas, es víctima de una ilusión óptica y se cae por el balcón al querer pasar al balcón de la casa de enfrente en una calle estrecha. Poco a poco, con la experiencia, nuestro cerebro aprende a percibir el espacio a través de la visión plana, a medir mentalmente distancias y a ver lo que hay detrás de las cosas que no vemos porque se tapan unas a otras.

El cuadrado, el triángulo y la circunferencia son pues abstracciones, ya que son formas de altura cero, de muy difícil comprensión para un niño. Sólo existen como tales en el intelecto, como proyecciones o sombras de otras formas tridimensionales. Una puerta, una ventana o un cuadro, no son cuadrados o rectángulos, pueden tener su

forma pero en absoluto lo son. Ni tan siquiera una hoja de papel, solamente nos aparecerá como tal cuando la veamos posada sobre la mesa. Basta que la tomemos en nuestras manos para que se transforme en mil formas diferentes.

Todo lo tangible ha de ser necesariamente tridimensional y esta necesidad del niño de sentir las formas a través del tacto es lo que llevó a Dienes a hacer *cuadrados, triángulos y circunferencias tridimensionales*, lo que es imposible, pues resultaron ser prismas cuadrangulares, triangulares y cilindros bajitos.

El niño, en la percepción de esas formas, ya sea por la vista o el tacto, por calco o estampación, no sólo percibe las tres formas base, sino también una serie de rectángulos alargados que le confunde. No es la primera vez que un avisado niño ha llamado la atención de su maestro al notar que la huella de un lateral del prisma trian-

gular no era un triángulo sino un cuadrado muy alargado.

El cuadrado tangible no será otro entonces, que el cubo. El triángulo tangible más simple será el tetraedro. La circunferencia tangible será la esfera. Enseñémosles pues antes las palabras cubo, tetraedro y esfera que cuadrado, triángulo y circunferencia. ¿Por qué les ha de resultar más complicado? ¿Por qué han de ser más incomprensibles las formas volumétricas que las planas si aquellas son la realidad?

Un matemático me podrá decir que para medir y operar con tres vectores (el espacio) antes ha de saber hacerse con dos (el plano) y primeramente con uno (la línea). De acuerdo que sin líneas no puede dibujar polígonos y sin polígonos no construyo poliedros, pero no estamos de momento enseñando el proceso de generación de los objetos, sino comprendiendo como es el objeto mismo. Una vez asimilada esa forma final, ya veremos cómo se genera.

Recordemos que aún está lejos el día en que el niño aprenda el lenguaje de los números, aún estamos en el lenguaje de los sentidos, cuando reconozca estas formas por sus cualidades sensoriales podremos comenzar a darles formas, nombres, a dibujarlas y numerarlas.

Con el niño razonaremos pues de esta manera: el tetraedro tiene muy pocas caras, el cuerpo que menos tiene y por eso pincha mucho y no rueda nada, resbala sobre una de sus caras al tirarlo sobre la mesa. El cubo tiene más, da más vueltas como el dado cuando jugamos al parchís. Cuantas más caras tiene un cuerpo más vueltas da. ¿Y la esfera?, ésta no se queda quieta por lo que debe tener muchísimas caras. ¿Cuántos puntitos negros tendría que ponerla si quisiera hacer un dado con ella...?

Son consideraciones que el niño en un principio puede y debe hacerse, pero sólo a través del único lenguaje

conocido para él, el de las sensaciones.

2.- Carencias: Los bloques de Dienes están compuestos por parejas de cuadrados, triángulos y circunferencias, cada una de ellas pintada de un color primario. Si elegimos la pareja de cuadrados de un mismo color por ejemplo, vemos que los dos cuadrados son iguales. Solamente cuando los tomemos en la mano e intentemos ponerlos de pie notaremos una leve diferencia, uno es más grueso que otro. Pero la diferencia no está en el cuadro sino en los rectángulos que contornean el prisma. No cabe la diferencia de grueso o delgado a la hora de hablar de formas planas, pues ya hemos dicho que éstas son de altura cero. Sólo podremos decir que puede haber cuadrados grandes o pequeños cuando un profesor avisado se preocupe en comprar dos colecciones de bloques fabricados en distinta escala. Aún así y después de haber hecho un esfuerzo de comprar dobles colecciones, hemos corregido un error de bulto, pero continuamos con la carencia del número TRES, pues seguimos con el sistema binario.

El niño desde el momento que nace y aún antes, está siempre condicionado por el sistema binario. No existe otra cosa que su dependencia con la madre. No ha oído otro ritmo que el tic-tac del corazón materno: sístole y diástole, la aspiración y expiración de sus pulmones. Se dice que los lactantes se duermen más plácidamente sobre el brazo izquierdo de la madre por estar su cabeza más cerca del corazón y el movimiento de la cuna o los brazos al mecerlo, para que se duerma también es de ritmo binario.

Ya es hora, cuando un niño sale por fin de la dependencia materna y acude a un colegio donde va a tener muy diversas referencias, que le enseñemos lo que es el número TRES.

El número TRES, referido a tamaños es lo mediano. De manera que en las formas básicas nos aparecerán: lo grande, lo mediano y lo pequeño.

¿Qué pasa entonces?. Todo se transforma, todo cambia. El grande, automáticamente, se convierte en muy grande con respecto al pequeño y a la inversa. Lo mediano ahora no es una cualidad estática por lo que permanece siempre en medio, pues puede ser grande también con respecto al pequeño o pequeño con respecto al grande.

El número TRES es lo creativo, puede ser cualquier cosa y es todo lo demás, adjetivando y potenciando el uno y el dos.

El sistema binario carece de creatividad. La pareja se termina en sí misma, es inmutable como el pez que se muerde la cola. Del sistema binario se han valido las religiones para no salirnos de la norma: lo bueno y lo malo, el cielo y el infierno, el yin y el yang, lo uno y lo otro, están conmigo o estás contra mí... No hay término medio, no ha haber duda, todo es verdad o mentira. Es el sistema binario de los ordenadores, verdadero o falso, no pueden equivocarse porque falta el número TRES y por esta razón carecen de la facultad de pensar y consecuentemente, de crear.

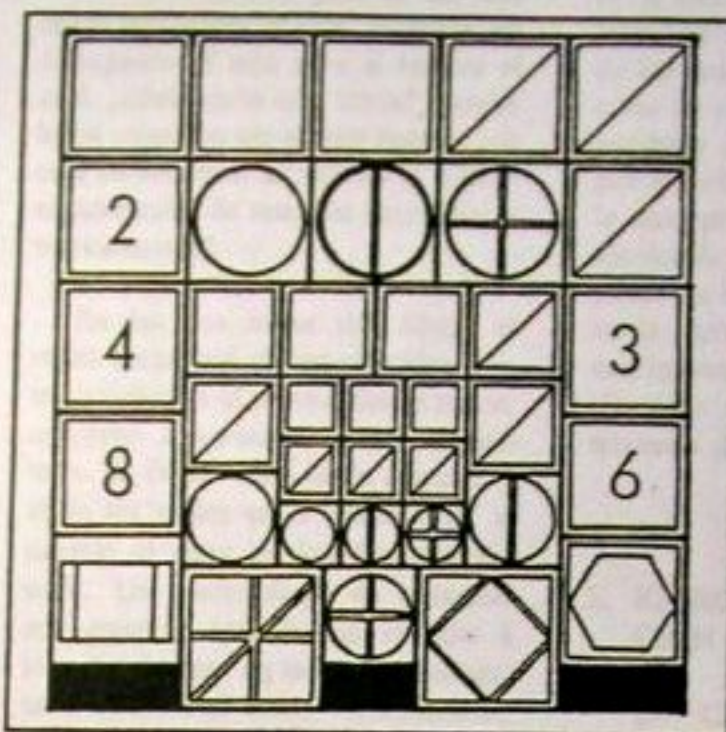
En cuanto al color, sí que se me puede decir que aparece el número TRES, pues son tres los primarios: rojo, amarillo y azul. Pero no me vale, ya que los colores primarios no son referenciables. El amarillo primario es uno, y el rojo y el azul también son unos y nada más. Todavía si jugásemos con los secundarios: naranja, verde, violeta, sí podríamos decir que el naranja se nos aparece más rojizo con respecto al amarillo y amarillento con respecto al rojo, pero estas diferenciaciones sobrepasan al conocimiento del color en estas primeras edades.

A. FORMAS LÓGICAS TRIDIMENSIONALES:

La caja de las Formas Lógicas está compartimentada en 36 departamentos donde se incluyen las siguientes figuras

1.- Formas Base

3 cubos grandes
3 cubos medianos
3 cubos pequeños
3 tetraedros grandes
3 tetraedros medianos
3 tetraedros pequeños
3 esferas grandes
3 esferas medianas
3 esferas pequeñas
Los tetraedros están inscritos en cubos y de las nueve esferas: 3 están enteras, 3 divididas en mitades y otras tres en cuartos. Cada serie de 3 del mismo tamaño está pintada en los tres colores primarios: amarillo, rojo y azul.



Se encuentra ante un juego de construcciones y como tal comienza a actuar sacándolas desordenadamente, en primer lugar, para a continuación ir las agrupando según sus distintas características y conformando esquemas que tiene en la memoria.

El niño adquiere así en este juego libre y espontáneo experiencias y cualidades de la forma que posteriormente tendrán importancia en un trabajo planificado. Descubrirá que una esfera mantiene muy mal el equilibrio sobre el cubo, mientras que si utiliza la semiesfera, aunque sea colocada tangencialmente, la estabilidad es tan perfecta que hasta le permite colocar encima otro cubo más pequeño y hasta media esfera más.

B. JUEGO LIBRE DE CONSTRUCCION

La impresión que el niño recibe al abrir la caja será la de encontrarse ante sí con una serie de múltiples formas y colores más propias para jugar que como tema de trabajo y eso será lo que libremente haga primero.

2.- División del cubo

Sistema Binario:

- 2 partes del cubo en color naranja
- 4 partes del cubo en color verde
- 8 partes del cubo en colores primarios, secundarios, blanco y negro.

Sistema ternario:

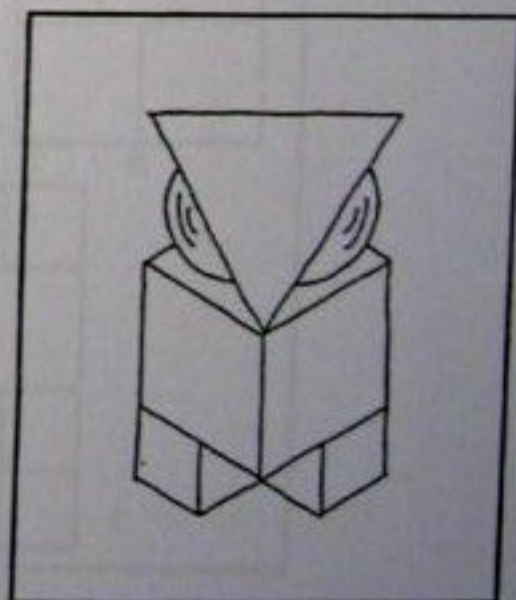
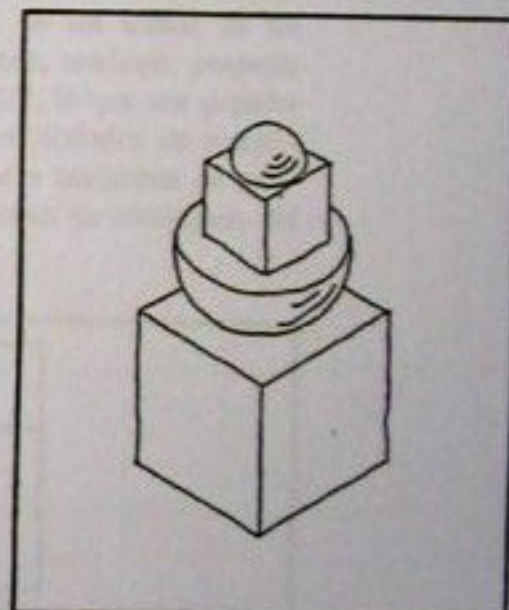
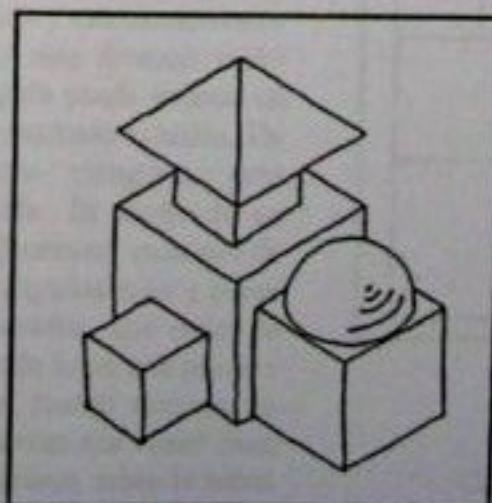
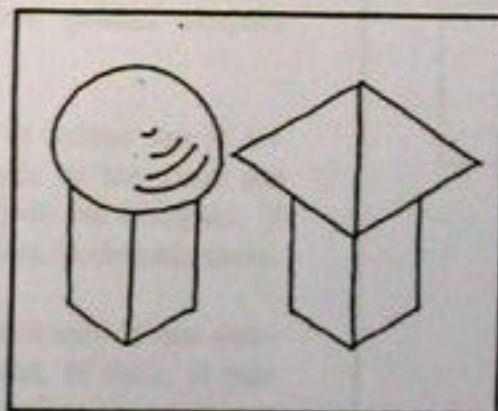
- 3 partes del cubo en color violeta
- 6 partes del cubo en primarios y secundarios.

3.- Transformaciones del cubo

Sección cuadrada en sección rectangular.
Sección cuadrada en sección hexagonal.

4.- Rompecabezas tridimensional

Relacionado con el tetraedro: de 18 piezas
Relacionado con el cuboctaedro: de 14 piezas.



Practicando así un juego de equilibrios, donde tratará de controlar su psicomotricidad manual.

C. EJERCICIOS DE CLASIFICACION

Formas iguales: cubos, tetraedros, esferas.

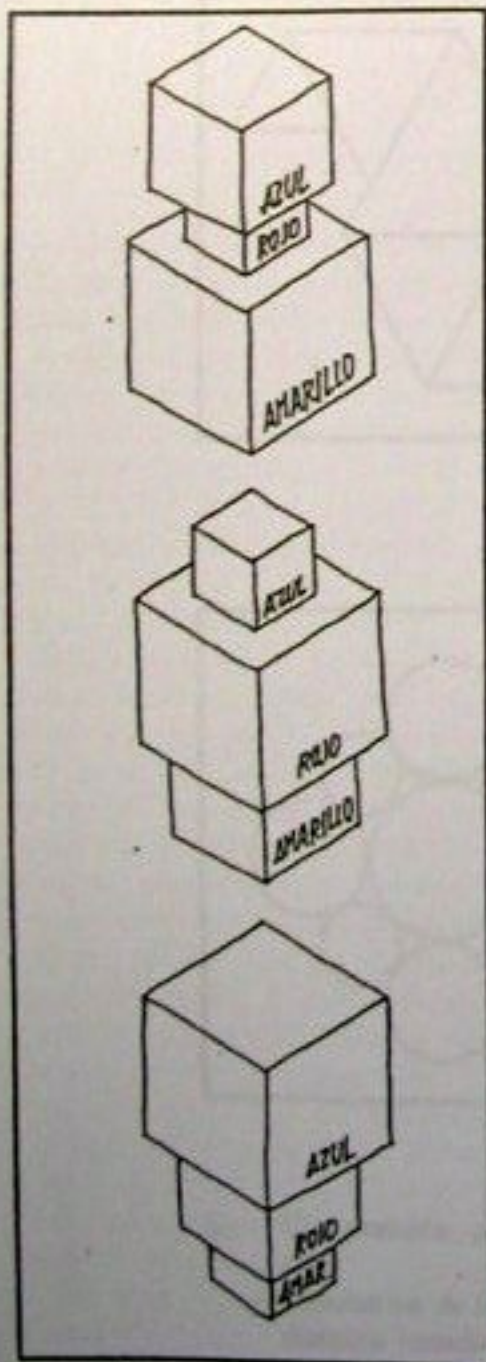
Tamaños iguales: grandes, medianos, pequeños.

Colores iguales: amarillos, rojos, azules.

Solamente con los cubos construyendo tres torres iguales:

- tamaños iguales: colores distintos
- colores iguales: tamaños distintos

Torres distintas:



Si en el primer piso de las tres torres colocamos el color amarillo, en el segundo el rojo y en el tercero el azul, ¿cómo serán esas torres?, ¿podrá hacer otras con ese mismo orden?, ¿en cuál de las torres se repetirá la misma organización de tamaños horizontal y verticalmente?

En las tres torres del dibujo el orden horizontal de los amarillos correspondientes al primer piso se repite, referente a tamaños, en la tercera torre. El de los rojos en la segunda y el de los azules en la primera. ¿Y si cambio el color de los distintos pisos?... Las posibilidades de variación son grandes, aprendiendo el niño a leer visualmente en todas direcciones, tanto horizontal como verticalmente, de izquierda a derecha o derecha a izquierda, de arriba a abajo o de abajo a arriba.

D. EL CUADRADO, EL TRIANGULO, LA CIRCUNFERENCIA

Si apoyamos el cubo sobre un papel y calcamos con lápiz su contorno, necesariamente quedará dibujado un cuadrado.

Si hacemos lo mismo con el tetraedro, cualquiera de sus caras nos proyectará dibujado un triángulo. Y con la media esfera, la circunferencia.

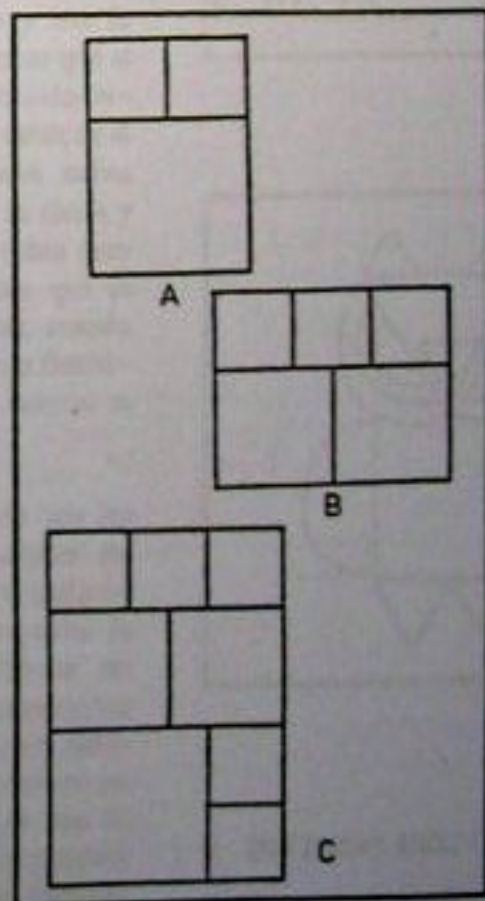
El proceso contrario, al que estamos acostumbrados, es decir, el paso del plano al espacio, nos conduce a numerosos equívocos pues de un cuadrado, un triángulo y una circunferencia pueden surgir muy diversos volúmenes. Un triángulo puede generar un prisma, pero un cuadrado también. Un cuboctaedro tiene triángulos, pero cuadrados también. Es decir, de un todo es más fácil conocer cada una de sus partes, si son iguales o no y cómo están interrelacionadas, que tratar de pensar lo que puedo hacer con la suma de partes aisladas. Rudolf Arnheim en su libro *Arte y percepción visual* hace referencia a un ensayo sobre la teoría

de la Gestalt en el que dice: Si doce auditores escuchan por separado uno de los doce tonos de una melodía, la suma de sus experiencias no correspondería a lo que percibiría alguien que escuchara la melodía entera. Por lo que pretendían demostrar que la apariencia de cualquier elemento depende de la función y lugar que tiene en la configuración total. Y de esta configuración total, el volumen, el elemento tridimensional, es del que tratamos de partir.

E. EJERCICIOS DE COMPOSICION DE FORMAS PLANAS

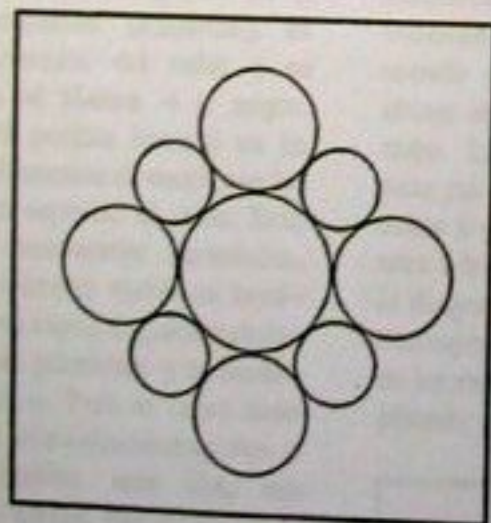
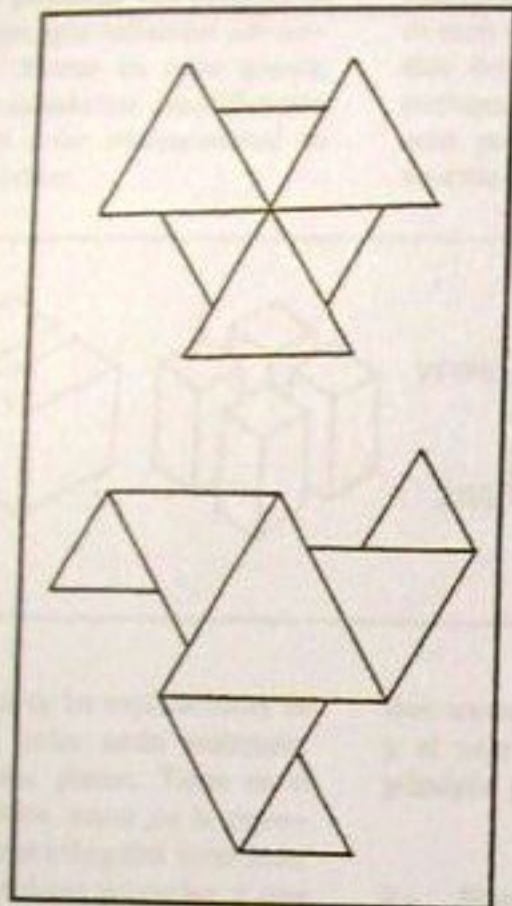
1.- Composición por contacto:

La relación de las aristas de los tres cubos: grande, mediano, pequeño es de 1, 3/4 y 1/2, lo que nos permite una serie de posibilidades de combinación en series o conjuntos de cuadrados que rellenan un rectángulo del papel.



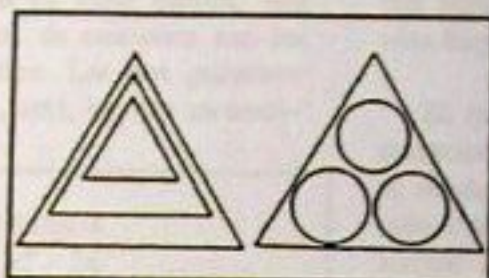
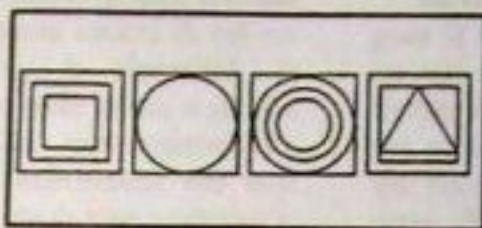
Conjunto $A + B = C$

¿Qué otras relaciones, más o menos regulares o simétricas, podemos obtener con los triángulos y las circunferencias?...



2.- Composición por superposición:

- concéntrica de formas iguales y distintos tamaños
- concéntrica de formas distintas
- excéntrica hacia arriba, abajo, derecha e izquierda

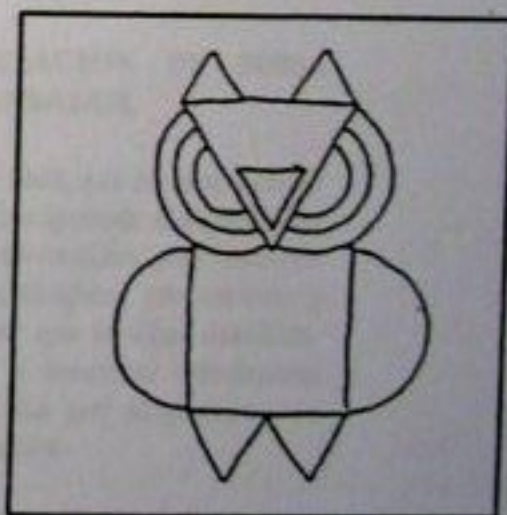
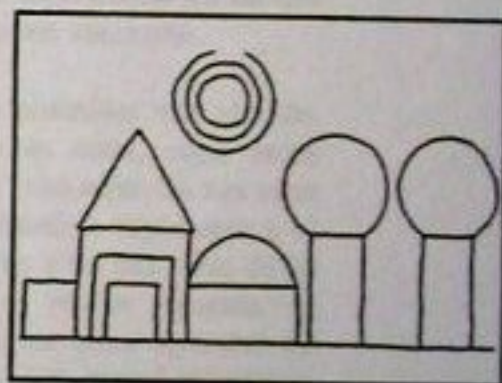


A la hora de dar color a estas composiciones, quiero llamar la atención sobre un hecho muy común que raramente advertimos. En los dibujos infantiles, los niños pintan invariablemente las nubes de color azul, cuando en realidad nunca son azules. Pueden ser blancas, grises, naranjas, violáceas o rojas al atardecer, pero nunca azules. Lo que es azul es el cielo y éste lo dejan blanco. Podríamos pensar que el niño hace la siguiente deducción inconscientemente: las nubes están en el cielo, el cielo es azul, pues nubes azules. En parte esta lógica es cierta y no debe preocuparnos en niños muy pequeños, pero es un tópico que se repite a lo largo de los años, cuando ya deberían mirar al cielo más detenidamente y comprobar que esto no es así.

El problema viene desde que les hemos hecho rellenar de colores *sin salirse* formas cerradas individualizadas, y nunca nos hemos propuesto lo contrario, que coloreen formas *sin entrar* en ellas. Las composiciones superpuestas, concéntricas o no, plantean el doble problema, pues al tiempo que dan color a la más grande, han de procurar no entrar en la más pequeña pues irá de otro color. Como ejercicio de habilidad viene a ser lo mismo, la gran diferencia consiste en que al rellenar por fuera están valorando un espacio entre formas, espacio vacío, que no lo es tal en el caso de la nube, pues ese vacío, ese fondo, es el cielo.

3.- Composiciones libres:

Continuando con el proceso abstracción-figuración, ya mencionado anteriormente, los niños harán composiciones libres de ambiente natural, basados en sus esquemas conocidos u otros nuevos motivados por estas series de formas y ayudados por todo el proceso anterior de relacionar y ordenar armónicamente o por contrastes. Convendría en este trabajo cambiar la técnica de realización, sustituyendo el papel blanco y los lápices o ceras por papeles coloreados que recortarán a mano o a tijera para realizar un collage.

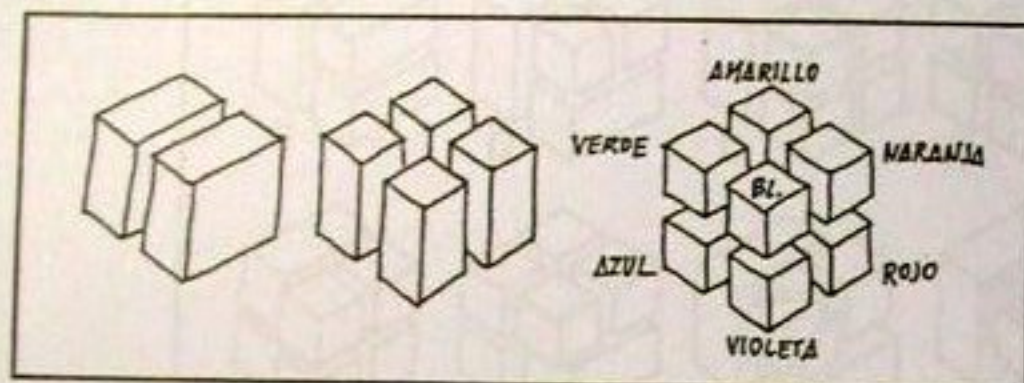


F. DIVISION DEL CUBO

1.- Sistema binario: Prismas

Un plano que pase por el centro del cubo y sea paralelo a dos de sus caras lo dividirá en dos partes iguales. Su plano de corte o sección será un

cuadrado igual a las caras. Si son dos los planos perpendiculares entre sí lo dividirá en cuatro prismas y si lo hacen en las tres dimensiones y cumplen iguales condiciones, el cubo quedará dividido en ocho cubitos. Estos ocho cubos pequeños van pintados de distintos color, que ordenados adecuadamente al formar un cubo grande, explican en su máxima simplificación la teoría del color tridimensional de Alfred Hickethier.



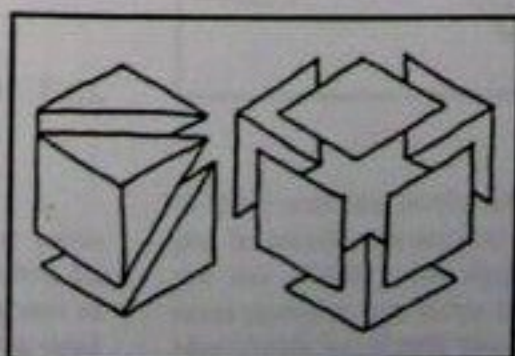
La mayoría de las explicaciones de la teoría del color están realizadas sobre diagramas planos. Tanto en el círculo cromático como en la representación de dos triángulos invertidos, uno para los colores primarios y otro para los secundarios, la cantidad de luz recibida es la misma para todos. Apreciamos en ellos diferencias de tono (longitudes de onda), pero no el grado de saturación (amplitud), es decir, el claroscuro del color o su aproximación al blanco o al negro. Esto sólo será posible hacerlo en un diagrama tridimensional como son los poliedros y en especial el cubo. Este, dibujado en perspectiva isométrica, presenta su perímetro como un hexágono regular en cuyos ángulos cabrían los seis colores primarios y secundarios del espectro. Pero el cubo tiene ocho vértices: seis coincidentes con el hexágono-perímetro más dos, uno delante y otro detrás, que formarán la diagonal del cubo que va del blanco al negro. En los vértices de las demás diagonales estarán los complementarios. De tal modo cada color del hexágono-perímetro tiene su escala de saturación hacia el claro o el oscuro en su aproximación al blanco o al negro.

Hickethier diseñó un cubo dividido en sesenta y cuatro cubitos de colores diferentes. Dada la diversidad de nombres que a veces damos a un sólo color, él utilizó una nomenclatura numérica que determinaba con total exactitud el grado de tono y saturación de cada uno de ellos. Aquí en la división del cubo en ocho cubitos, nos conformaremos de momento con los ocho principales. Los tres primeros: amarillo, rojo, azul, los tres secunda-

rios: naranja, violeta, verde. El blanco y el negro, que son todos ellos el principio y final de todos los demás.

2- Sistema ternario: Pirámides

Más difícil de ver es la división del cubo en tres pirámides iguales, que demostraría visualmente la forma del volumen de la pirámide: $b \times a/3$, teniendo en cuenta que su base y su altura sean las mismas que las del cubo. La solución es un plano que pasa por la diagonal de una cara y una arista y se cruza con otro igual de una cara adyacente, cruzándose los dos en la diagonal del cubo. A cada pirámide corresponderá una cara y dos medias de las externas del cubo, lo que multiplicado por tres será igual a seis.



La división en seis está más clara pues la base de cada pirámide serán las seis del cubo y los vértices confluirán todos en su centro. Las secciones pasan por las aristas y diagonales del cubo sin cortar ninguna de sus caras. Su formulación sería $(b \times a/2) : 3$. Tiene la misma base que la anterior pero la mitad de la altura, pues sólo llega al centro del cubo.

El que haga mención aquí a formulaciones matemáticas no pretende, ni mucho menos, introducir ya en el niño estos conceptos totalmente abstractos. Es verdad que así practicamos la matemática, pero dándole un significado real. Al jugar con estas formas, objetos tangibles, deseamos que el niño acumule experiencias de las que luego nacerán los conceptos.

Estas seis pirámides van pintadas cada una de un color, cuyo orden perfecto en el cubo sería: las tres caras de los tres primarios, adyacentes a un vértice del cubo y las tres caras de los secundarios al vértice opuesto, de modo que en las caras opuestas del cubo queden los complementarios: rojo-verde. Amarillo-violeta. Azul-Naranja.

G. VISUALIZACION DE SUMA DE QUEBRADOS

Acabo de decir que no es momento para que el niño aprenda el significado del lenguaje matemático, pero discurrir sobre órdenes elegidos por instinto y las sensaciones que en ellos desvelan, puede llevar a encontrar estructuras formales con las que sí practican la lógica matemática.

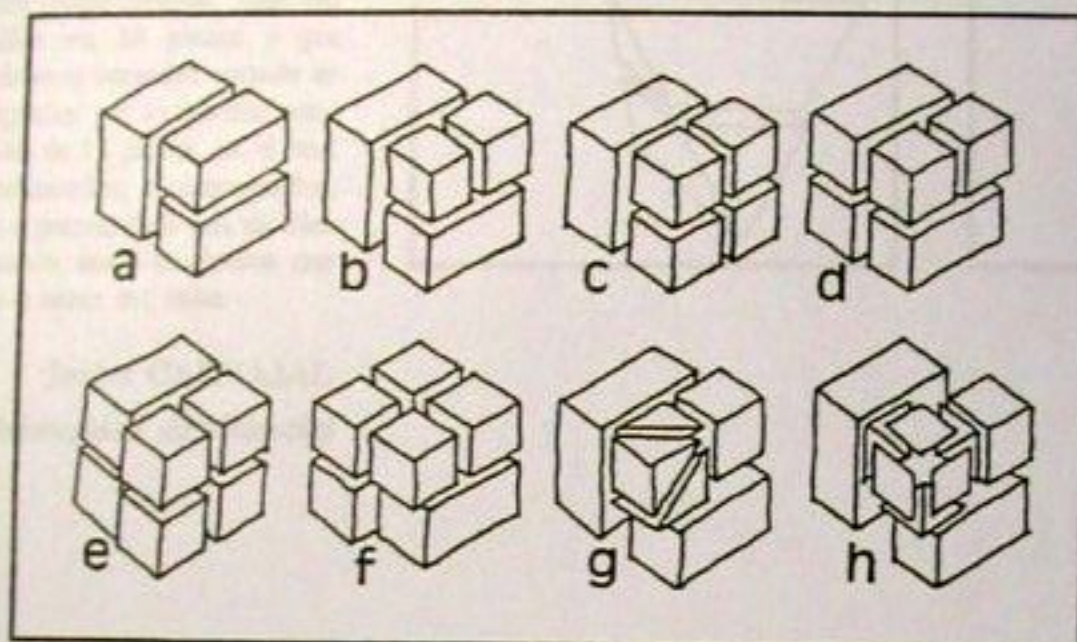
Engorrosos problemas de sumas y multiplicaciones, de numeradores y máximos denominadores comunes, suponen la suma de quebrados cuando en realidad todo consiste en tratar de llegar al uno. El todo hecho de partes, que en este caso se llama cubo grande.

Hemos visualizado en cubo hecho en dos, dividido en tres, partido en cuatro y seis trozos iguales y despeda-

zado en ocho cubitos mucho más pequeños. Todo estriba ahora en volver a recomponerlo pero con distintos trozos, como si de un sencillo rompecabezas se tratase.

Así surgirán estas combinaciones:

Las cuatro partes sobrantes del cubo serán pirámides triangulares de volumen $1/6$ de cubo: $(6/2 \times a) : 3$. En este caso la mitad es la base y no la altura. Por tanto, si lo que le sobra al cubo son cuatro pirámides de tales características, el volumen del tetraedro inscrito en él será de $2/6$.



- A) $1/2 + 2/4$ B) $1/2 + 1/4 + 2/8$
 C) $1/2 + 2/8$ D) $3/4 + 2/8$
 E) $2/4 + 4/8$ F) $1/4 + 6/8$
 G) $1/2 + 1/4 + 1/8 + 3/24$
 H) $1/2 + 1/4 + 1/8 + 6/48$

Todos ellos son iguales a uno, nuestro gran cubo.

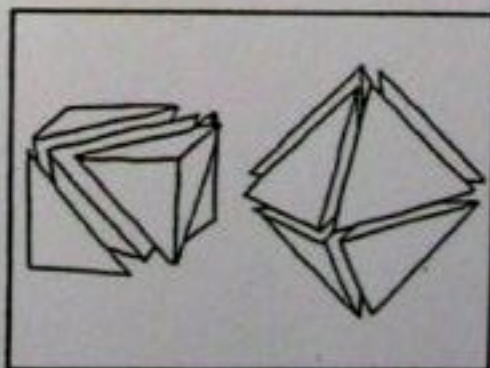
Los niños que han visualizado de tal manera las partes y el todo como objetos reales, tangibles, adquieren experiencias que más adelante les facilitará enfrentarse a los nuevos lenguajes que se les plantean.

H. TRANSFORMACION DEL CUBO

Los tetraedros presentados como formas base van inscritos en cubos. La relación de aristas entre uno y otro es $\sqrt{2}$; diagonal de la cara del cubo igual a la arista del tetraedro.

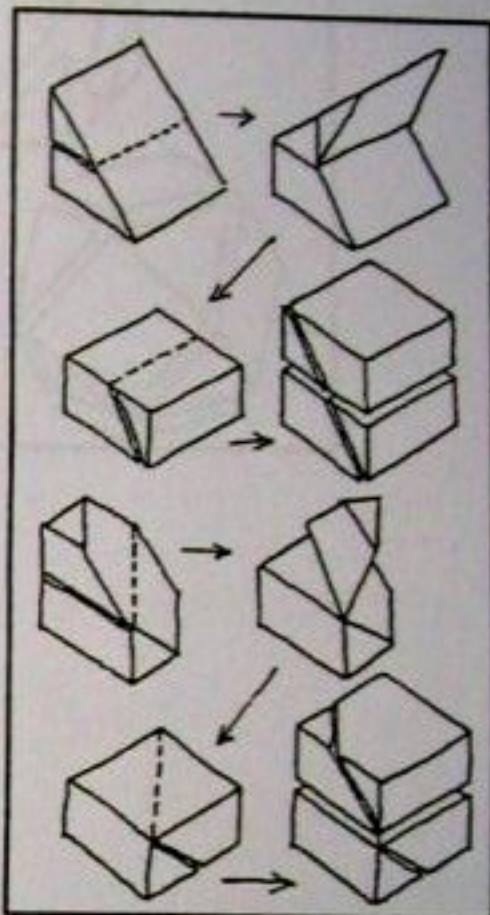
Continuando con el juego combinatorio y de transformación, la unión de esas cuatro pirámides sobrantes, produce otra cuadrangular, que junto a otra igual invertida nos aparecerá otro cuerpo nuevo: el octaedro.

Será fácil deducir entonces que con dos cubos obtendré: dos tetraedros y un octaedro.



Si ahora tomamos medio cubo cortado por la sección rectangular que pasa por dos aristas y dos diagonales de caras opuestas, esta forma aún no será identificada por el niño como la mitad, pero con una sencilla manipulación,

mediante giro, de quitar por un lado una parte para añadirla por otro, la forma se le hace ya reconocible.



Con parecido procedimiento sucederá lo mismo en la transformación de la sección hexagonal a la cuadrada.

I. ROMPECABEZAS TRIDIMENSIONALES

El proceso de construcción de todo rompecabezas no es más que la identificación de *espacio vacío* que es rellenado con otro *espacio lleno* idéntico. Esto que en los rompecabezas planos no tiene mayor dificultad, al traspasarlo al espacio tridimensional la visión de esos espacios se complica grandemente. La causa es la falta de visualizaciones internas de los cuerpos sólidos. Todas las experiencias acumuladas han sido exclusivamente a través de descripciones externas, es decir conocemos únicamente la forma de su piel y poco o nada de lo que dentro contiene.

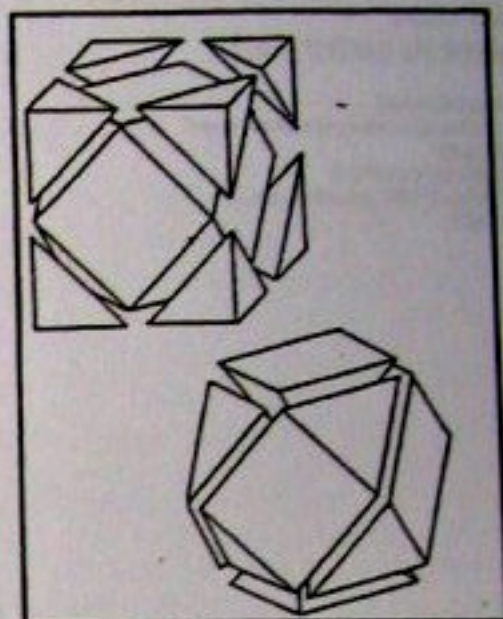
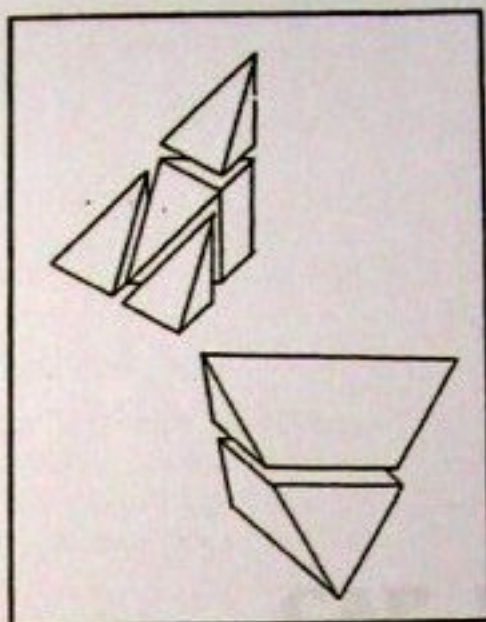
Baste decir que todos los poliedros, platónicos y arquimedianos, pueden ser continentes o estar contenidos en

otro, para entrever las múltiples posibilidades de juego entre ellos. Un octaedro contenido en un cubo, las partes sobrantes de éste son totalmente diferentes en forma y número al caso inverso, en el que el octaedro sea el continente y el cubo el inscrito en él.

En la caja de las formas lógicas presento dos rompecabezas. Uno del cubo dividido en 18 piezas y que dentro contiene al tetraedro cortado en dos partes iguales por su sección cuadrada. El otro de 14 piezas, en el cual el cubo circunscribe al cuboctaedro, troceado en 6 partes, cada una de ellas correspondiendo sus 6 cuadrados con parte de las 6 caras del cubo.

Javier CARVAJAL

(Universidad de Valencia)



LA CREATIVIDAD
EN EL
DIBUJO GEOMÉTRICO

CAP. III

LA CREATIVIDAD EN EL DIBUJO GEOMÉTRICO

LA CREATIVIDAD EN EL DIBUJO GEOMETRICO

Javier Carvajal

En este artículo se ofrecen diversas posibilidades de trabajo y experimentación dentro de esa área de la enseñanza. Se trata de la construcción de diversos módulos para desarrollar la inventiva y la creatividad.

Al releer las orientaciones pedagógicas y los programas del estudio de la expresión plástica en el actual Plan de Enseñanzas después de acertados consejos sobre su contribución en la formación de la sensibilidad, la imaginación, etc. nos encontramos con la frase siguiente: *"la expresión plástica es sin duda, en su doble vertiente artística y utilitaria, un medio educativo de gran valor..."*

La distinción entre una "vertiente artística" y otra "utilita-

ria", puede hacer pensar en la inutilidad del arte o, sin ir tan lejos, pone una barrera inseparable entre el objeto artístico y el objeto utilitario.

En primer lugar, no debemos confundir "lo creativo" con "lo artístico", eso sucede a menudo, y la causa no es otra que la manía de clasificar las cosas con cánones prescritos o ideas preconcebidas sobre el objeto de arte. Toda obra artística es en sí creativa, pero no toda obra crea-

tiva ha de ser necesariamente artística o hecha con fines artísticos. Para entendernos mejor, ya en el plano de la enseñanza, queremos que el niño desde su más corta edad sea creativo, no artista. No es función de ningún profesor de expresión plástica hacer niños o jóvenes artistas igual que ningún otro profesor, al enseñarles a hablar o escribir correctamente pretende hacer oradores o ve en los alumnos futuros escritores.

Lo que hemos de procurar es desarrollar la expresión, ejercitar la imaginación, estimular la actividad mental y no enseñar mecánicamente, poniendo excesivo celo en que aprendan unas técnicas, finalidad inferior que durante mucho tiempo ha sido preocupación única de la enseñanza del dibujo. El profesor que sigue literalmente un sistema que es esclavo de un método, puede considerar el dibujo como una serie de copias de líneas sin otro objetivo que la exactitud. Algunos profesores consideran la imaginación como un enemigo y la creatividad como un tópico, sin que jamás hayan intentado ponerla en práctica; siempre se antepone la exactitud. Insistamos en que ningún maestro pretende equipar a los niños con el vocabulario de un idioma, el conocimiento de su gramática y la capacidad de trazar los símbolos utilizados en su escritura, para luego privarle de toda oportunidad de expresar ideas mediante su uso. ¿Para qué entonces dedicar todo el tiempo y esfuerzo, en adquirir conocimiento de la apariencia de las cosas y de la técnica del dibujo, si no les dejamos hacer uso alguno de ese conocimiento para expresar ideas?

En nuestros planes de estudio existe una marcada diferencia entre lo que llamamos "dibujo artístico" y "dibujo lineal", técnico o geométrico, las vertientes "artística" y "utilitaria" que mencionamos al principio. El primero es tratado ampliamente en la edad preescolar y va descendiendo progresivamente hasta la edad de los catorce años, momento en que se suprime para dar lugar al llamado "técnico". Esta diferencia entre las dos manifestaciones plásticas es demasiado grande, cuando ambas deberían ser tratadas paralelamente en tanto que medios o técnicas distintas para la expresión de una misma actividad plástica. A fin de cuentas, siempre que se dibuje con gouache se habrá de mezclar con agua, el óleo con aceite y, para hacer una circunferencia, siempre utilizaremos el compás.

Esta distinción, dice Herbert Reed, *"refleja la naturaleza escindida de una educación y formación posterior en el adulto que puede tolerar ese divorcio entre forma y función, ocio y trabajo, arte e industria, que es básicamente el divorcio entre mente y materia."*

Así las cosas, el observador que ve como un chico dibuja o pinta una representación libre de sus sentimientos o ideas, puede pensar que está empeñado en una forma de actividad mental y que el chico que se afana en cortar largueros de madera, lijarlos y ensamblarlos correctamente, está dedicado a una actividad mental totalmente distinta. Esta separación también está implícita, en nuestras enseñanzas, en la actividad distinta que suponen el dibujo y las manualidades. Sin embargo, las dos actividades



El dodecaedro irregular siempre será un "poliedro creativo", ya que sus soluciones son infinitas.

sólo podrán relacionarse en esa región de los valores plásticos en la cual todas las formas de expresión se reconcilian o rechazan. El chico que corta madera para realizar una estantería o el que utiliza la escuadra y el compás para dibujar, sólo alcanzará esa región si lo que hace con tan exacta medición está determinado, en primer lugar, en su proceso de fabricación, por un sentido del diseño, en suma, de creación.

"Las actividades que indicamos con palabras —continúa citando a Herbert Read— como imaginativa, creadora, originadora, estética, no representan una materia con límites definidos, adjudicándola una serie más o menos de horas e intentando resaltar su importancia en un horario competitivo. Lo imaginativo no se opone a lo lógico, lo creador a lo didáctico, lo artístico a lo técnico, sino que todo ello es, más bien, un modo del desarrollo mental que todo lo abarca".

El proceso creador no es patrimonio exclusivo del dibujo artístico ni de cualquier forma de expresión plástica sino que atañe a todo el proceso educativo, y en suma a todo educador.

Propuestas de trabajo donde se concretan las tres funciones o finalidades de la expresión plástica: proceso creativo, técnica a desarrollar y manualización.

—Proceso creativo: Invención de una forma nueva para el alumno y muchas veces también para el profesor.

—Técnica: Comprensión y solución de sus problemas de geometría plana o espacial.

—Manualidad: Construcción de su desarrollo mediante los distintos procesos de cortar, doblar y pegar.

Bien entendido que el tercer objetivo no podrá realizarse sin la consecución del segundo, y éste tendrá muy poco sentido si falta el primero. Este será pues, el orden de prioridades, aunque su desarrollo ha de ir paralelo. Las nuevas formas nos inducirán a la solución de nuevos problemas y

estos conocimientos nos darán mayor comprensión para inventar formas más complicadas, desarrollando al mismo tiempo las diversas técnicas de expresión y su uso para expresar ideas.

No quiero terminar sin hacer una mención especial al color, olvidado por completo en los trabajos de dibujo geométrico. Las condiciones de una publicación en blanco y negro no permiten

hacer un estudio detenido sobre el color, pero sí recordar su importancia a la hora de potenciar con él los volúmenes, dar mayor sentido a la profundidad o su imprescindible utilización en el campo del diseño.

PRIMERA PROPUESTA: CONSTRUIR VOLÚMENES A PARTIR DE UN PROBLEMA DE GEOMETRÍA PLANA.

1. Reticula triangular:

—Elección de los polígonos planos. Fig. 1

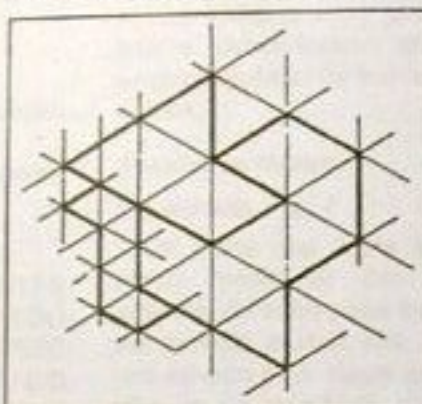
—Construcción en volumen de alturas diferentes. Fig. 2

—Dibujo en perspectiva: cónica en este caso. Fig. 3

2. Enlaces y tangencia de curvas: figs. 4, 5, 6, 7, 8.

—Perímetro de la circunferencia

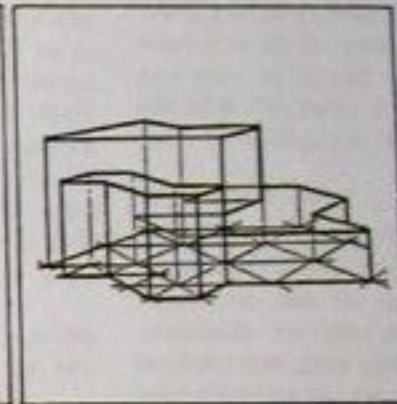
—Distintas combinaciones



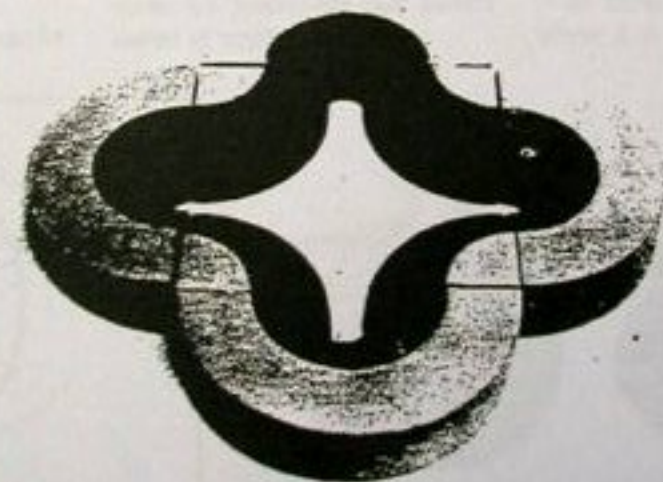
1



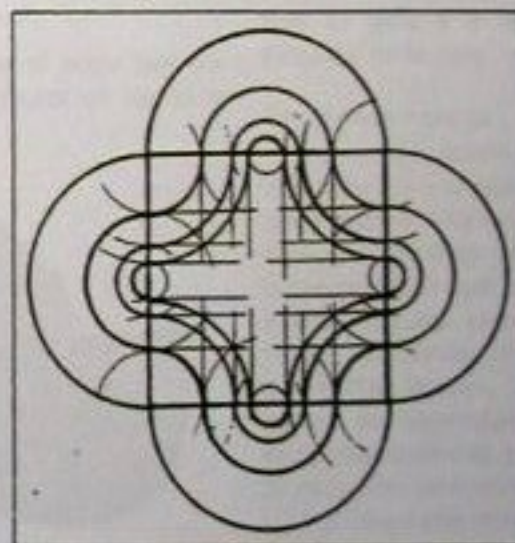
2



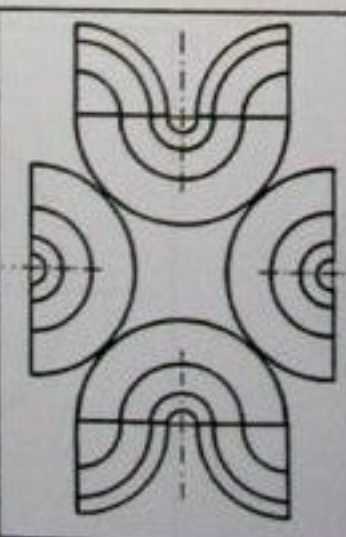
3



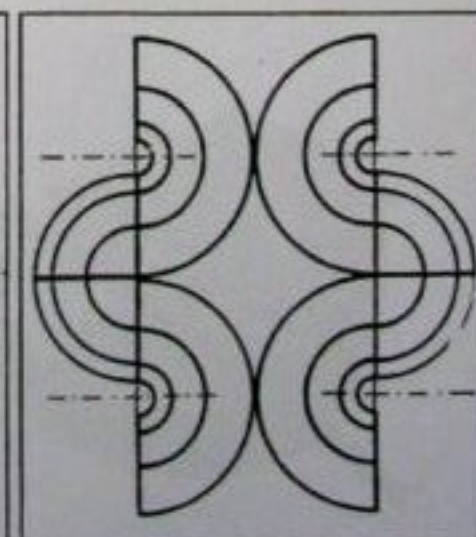
4



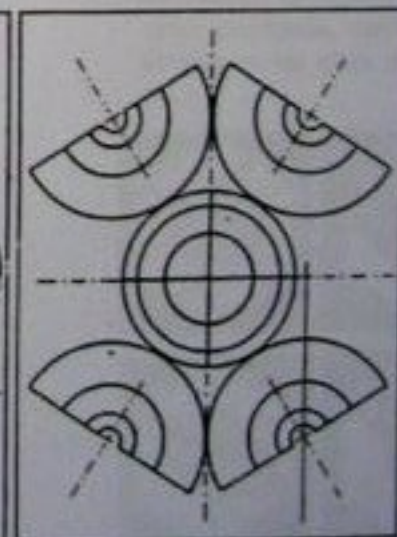
5



6



7



8

3. División de la circunferencia en partes iguales: Fig. 9

—Circunferencia dividida en 22 partes iguales.

—Cada volumen es media parte mayor que el anterior y su altura escalonada.

—La construcción también de su negativo macizará un cilindro de base la circunferencia y altura igual a la suma de las alturas de los volúmenes. Fig. 10

4. Trazado de espirales:

—Espirales de cuatro centros, Fig. 11

—Volúmenes progresivamente escalonados. Fig. 12

SEGUNDA PROPUESTA: VISION DEL ESPACIO INTERNO DE LOS CUERPOS SÓLIDOS A PARTIR DE LAS SECCIONES MODULARES DEL CUBO.

Secciones modulares del cubo

Por el interior de un cubo pode-

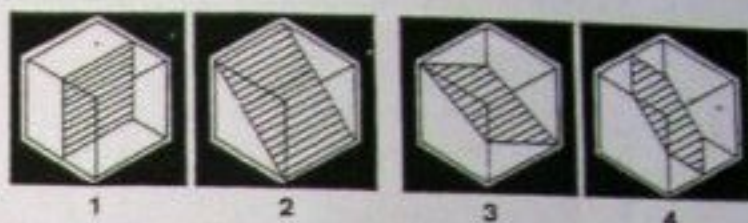
mos hacer pasar un plano en infinitas posiciones dividiéndolo en dos partes, pero sólo cuatro de ellas forman poliedros modulares; es decir, dos partes iguales que tienen la misma superficie y el mismo volumen.

Estas cuatro secciones son las que veremos a continuación, figuras geométricas básicas y regulares: el cuadrado, rectángulo, rombo y exágono. A partir de aquí y combinándolas entre sí surgirán multitud de formas modulares.

Secciones rectas

El cuadrado. Fig. 1

Un plano que corte por el punto medio de dos caras opuestas del cubo y que a su vez sea paralelo a otras dos, forma una sección cuya figura geométrica es un cuadrado de lado igual a la arista del cubo. Como las caras del cubo son 6, tres serán las posiciones que pueda tomar el cuadrado sección.



El rectángulo. Fig. 2

La sección rectangular del cubo se produce si cortamos éste por un plano que pase por las diagonales de dos caras opuestas. A la fuerza ese plano será perpendicular a las caras cortadas y pasará por otro par de aristas opuestas también. De ello resultará un rectángulo cuyo lado mayor será la diagonal de la cara y el lado menor la arista del cubo.

Como cada cara tiene dos diagonales, las posiciones del rectángulo sección serán seis.

El rombo. Fig. 3

Si cortamos el cubo por un plano que entra por un vértice y

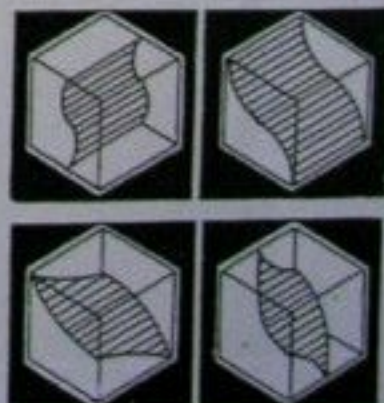
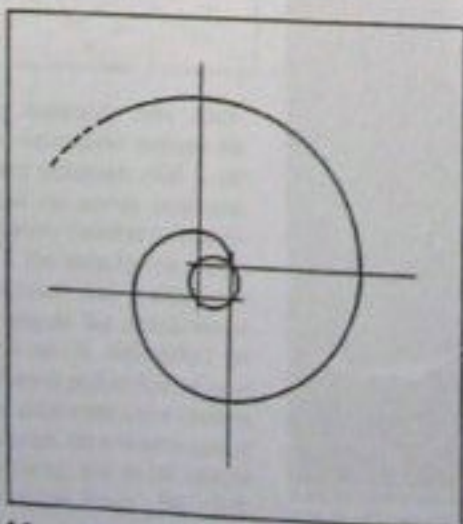
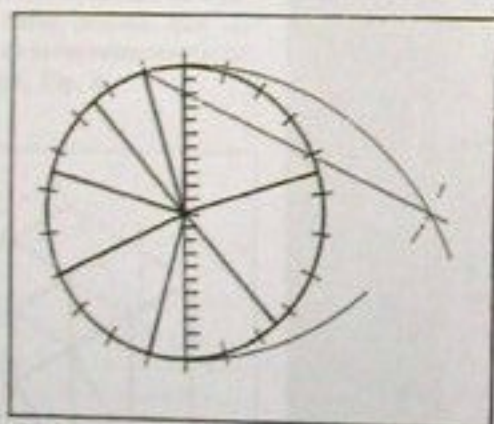
sale por el opuesto a la vez que pasa por el punto medio de las aristas que necesariamente encuentra en su camino, la sección resultante es un rombo, cuyos ejes son: el mayor igual a la diagonal del cubo y el menor igual a la diagonal de la cara.

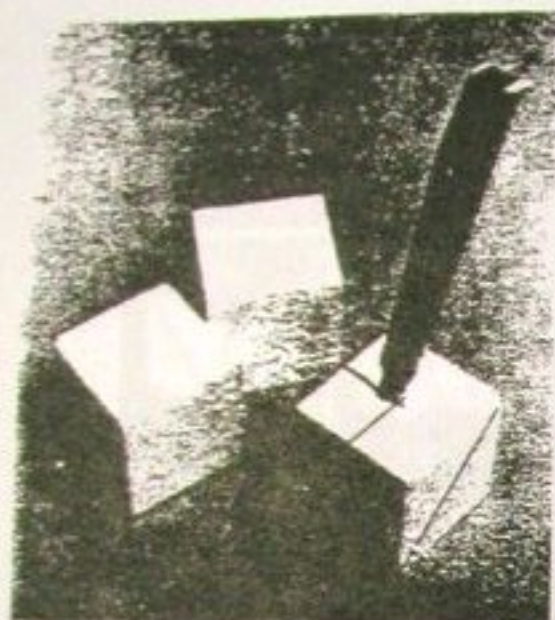
El exágono. Fig. 4

El plano sección de forma exagonal corta el cubo por el punto medio de seis de sus aristas, quedando las otras seis aristas enteras, tres para cada mitad y convergentes en un vértice. El exágono formado es regular y su lado es igual a la mitad de la diagonal de la cara.

Secciones curvas

Las cuatro secciones rectas del cubo se corresponden con otras cuatro secciones curvas; cada una de ellas es un plano curvo continuo que pasa por los mismos puntos que las anteriores, dividiendo al cubo en dos partes iguales. Fig. 5 Las curvas correspondientes a las secciones cuadrada y rectangular se repiten en dos caras opuestas y el plano que forman es perpendicular a ellas. En las correspondientes a rombo y exágono las curvas se repetirán en dos caras contiguas, cambiando su sentido en las otras dos opuestas.

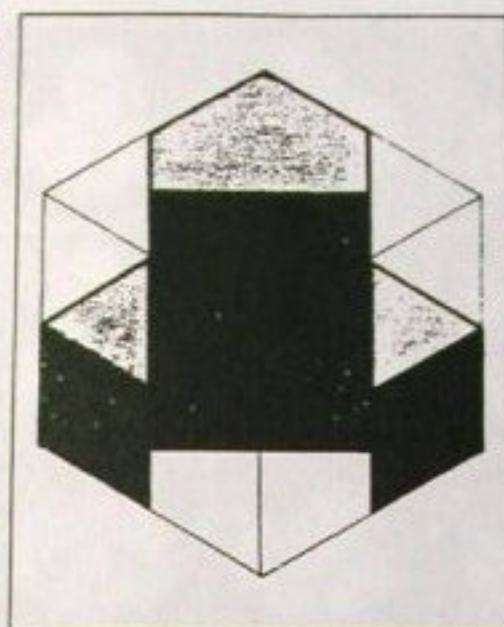




7

Descubrimiento del módulo

Podemos partir, en un principio, del dibujo sobre el plano del papel y la combinación de sus diversas secciones. Este procedimiento provoca muchas confusiones, dada la dificultad de imaginar las caras ocultas que no aparecen en la representación bidimensional. Fig. 6



8

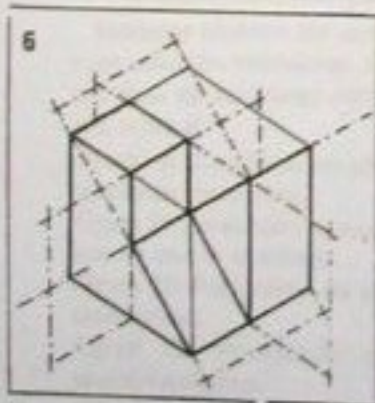


9

Muchas veces, hasta que no hemos visto separadamente las dos partes no nos damos cuenta de que sus volúmenes son dis-

tintos, lo que corregiremos quitando de uno la parte sobrante y añadiéndosela al otro, o dividiendo las dos partes por la mitad

para luego unir una parte pequeña a una grande y viceversa, con lo que conseguiremos que las dos sean iguales.

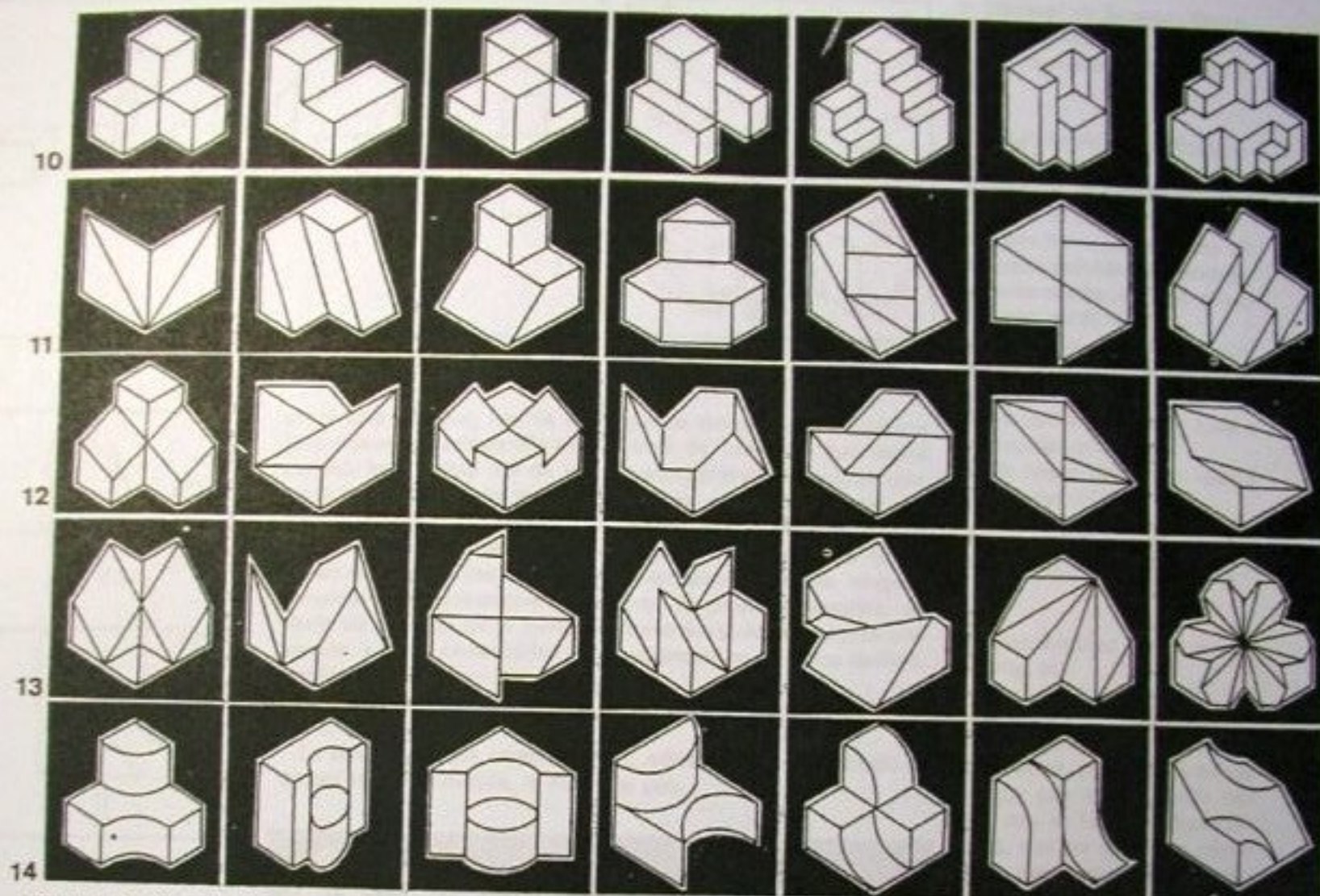


6

Para los módulos más complicados es necesario valerse de un cubo en volumen real y de materia fácil de cortar con una cuchilla: barro, corcho o estyropor. Fig. 7. De esta forma podemos manipular sus volúmenes hasta conseguir las condiciones que entran en la definición de módulo: forma poliedrica tal que sus partes cóncavas sean iguales a las convexas, de manera que el espacio interno del cubo quede completamente lleno. Fig. 8-9.



Los módulos del cubo utilizados como juego de comprensión de la forma. La visión del espacio lleno, se ha de complementar con la del espacio vacío o cóncavo para formar el cubo.



Módulos binarios del cubo en cuya solución intervienen distintos tipos de secciones combinadas entre sí.

Figura 10: Combinación sólo de secciones cuadradas.

Figura 11: La sección rectangular alterna con la cuadrada.

Figura 12: Predominio de la sección-rombo.

Figura 13: Predominio de la sección-exágono.

Figura 14: Módulos de sección-curva.

Tres módulos del cubo

Hasta ahora hemos dividido el

cubo en dos partes de forma modular, algo perfectamente claro pues los elementos que componen el cubo son de número par: doce aristas, ocho vértices, seis caras; cuatro diagonales. Pero vemos que el número seis de las caras puede ser divisible por tres, también en partes iguales.

Si partimos de tres combinaciones básicas:

1. — dos caras enteras para cada módulo: (2) Fig. 15-18;

2. — una entera y dos medias: ($1 + 2 \frac{1}{2} = 3$) Fig. 16-19;

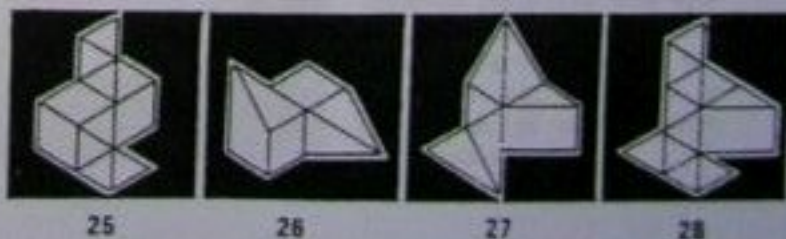
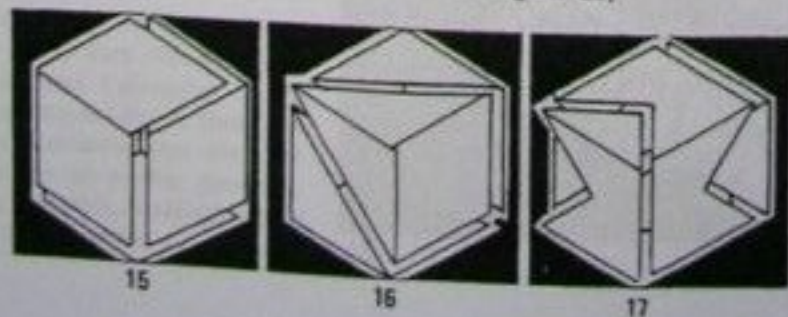
3. — dos tres cuartos de cara más dos cuartos: ($2 \frac{3}{4} + 2 \frac{1}{4} = 3$), Fig. 17-20;

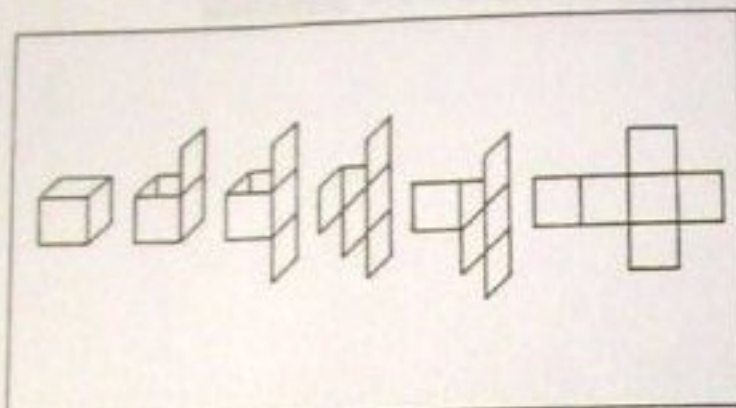
Otras divisiones modulares serían imposibles de hacer, pues ninguna medida del cubo sería múltiple de 5 ó 7. Los módulos resultantes de subdividir el cubo en 4, 6, 8 ó 9 partes serían ya submódulos de los de 2 y 3, es decir divisiones de éstos.

Los demás módulos aquí presentados son variantes de las dos

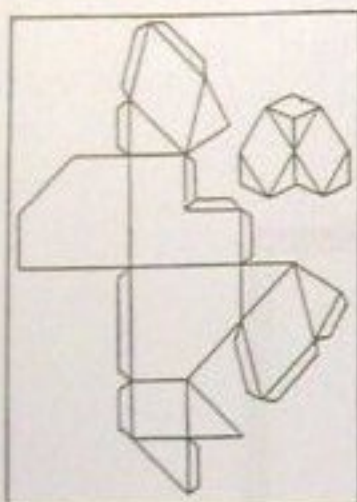
primeras combinaciones, resultantes de dividir el cubo en ocho cubitos. fig. 25, 26, 27, 28.

Si a un módulo binario le correspondían 4 cubitos, a un módulo ternario en la división de 8 le corresponderán $2 + \frac{2}{3}$ de cubitos, que multiplicado por tres nos darán las 8 partes del cubo: $(2 + \frac{2}{3}) 3 = 8$.





21



22

Desarrollos:

Se entiende por desarrollo de un cuerpo al abatimiento de todas sus caras: horizontales, verticales e inclinadas a un sólo plano de proyección, el horizontal o el vertical. Fig. 21.

Construcción:

Cada figura geométrica presenta, a la hora de hacer el desarrollo, problemas distintos, sin embargo, para su trazado y posterior construcción: plegado y pegado de aristas, podemos guiarnos por unas normas generales que facilitan este proceso. Fig. 22.

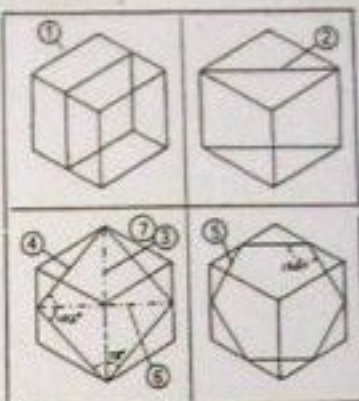
El desarrollo ha de hacerse a partir de la cara mayor que le sirve de base, y alrededor de ella ir añadiendo las demás caras que tengan contacto con ella, por medio de las aristas comunes.

Las pestañas, prolongación de la cara, que sirven para pegar a

ella la cara contigua, han de ser las justas en cada desarrollo y su número es la mitad del de los lados del perímetro del desarrollo.

Para doblar correctamente las aristas deberán ser marcadas anteriormente con una pequeña incisión de la punta de la tijera o punzón, y si dos caras doblan en sentido cóncavo, su arista correspondiente conviene marcarla por el lado contrario.

La última cara que peguemos deberá ser, si es posible, la más



23

grande después de la que nos sirvió de base, ya que dejará hasta el último momento un gran espacio por donde meter los dedos y facilitar el pegado de las anteriores. Esta cara no ha de llevar adosada a ella ninguna otra, ni tampoco pestañas, de forma que pueda ser pegada presionándola en un único sentido.

Medidas más usuales: Fig. 23

1. *Arista del cubo:* igual a lado de la cara.

2. *Diagonal de la cara:* Hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son dos aristas o lados.

3. *Diagonal del cubo:* Hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son, uno al lado de la cara y el otro su diagonal.

4. *Lado del rombo-sección:* Hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son uno el lado y el otro medio lado.

5. *Lado del exágono-sección:* Igual a la mitad de la diagonal de la cara.

6. *Eje menor del rombo:* Igual a la diagonal de la cara.

7. *Eje mayor del rombo:* Igual a la diagonal del cubo.

—Ángulos del rombo: 102° y 78° .

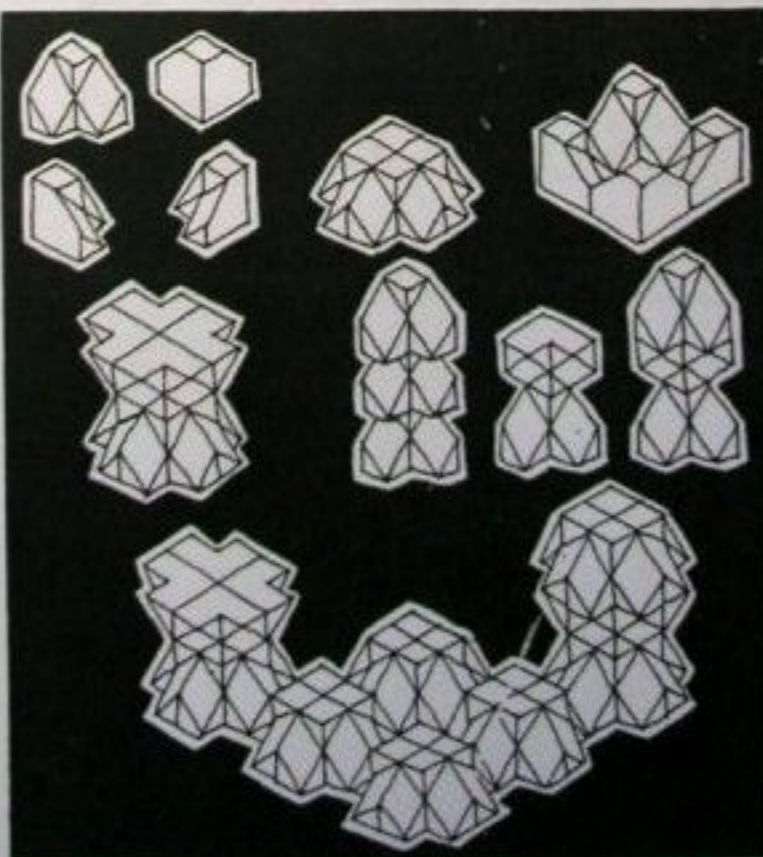
—Ángulos del exágono: 120° .

Combinaciones de un módulo: Fig. 24.

Una vez inventado y construido el módulo como hemos visto hasta ahora, podemos comenzar a jugar con él. Encajando uno con otro se forma la figura del cubo, que era de la que partíamos, pero vemos que precisamente por ser modular, es decir, tener las mismas caras, aristas y volumen, tiene posibilidades múltiples de combinación consigo mismo. Juntando dos, tres, cuatro, ocho, surgen figuras que ya poco tienen que ver con la forma cúbica. Haciéndolos girar sobre sí mismos, 90° o 180° hasta hacer coincidir vértices o aristas opuestas pero iguales, superponiendo caras, invirtiendo uno de ellos sobre el otro, surgen formas externas o internas que descomponen parcial o totalmente la forma cúbica de la que partían.

Aunque en principio todo módulo es combinable consigo mismo de múltiples formas, hay unos que lo son más que otros, produciendo resultados más estables, aplicándose aquí el principio de que la forma cuanto más sencilla es más susceptible de combinarse, de tener mayores posibilidades.

J.C.



24

CAP. IV

POLIEDROS: PLANOS-SECCIÓN QUE LOS DEFINEN

POLIEDROS: PLANOS-SECCIÓN QUE LOS DEFINEN

Javier Carvajal. Universidad de Valencia

Al estudiar los poliedros y tratar de definirlos, siempre lo hacemos atendiéndonos al número de sus caras, su forma poligonal: triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono... número de vértices y aristas, resumido todo ello en la fórmula: $Vértices + Caras - 2 = Aristas$. Es esta una descripción puramente numérica y escasamente perceptiva. Cuando nos muestran dibujos de ellos, se presentan en perspectivas caballera o axonométrica con las deformaciones propias de toda perspectiva y la ocultación de al menos la mitad de sus caras. A veces, en un alarde de dedicación al tema, llegamos a construir los desarrollos, representación diédrica, que nos vienen ya dibujados. Con ello al menos, conseguimos tener una percepción global y verdadera de los cuerpos poliédricos, llamados también sólidos, pero resulta que al dibujar y reconstruir su desarrollo, lo hacemos exclusivamente de su corteza, el envoltorio que lo recubre, por lo que de *cuerpos sólidos* realmente no tienen nada.

Si tomamos en nuestra mano una naranja, apreciamos la redondez de su forma esférica, la suave rugosidad de su piel, su atractivo color; pero la percepción de ella es totalmente superficial. Sólo cuando nos decidimos a seccionarla con un cuchillo, sabremos de su olor, sabor, jugosidad, número y textura de sus gajos, si tiene pepitas o no, grado de acidez y maduración,... toda una serie de características que definirán en verdad qué tipo de naranja es y qué se nos ocultaba bajo la hermosa apariencia de su cáscara.

Quiero decir con esto que al igual que en el ejemplo de la naranja, lo más interesante de los poliedros también se encuentra en su interior. Cuesta a veces entender y más aún llegar a ver: triángulos equiláteros dentro del cubo, cuadrados, rectángulos, rombos, hexágonos, todos ellos con unas medidas y proporciones íntimamente relacionadas con su arista, de donde surgirán los poliedros a los cuales circunscribiremos.

Esta será la idea base de la propuesta: planos-sección, que pasando por los vértices de los poliedros, los definen. Su relación de dualidad. Y todos ellos, inscritos en un cubo teórico de arista: $a=1$. Los vértices de estos planos debidamente interseccionados ortogonalmente dibujarán, mediante simple manipulación, los polígonos que formarán los poliedros objeto de estudio. Tales planos habrán de construirse en cartón o tablero de

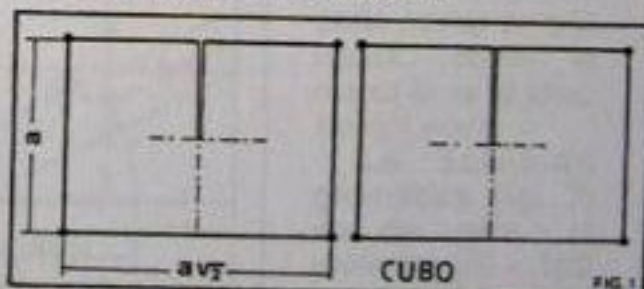
contrachapado de 3 o 4 mm de grosor, este dependerá de su tamaño, y en sus vértices clavar un alfiler grueso o clavo de cabeza grande, por las cuales deslizará un hilo o cuerda fina que trazará las aristas, que dibujarán las distintas caras poligonales de los poliedros respectivos.

Así, habremos seguido el proceso del estudio de los poliedros, pero a la inversa. Mostrando claramente lo oculto en ellos, sus relaciones internas y dejar intuido lo evidente, de modo que mediante una sencilla manipulación aparezcan a la vista las aristas que limitarán la forma de sus caras.

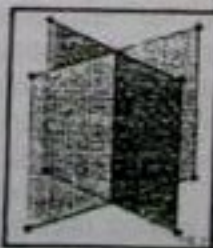


EL CUBO (fig. 1 y 2)

Comienzo con el cubo por ser este el volumen poliédrico de más fácil comprensión perceptiva aún para los alumnos más pequeños, dada la perpendicularidad y paralelismo de sus aristas y caras. En él, todos los poliedros pueden fácilmente ser inscritos, al tiempo que su arista nos servirá de unidad como referencia numérica para todas las demás dimensiones.



Dos rectángulos $\sqrt{2}$ -diagonal de la cara del cubo- cruzados perpendicularmente



determinarán los ocho vértices del cubo por el que pasarán sus aristas, algunas coincidirán con el lado menor del rectángulo y otras no. Para su ensamblaje habrá que hacer una

incisión hasta la mitad de la línea de intersección de los dos rectángulos, de igual grosor que el material utilizado.

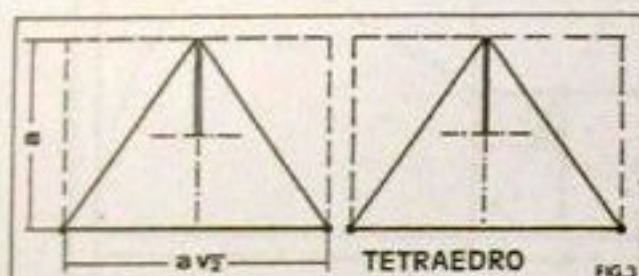
La proporción -rectángulo $\sqrt{2}$ - es la empleada para los formatos de papel comúnmente utilizados dentro de las normas DIN: A4, A3, A2,...

El vulgarmente llamado *folio* o *cuartilla* sería el más pequeño -A4- duplicándose su tamaño en los restantes.

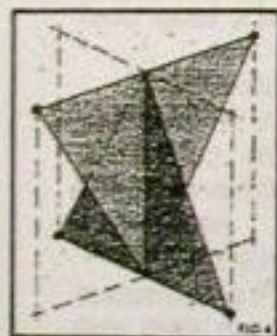


EL TETRAEDRO (fig. 3 y 4)

En el tetraedro inscrito en el cubo, su arista será diagonal de la cara de éste, por lo que será fácil dibujar los dos triángulos isósceles que lo definen sobre los rectángulos $\sqrt{2}$, sección del cubo, anteriormente mencionados.



Los lados menores de los triángulos isósceles serán alturas de la cara del tetraedro, los mayores, dos de sus aristas; perpendiculares y paralelas al mismo tiempo entre sí (en su proyección diédrica). Este concepto de perpendicularidad y paralelismo que en el plano bidimensional es contradictorio, pues necesariamente se cortan unas y no lo hacen las otras, no lo es en el espacio tridimensional, pues las perpendiculares se cruzan pero no se cortan y al mismo tiempo son paralelas, pues pertenecen a caras opuestas del cubo.

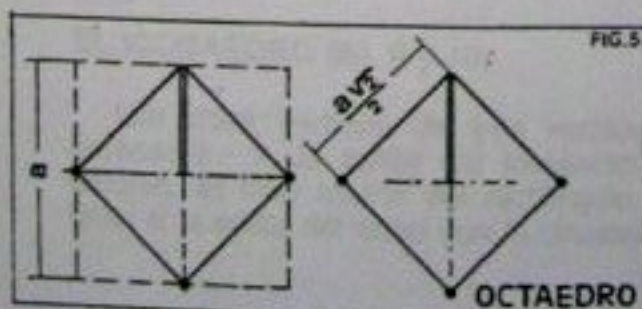


contradictorio, pues necesariamente se cortan unas y no lo hacen las otras, no lo es en el espacio tridimensional, pues las perpendiculares se cruzan pero no se cortan y al mismo tiempo son paralelas, pues pertenecen a caras opuestas del cubo.



EL OCTAEDRO (fig. 5 y 6)

Los seis vértices de octaedro, coinciden con los centros de las seis caras del cubo

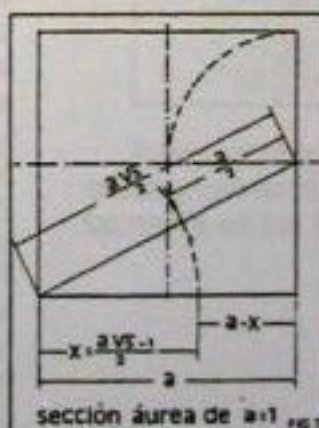


que lo circunscribe. De modo que dos cuadrados inscritos en cuadrados-sección del cubo, serán los planos que limitan el octaedro. Lado del cuadrado y arista del octaedro: $\sqrt{2}/2$.



SECCIÓN ÁUREA Y SUCESIÓN DE FIBONACCI (fig. 7 y 8)

Antes de tratar del icosaedro y el dodecaedro, resulta imprescindible hablar de la Proporción Áurea, el Número de Oro, Φ o la *Divina Proporcione*, título del libro que Luca Pacioli publicó en Venecia (1509) sobre el tema. La razón de tal necesidad es que esa proporción tan singular, que tanto ha llamado la atención a escultores y arquitectos griegos, renacentistas y modernos como Le Corbusier, se encuentra en el pentágono regular; en la relación existente entre el lado y la diagonal. El dodecaedro está formado por doce pentágonos y el icosaedro incluye en él doce pirámides pentagonales, una por cada vértice.



La sección áurea es, la división de un segmento, de tal manera que la parte menor es a la mayor, como la mayor lo es al total: $(a-x)/x = x/a$.

La solución geométrica (fig. 7) nos da: para x el valor de: $(\sqrt{5} - 1)/2 = 0,618$ el llamado *Número de Oro* o Φ . Pero lo más

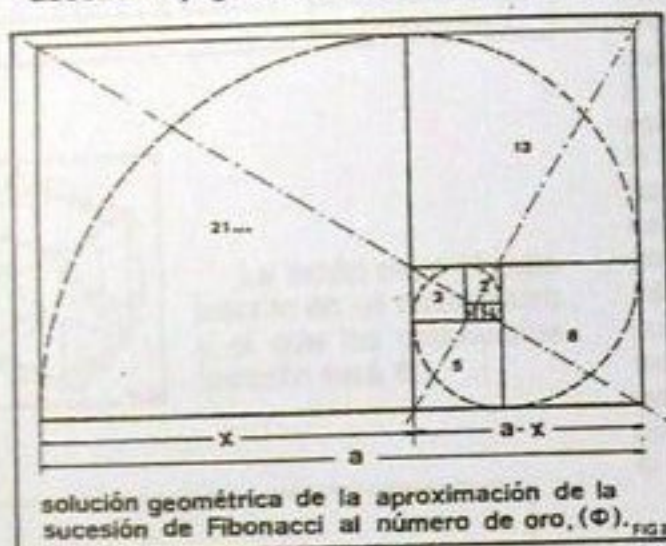
asombroso de esta proporción es que progresivamente, siempre el segmento menor dividirá al mayor, también de modo áureo: $[x - (a-x)]/a-x = (a-x)/x = \Phi$ y a su vez el mayor sumará el total de la misma proporción: $x/a = a/(a+x) = \Phi$

Lo que quiere decir, que en una progresión que tenía por razón a Φ entre dos términos sucesivos, cada uno nuevo es igual a la suma de los dos precedentes. Progresión que nos recuerda a una sucesión bien conocida por los matemáticos, llamada de Fibonacci; 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,... en la cual sus fracciones, tienden a Φ . Si

avanzamos en la sucesión hasta los términos: 2584 y 4181 veremos su cociente es igual a:

$$0,6180339 = (\sqrt{5}-1)/2 = \Phi$$

La solución geométrica (fig. 8) de la aproximación de la sucesión de Fibonacci a Φ , es fácil de construir, dibujando cuadrados adosados y girados a modo de espiral, de



lado igual a la numeración de la serie.

Fácilmente comprobaremos que los rectángulos resultantes de sus sumas, son cada vez más áureos, coincidiendo con mayor exactitud la perpendicularidad de sus diagonales.

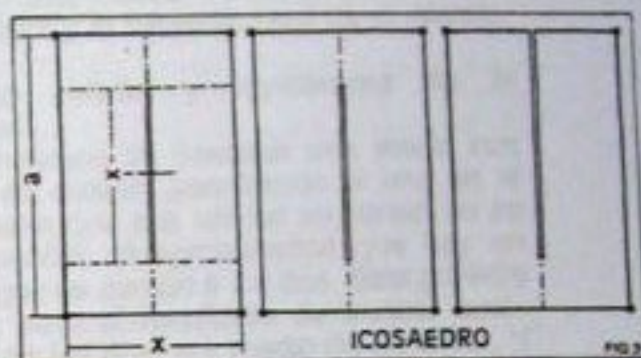
Pero si singular es esta relación entre la sucesión de Fibonacci y el Número de Oro, lo que más me asombra, es que pueda darse con tal exactitud en la pretendida *caótica Naturaleza*. Estrellas de mar, flores, hojas y estructuras geológicas tienen la forma del pentágono regular. Y a su vez, las series de espirales, que entrecruzándose en uno y otro sentido, conforman las celdillas de cada piñón en la piña, o las pepitas en una flor de girasol, están en relación con la sucesión de Fibonacci: 5 y 8 comúnmente en las piñas y 21 y 34 en los girasoles.

En verdad, no nos sorprendería tanto, si traducimos la palabra *Geo-metría* por lo que verdaderamente significa, que no es otra cosa que la *medida de la Naturaleza*.

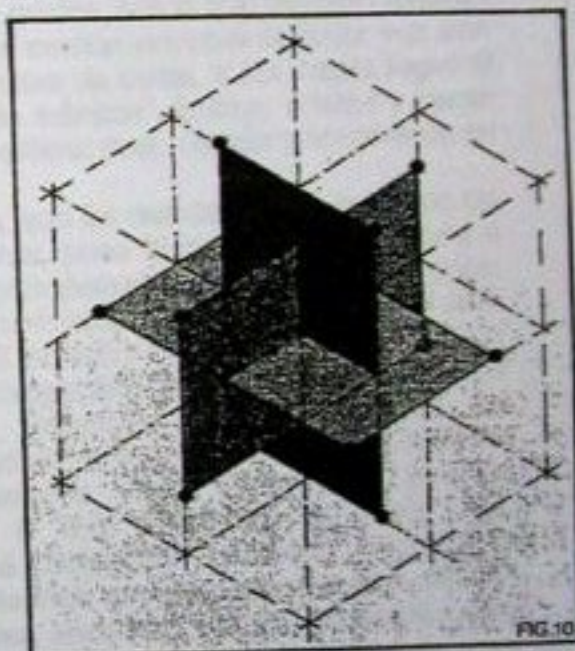


EL ICOSAEDRO (fig. 9 y 10)

Los doce vértices de tres rectángulos áureos: $a \cdot x$, lo serán del icosaedro que dibujan. El lado mayor del rectángulo será igual a la arista del cubo que lo circunscribe



y sus seis lados menores -aristas del icosaedro- pertenecerán a las seis caras del cubo, por lo que la razón entre las aristas del icosaedro y del cubo que los circunscribe, será Φ .

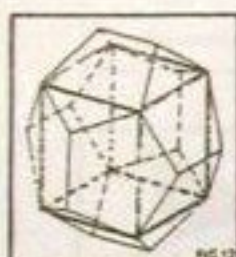
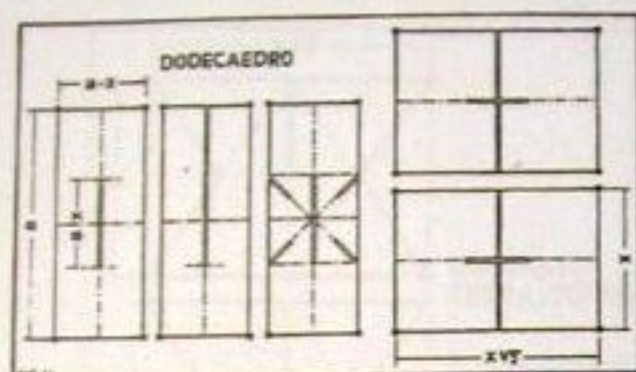


Estos rectángulos, iguales a las tarjetas de crédito, van entrelazados entre si perpendicularmente en las tres dimensiones.

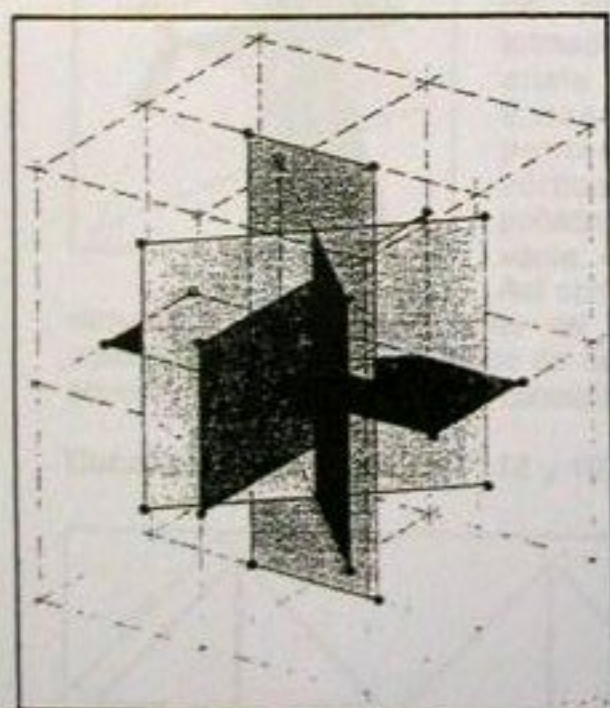


EL DODECAEDRO (fig. 11, 12 y 13)

Otros tres rectángulos $a \cdot (a-x)$. En este caso tomando el total y el lado menor de la sección áurea, entrelazados de igual manera, delimitarán doce de los veinte vértices del dodecaedro inscrito igualmente en el cubo. Faltarán los ocho vértices de otro cubo menor que se encuentra inscrito en él (fig. 12), al cual definirán dos rectángulos: $x^2/2$. Las doce aristas de este cubo serán diagonales de los doce pentágonos del dodecaedro.



La razón entre el cubo inscrito en un dodecaedro y el que los circunscribe también será Φ .



DUALIDAD DE LOS POLIEDROS

La propiedad general de dualidad define, que todo poliedro compuesto de vértices, aristas y caras tiene otro dual, correspondiéndose el número de vértices de uno, con las caras del otro y viceversa.

En el caso de los poliedros regulares las semejanzas son aún mayores. Los vértices de uno coinciden en los centros de las caras de su dual. Y sus aristas se cortan perpendicularmente en el punto medio, por lo que han de tener el mismo número de ellas.

Los cinco poliedros platónicos son duales dos a dos: cubo-octaedro, icosaedro-dodecaedro y el tetraedro dual de sí mismo.

Poliedro común y envolvente de la dualidad

Si tratamos de construir una macra con pareja de duales, penetrando el uno en el otro, hasta que sus aristas se corten en su punto medio, comprobaremos que hay un sólido que es común a los dos. Este poliedro común sería el resultante de truncar cualquiera de los dos, por medio de su arista. Y si de esa misma macra, especie de poliedro estrellado, unimos sus vértices -las puntas de la estrella- aparecerá otro poliedro que llamaremos *envolvente*, pues en su interior están inscritos los dos. Comprobaremos con asombro que el común y el envolvente son así mismo duales, por lo que también tendrán su poliedro común envolvente cada vez con mayor número de caras. Y así, hasta llegar al poliedro de infinitos vértices, aristas y caras que es la esfera: dual, común y envolvente de sí misma.

Esfera, que en realidad no es más que un *punto gordo*, pues lo infinitamente grande e infinitamente pequeño son una misma cosa. Recordemos aquella antigua película de Jack Arnold: *El increíble Hombre Menguante*, en la que el protagonista, al hacerse cada día más diminuto, después de haber sufrido mil calamidades, al final se siente tan poderoso y omnipotente como Superman. Ojeemos también el libro *Potencias de Diez*, -Ed. Biblioteca Scientific American- donde la imagen teórica que aparecería a una distancia de cien años luz: 10^{18} m, es idéntica a la obtenida a 10^{-11} m, un cielo lleno de diminutas estrellas.

Y así en el punto *adimensional*, nos encontramos nuevamente en el principio de la generación de la forma.

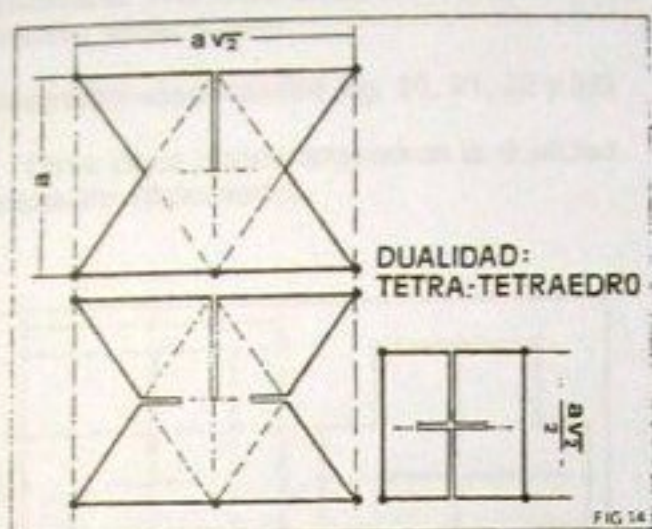
Su desplazamiento crea la línea *unidimensional*, que generará el plano *bidimensional* y del plano al espacio *tridimensional*, cuyo límite será nuevamente la esfera; que no es más que un punto...

Tetraedro-tetraedro (fig. 14 y 15)

Los dos planos triangulares que definían el tetraedro, irán en este caso superpuestos sobre el rectángulo $\sqrt{2}$, formando un plano semiestrellado.

Con otro igual a él obtendremos las ocho puntas de los dos tetraedros incrustados.

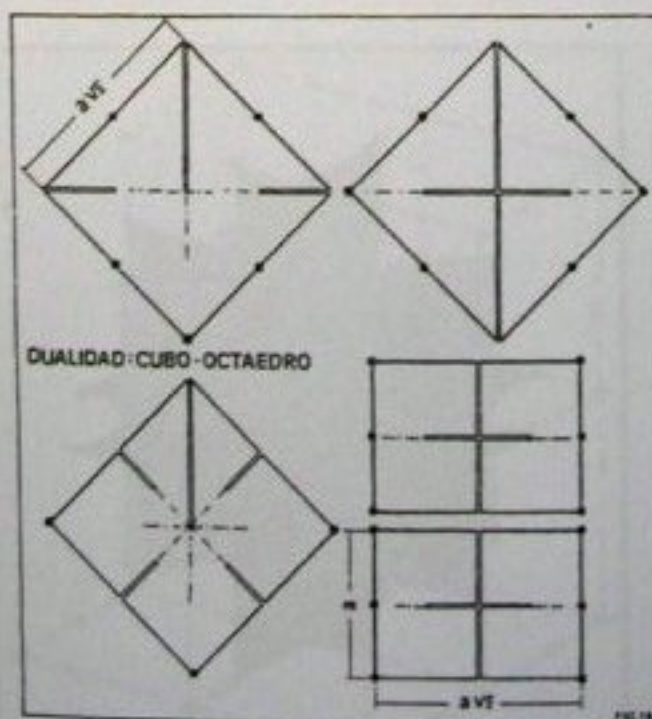
El cruce de sus aristas limitan el poliedro común de la dualidad, el octaedro, definido por un cuadrado de lado $\sqrt{2}/2$.



Todo el conjunto sería un octaedro estrellado, cuyas puntas tendrán forma de pequeños tetraedros, de arista $\sqrt{2}/2$. Estas ocho puntas son vértices del poliedro envolvente, el cubo.

Así comprobaremos, que los seis vértices del común, octaedro, coinciden en centros de caras del envolvente, el cubo, que lo circunscribe.

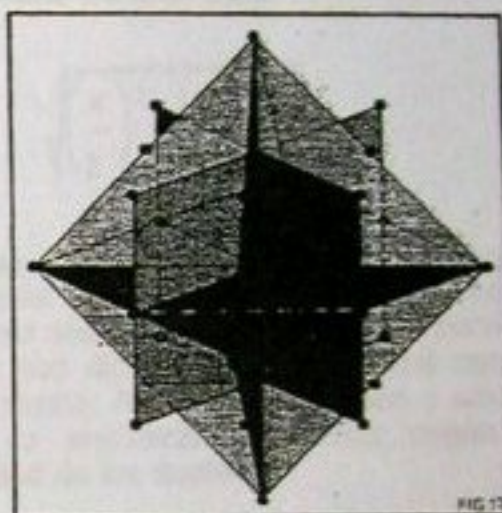
Cubo-Octaedro (fig. 16, 17, 18 y 19)



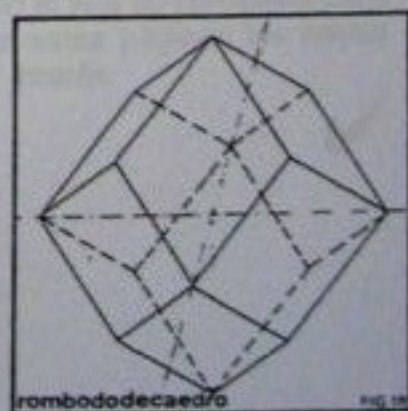
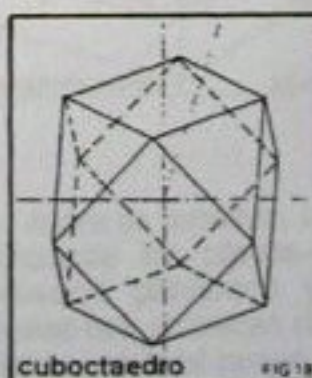
Imaginemos ahora que el octaedro inscrito en el cubo, se agranda hasta que sus aristas

se corten con las de éste, lo harán perpendicularmente y en el punto medio de las dos, formando una nueva estrella dual de catorce puntas: ocho pirámides triangulares -vértices del cubo- y seis cuadrangulares -vértices del octaedro-.

Cinco planos determinarán la nueva macia de la dualidad: tres cuadrados $\sqrt{2}$ para el octaedro y dos rectángulos $\sqrt{2}$ para el cubo.



El poliedro común será el cuboctaedro -ocho triángulos y seis cuadrados- llamado así precisamente por ser el resultado de truncar por un medio de la arista tanto al cubo como al octaedro. El poliedro envolvente, el rombododecaedro -doce rombos- de lado $\sqrt{3}/2$, pues su eje mayor es igual a arista del octaedro: $\sqrt{2}$, y el eje menor arista del cubo: 1.

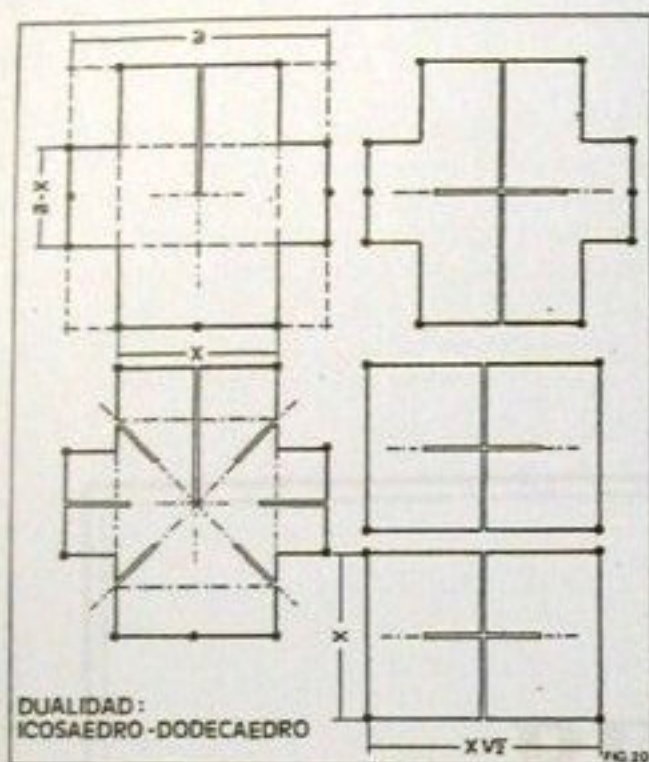


Comprobaremos nuevamente que el común -cuboctaedro- queda inscrito con sus vértices, en los centros de las caras del

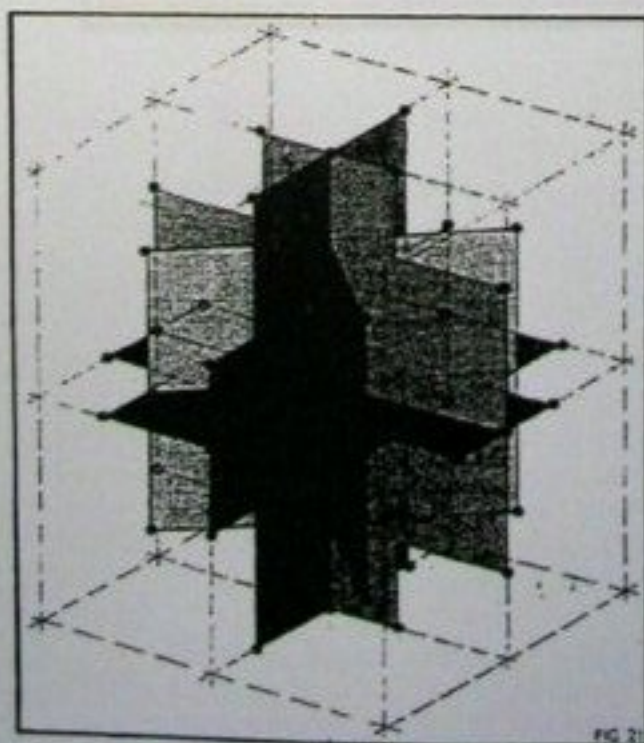
envolvente -rombododecaedro- por lo que también serán duales.

Icosaedro-dodecaedro (fig. 20, 21, 22 y 23)

Otros cinco planos engendran la dualidad icosaedro-dodecaedro.



Tres en forma de cruz, producto de la superposición de los rectángulos áureos: $a \cdot x$ y $a \cdot (a-x)$ y otros dos rectángulos: $x \cdot x\sqrt{2}$, correspondiente al cubo inscrito del dodecaedro (fig. 12).

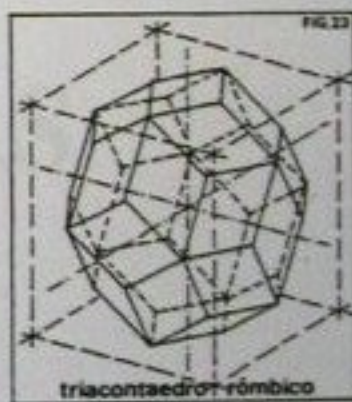
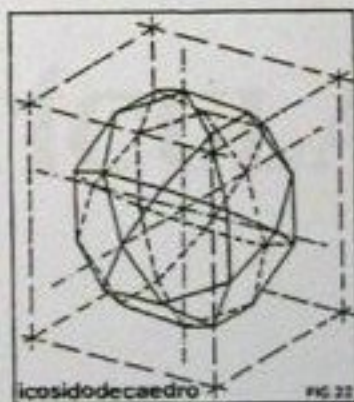


La estrella de la dualidad será de treinta y dos puntas -veinte triangulares y doce pentagonales- cuyas bases serán caras del poliedro común, el icosidodecaedro cuyo nombre viene también de trincar por un medio las aristas de cualesquiera de los dos duales. Su arista = $x/2$.

El envolvente, triacontaedro rómbico -treinta rombos áureos- de eje mayor: x arista del icosaedro y eje menor: $a-x$ arista del dodecaedro. Su lado será:

$$\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-x}{2}\right)^2}$$

Este rombo es denominado también por el nombre del físico-matemático Roger Penrose, por haber descubierto retículas cuasi periódicas en dos dimensiones, realizadas con el citado rombo. Nuevamente común y envolvente se encontrarán inscritos según la propiedad de los duales.



Antes de terminar, una propuesta. Hemos estudiado los planos-límites de los cinco poliedros platónicos y en sus relaciones duales nos aparecen cuatro de los arquimedianos, en total nueve poliedros, pero faltan varios más. Dejo en el aire su respuesta para aquellos a los que estas páginas les hayan ofrecido un mayor interés.

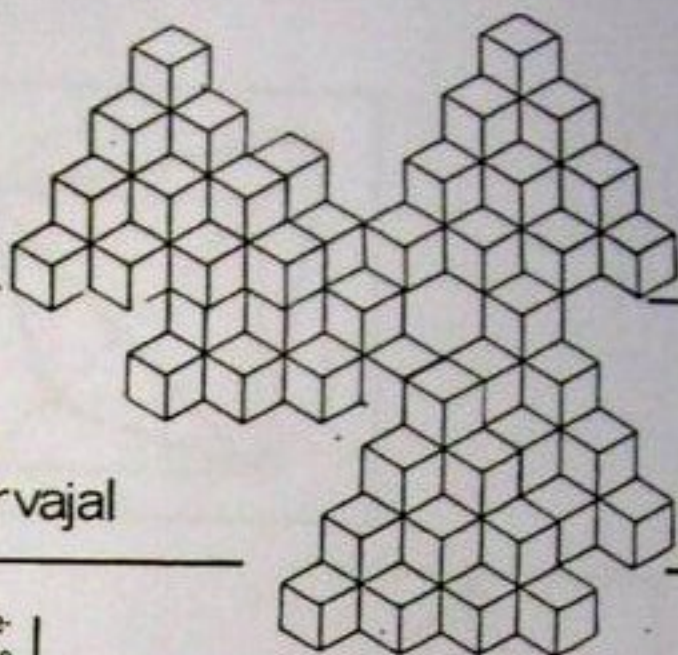


CAP. V.

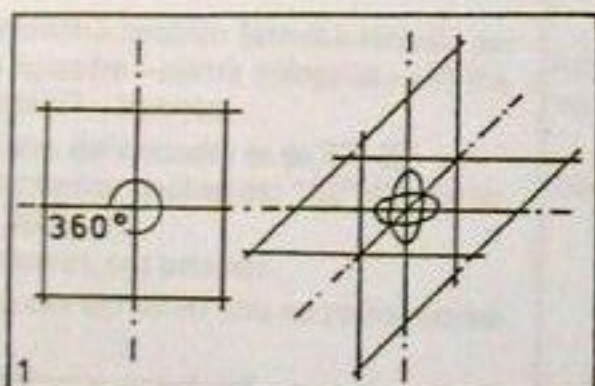
RETÍCULAS

RETICULAS

Javier Carvajal



La condición ineludible para la formación de una red, ha de ser que la suma de todos los ángulos que convergen en un punto, sea de 360° . Esta condición, en una red plana, se cumplirá en el espacio bidimensional cuando la suma de los ángulos de los polígonos así lo hagan. Y en una red espacial, cuando cumplan esa condición, la suma de los ángulos diedros de los poliedros en el espacio tridimensional.



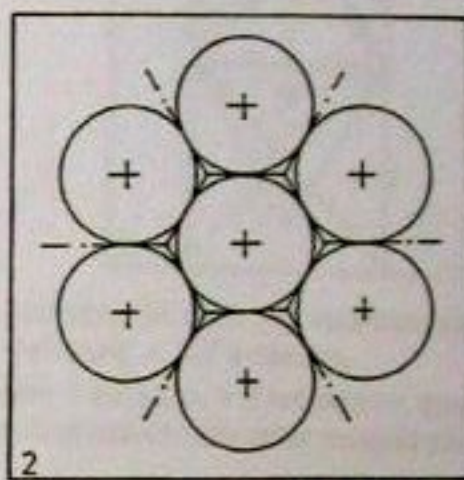
A partir de esta premisa tan sencilla veremos cómo el problema puede complicarse hasta límites imposibles de imaginar, sino en objeto de un estudio muy detallado, como es el caso de las retículas espaciales que incluso ni mediante su dibujo en el plano llegan a ser reconocibles, necesitando de su paciente construcción para poder llegar a reconocerlas.

RETICULAS PLANAS:

De las retículas regulares planas, la exagonal —exágonos regulares (120°)— es la que cumple esa condición con más economía de medios pues sólo necesita de tres polígonos iguales para su formación. Este tipo de simetría exagonal, precisamente por su aventajada economía, la encontramos frecuentemente en la naturaleza, como bien nos explica D'arcy Thopson en su maravilloso libro: "Sobre el crecimiento y la forma". Y no es más que la acumulación de cilindros o esferas, que presionados uniformemente por su propio crecimiento o presiones externas, los puntos de tangencia de las circunferencias se convertirán en líneas de contacto, lados del exágono. (Fig. 2).

La red cuadrada necesitará cuatro polígonos (90°) y a diferencia de las abejas, es la simetría elegida por el hombre para el diseño de sus hábitáculos.

La red triangular —triángulos equiláteros (60°)— necesitará seis.

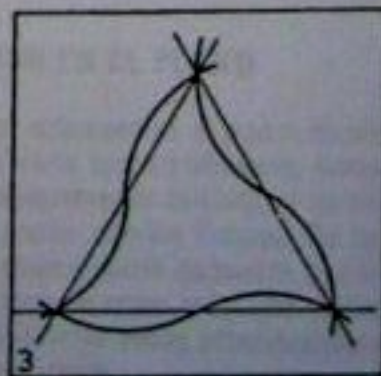


Otras retículas que podamos formar serán combinaciones de dos o más polígonos que cumplan la condición de sumar los 360° :

- Un exágono, dos cuadrados y un triángulo equilátero: $120^\circ-180^\circ-60^\circ$.
- Dos exágonos y dos triángulos: $240^\circ-120^\circ$.
- Dos cuadrados y tres triángulos: $180^\circ-180^\circ$.
- Dos dodecágonos y un triángulo: $300^\circ-60^\circ$.
- Un dodecágono, un exágono y un cuadrado: $150^\circ-120^\circ-90^\circ$.

... Y haciendo más combinaciones posibles nos encontramos con una muy particular; dos pentágonos y un decágono: $216^\circ-144^\circ$. Cumplen la condición principal, pero ¿formarán red ellos solos?... Si prueban a construirla aparecerá una curiosa simetría radial que hacia afuera va haciéndose infinitamente grande y hacia dentro infinitamente pequeña.

Ahora utilicemos polígonos semirregulares. Las combinaciones irán aumentando hasta llegar a infinitas posibilidades, si utilizamos la fórmula de Rafael Leoz en su definición de módulo plano, que será aquella figura "equisuperficial" al polígono del que surja.



Si el polígono maciza el plano, el módulo resultante también lo macizará. ¿Qué otra cosa hizo Escher sino la aplicación de esta fórmula para sus "Baldosamientos" de ángeles y demonios? El proceso, pues, sería: polígono regular—módulo plano (Leoz)—ángel o demonio (Escher). La fórmula modular que Leoz empleó para sus soluciones arquitectónicas, Escher lo hizo para divertirse con sus dibujos.

RETICULAS ESPACIALES:

Por supuesto que cada una de estas retículas planas podemos proyectarlas en el espacio, rellenándolo igualmente, pero serán de muy poco interés, pues tendrán todas formas de prismas, de base la figura plana. El proceso es el mismo para todas: la proyección ortogonal del polígono o módulo base.

El problema complejo se nos presenta cuando la macización del espacio lo planteamos con poliedros, regulares o no, cuyas caras son inclinadas; sus ángulos diedros no son de 90° .

En este último caso es fácil imaginar que al igual que el cuadrado rellenaba el plano, el cubo macizará el espacio.

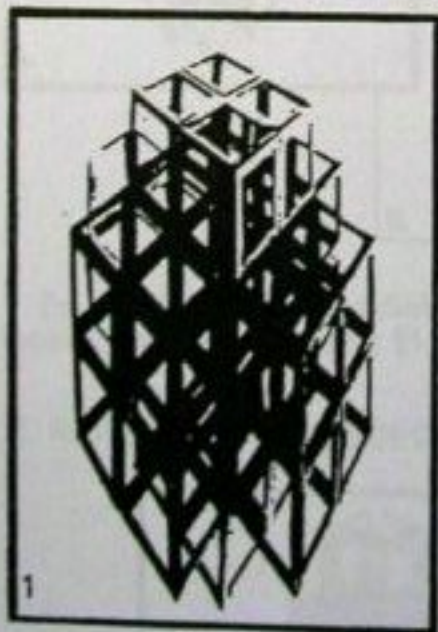
El triángulo equilátero también formaba retícula por sí mismo, pero el tetraedro—cuatro triángulos—¿formará una retícula espacial?... Veamos:

- El ángulo diedro del tetraedro es de $70^\circ 32'$.
- Con cinco tetraedros tendremos: $352^\circ 40'$. No llegamos a los 360° .
- Con seis tetraedros, nos pasamos.

Queda claro que con tetraedros sólo no podremos macizar el espacio.

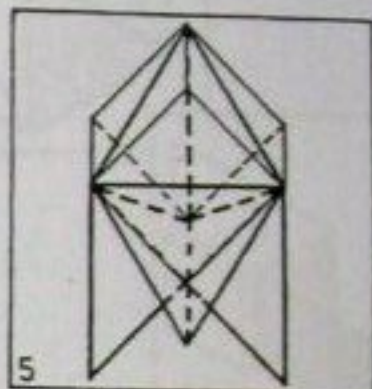
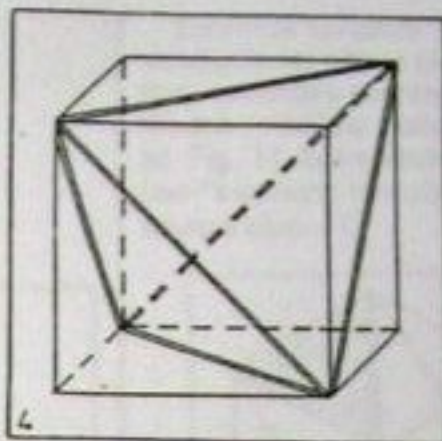
Pero, ¿con tetraedros y octaedros?...

1. RETICULA ROMBOEXAEDRICA (Foto 1)



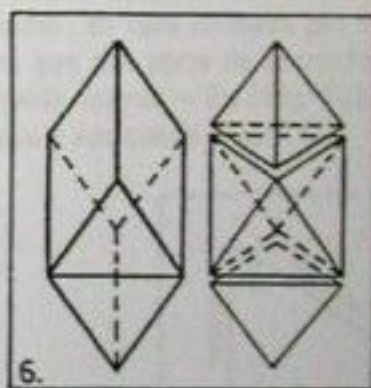
Si un cubo lo seccionamos por las diagonales de tres de sus caras adyacentes a un vértice, la sección será un triángulo equilátero. Y si esta operación la repetimos cuatro veces, obtenemos fácilmente la construcción del tetraedro inscrito en el cubo, de lado igual a la diagonal de la cara.

Pero fijémonos en los trozos de cubos que nos han sobrado: son cuatro pirámides triangulares que juntas



conformarán medio octaedro. Es decir: el volumen de un cubo será igual a 1 tetraedro + $1/2$ octaedro.

Con dos cubos tendré 1 octaedro + 2 tetraedros, que unidos formarán el rombohexaedro: seis caras rombos pa-



ralelas dos a dos y de lado igual a la diagonal de la cara del cubo que partió.

Cada cara, es la suma de dos triángulos equiláteros en el mismo plano: uno perteneciente al tetraedro y el otro al octaedro; debido principalmente a la suma de los ángulos diedros de estos dos sólidos que es de 180° :

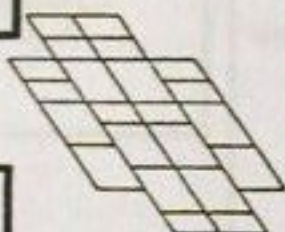
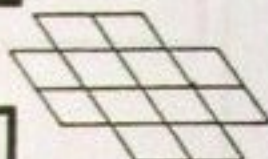
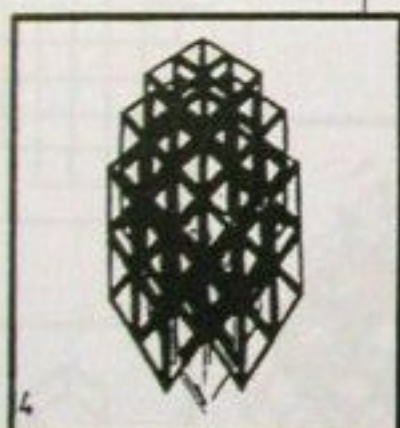
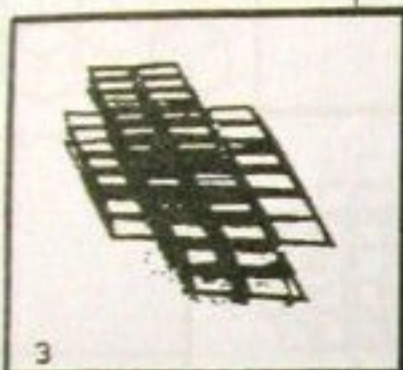
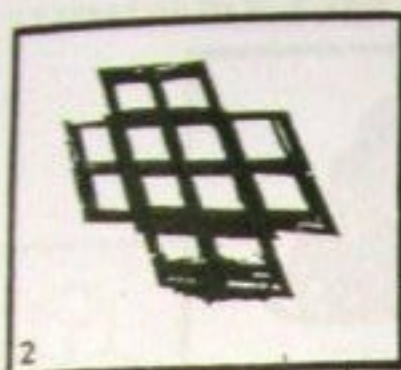
Ángulo diedro tetraedro = $70^\circ 32'$.

Ángulo diedro octaedro = $109^\circ 28'$.

Dos rombohexaedros cumplirán la función primaria de las retículas (360°) y ésta entonces será posible.

VISTAS Y SU EXPRESION EN EL PLANO

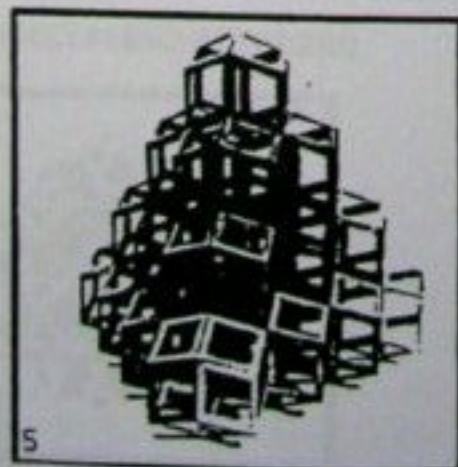
En toda retícula según coloquemos el punto de vista, su expresión en el plano varía sustancialmente, hasta el punto de parecernos completamente distinta, si no tenemos una cierta familiarización con las formas. De igual manera que un cubo podemos situarlo de suerte que sólo veamos 1 cara, 2 ó 3, nunca veremos más; una retícula espacial también tendrá distintas vistas ofreciéndose en el plano con figuraciones varias.



9.

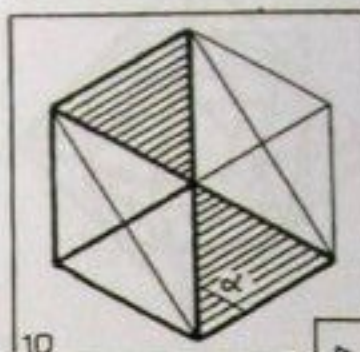
En la retícula no están definidos los tetraedros y octaedros, sino la suma de ellos: El romboexaedro.

2. RETICULA ROMBODECAEDRICA

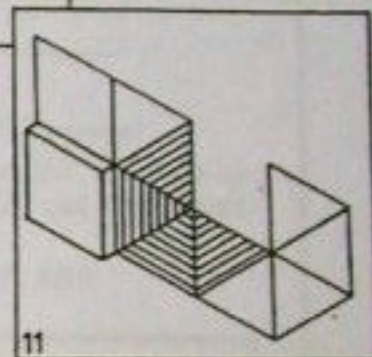


5

Seguimos cortando cubos; esta vez por sus secciones rectangulares: planos que pasan por las diagonales de dos caras opuestas y perpendiculares a ellas: Fig. 10. Resultarán seis pirámides cuadrangulares de base igual a cada cara: Fig. 11. Submódulo de la división ternaria del cubo (ver "secciones modulares del cubo". Cuadernos de Pedagogía núm. 77).

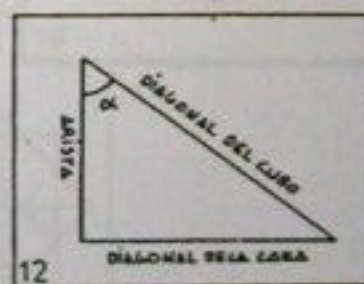


10



11

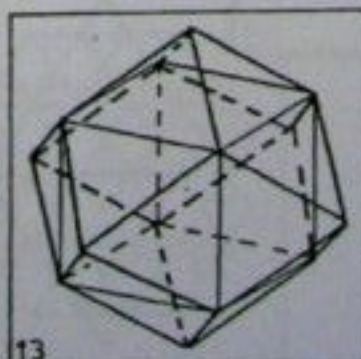
Si con estas pirámides envolvemos a otro cubo igual haciendo coincidir sus caras no aparece el romboexaedro: su cara formada por dos triángulos de las pirámides que son parte de la sección rectangular: Fig. 10 y de ángulo mayor = 2α (Fig. 12). Su volumen será también igual a dos cubos (Fig. 11).



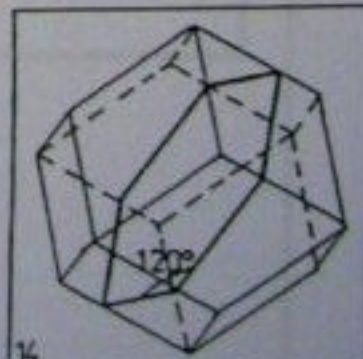
12

Y la relación con él será (Fig. 13):

- Lado del rombo = $1/2$ diagonal del cubo.
- Eje mayor = diagonal de la cara.
- Eje menor = arista.
- Angulo mayor = $109^\circ 28' = 2\alpha$.
- Angulo menor = $70^\circ 32'$.
- Angulo diedro = 120° ángulo de su secc. exagonal. (Fig. 14).

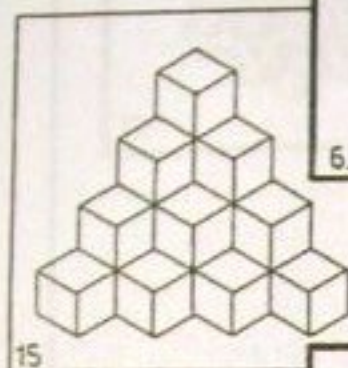


13

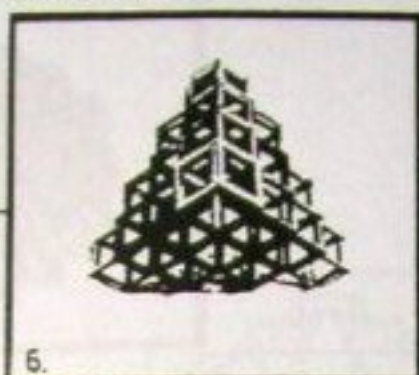


14

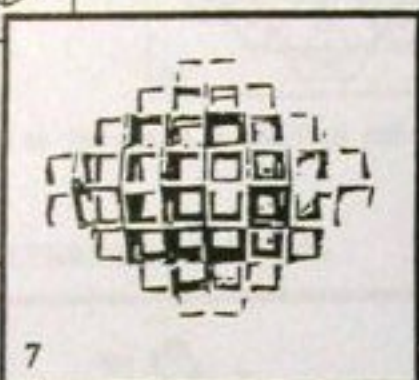
VISTAS Y EXPRESION EN EL PLANO



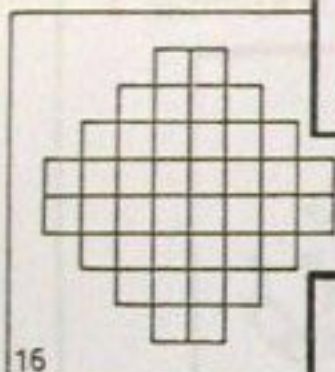
15



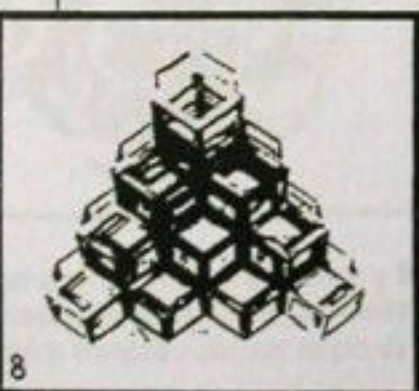
6.



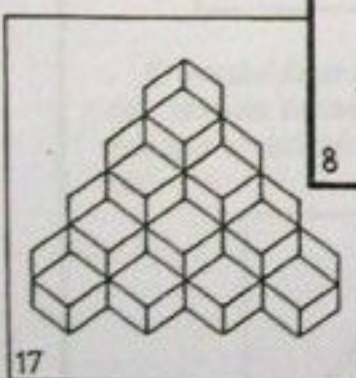
7



16



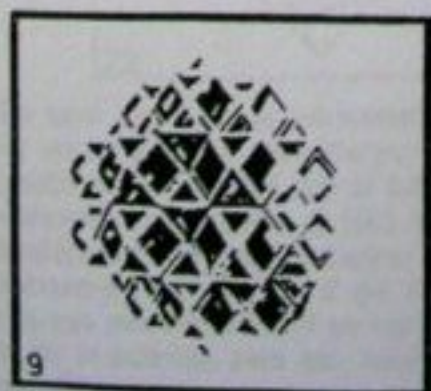
8



17

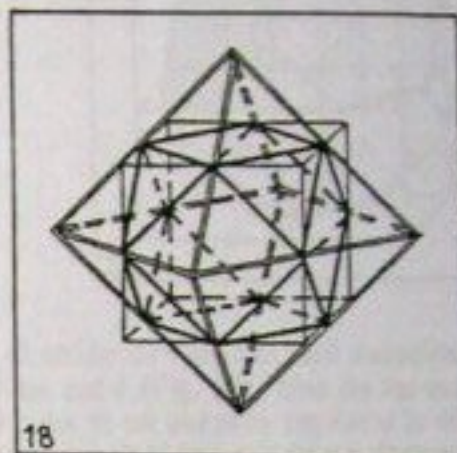
Es curiosa la representación de dos de ellas al coincidirnos con la misma expresión de una retícula cúbica.

3. RETICULA CUBOCTAEDRO-OCTAEDRO



9

El cuboctaedro —seis cuadrados y ocho triángulos— o cubo truncado por la mitad de sus aristas, resulta ser el poliedro intersección en la dualidad cubo-octaedro (figura 18): Su ángulo diedro = $125^{\circ} 16'$.

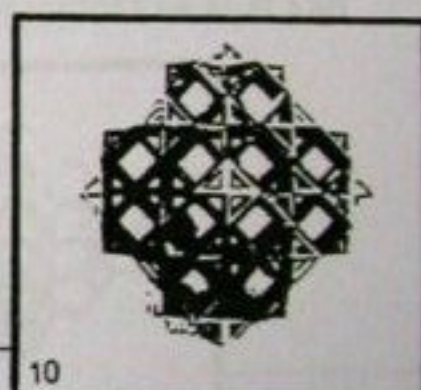


18

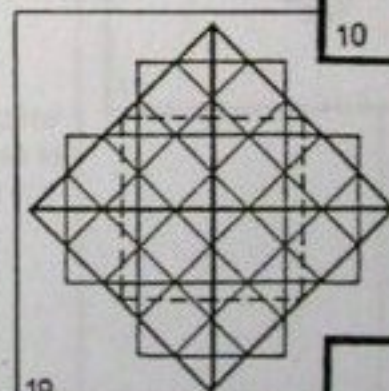
Para la formación de la retícula utilizaremos:

Dos cuboctaedros: $(125^{\circ} 16') \cdot 2 = 250^{\circ} 32'$ y un octaedro: $109^{\circ} 28'$. La suma son los 360° que necesitamos.

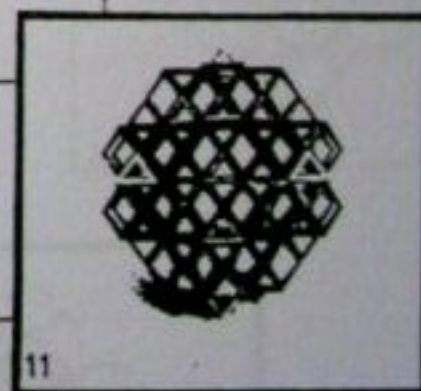
VISTAS Y SU EXPRESION EN EL PLANO



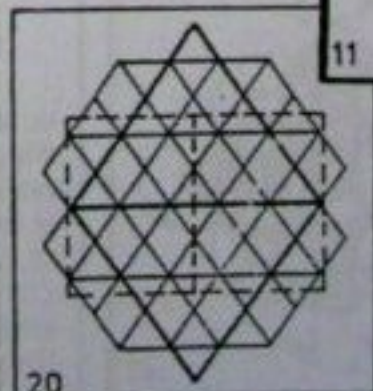
10



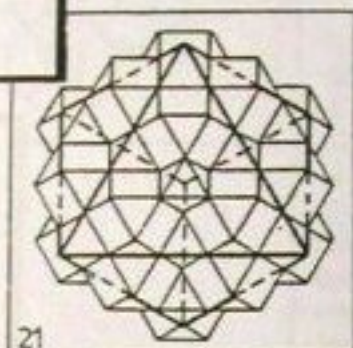
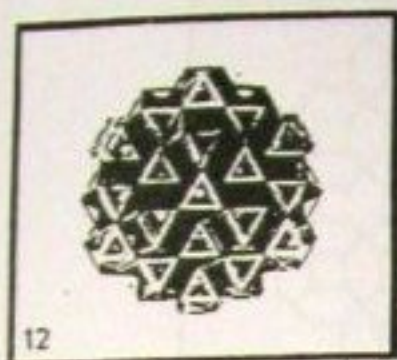
19



11

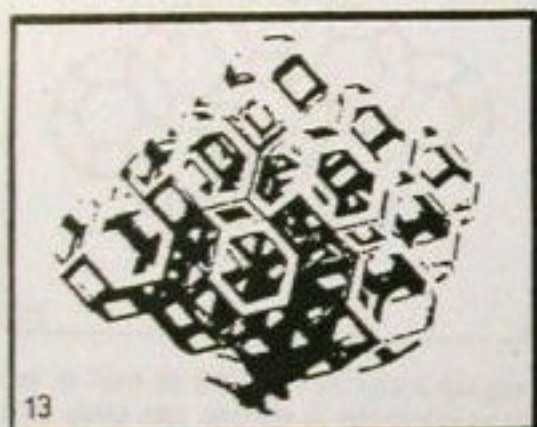


20

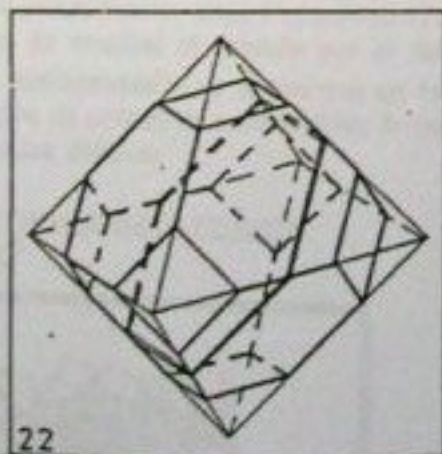


En la retícula se demuestra la dualidad cubo-octaedro.

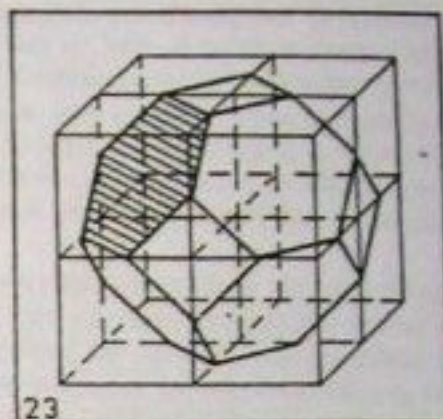
4. RETÍCULA TETRAKAIDECAEDRICA



El tetrakaidecaedro, 14 caras: 8 exágonos y 6 cuadrados, también llamado sólido de Kelvin, en realidad no es más que un octaedro truncado por un tercio de sus aristas:



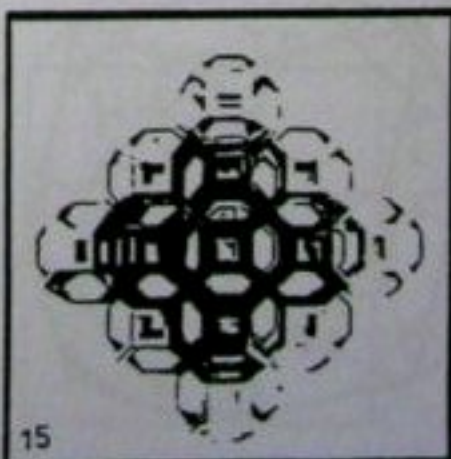
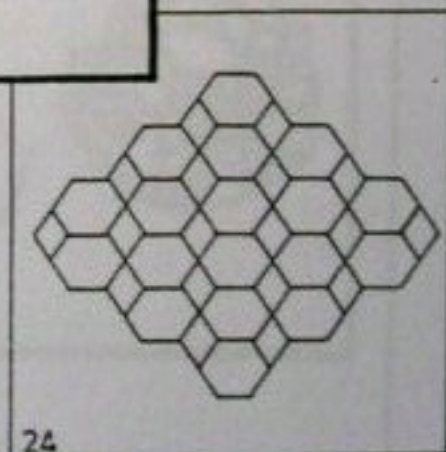
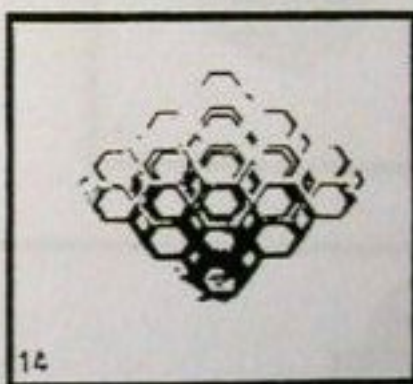
De igual modo que el cuboctaedro de la retícula anterior era un octaedro truncado por la mitad de sus aristas, debido a su dualidad con el cubo, como los planos que truncan son paralelos, es fácil deducir que en el tetrakaidecaedro sus ángulos diedros serán iguales al del cuboctaedro ($125^{\circ} 16'$) y al del octaedro ($109^{\circ} 28'$). Por lo que esta retícula será en realidad, una simplificación de la anterior, pero con resultados visuales totalmente diferentes.

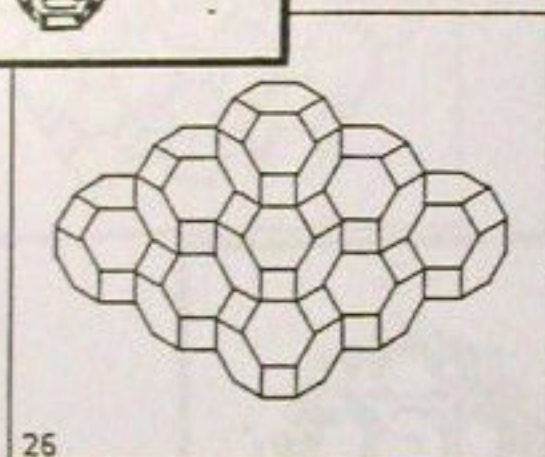
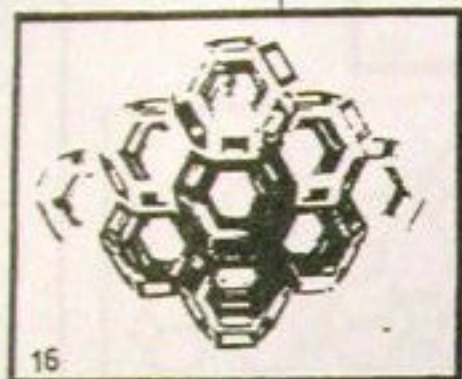
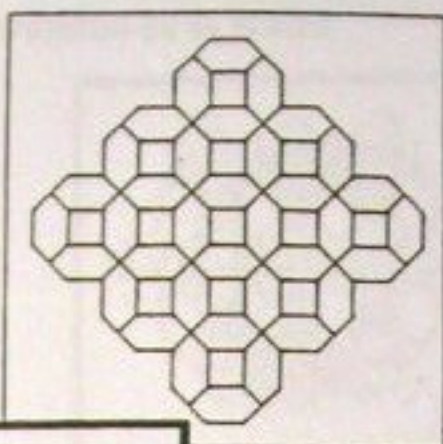


El sólido de Kelvin es fácil deducirlo también partiendo del cubo (Fig. 23). Una de las secciones modulares del cubo es un exágono regular y lo divide en dos partes iguales, seccionando seis de sus doce aristas por su punto medio. Si subdividimos un cubo grande en ocho cubitos y de cada uno buscamos su sección exagonal correspondiente se nos aparecerá el referido sólido.

Su volumen será igual a medio cubo grande de lado igual a un cuarto de la diagonal de la cara del cubo.

VISTAS Y EXPRESIONES EN EL PLANO



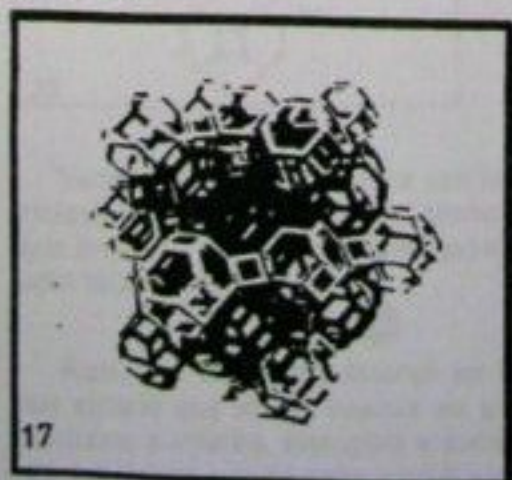


Vuelvo a citar el libro de D'Arcy Thompson porque en él nos habla de cómo esta retícula se encuentra en la naturaleza también, conformando las células del parénquima vegetal. La retícula rombododecaédrica era la escogida por las abejas para la formación de las celdillas de sus abejas y la retícula cúbica la escogida por el hombre como decía al principio.

Es curioso cómo precisamente estos tres poliedros son los únicos capaces de macizar el espacio por sí solos.

En el caso del rombohexaedro ya vimos que en realidad es la acumulación de octaedros y tetraedros, formando una especie de cubo oblicuo.

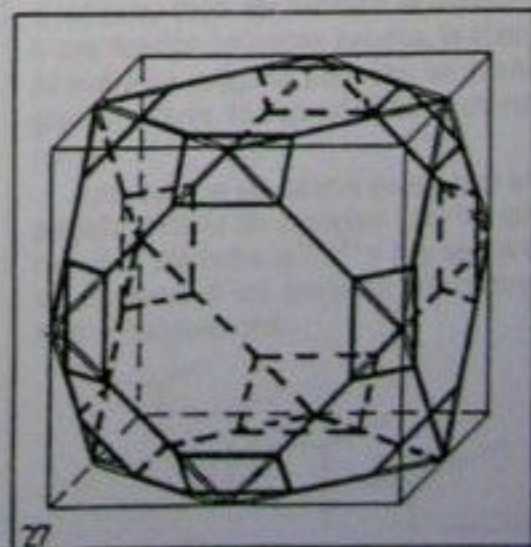
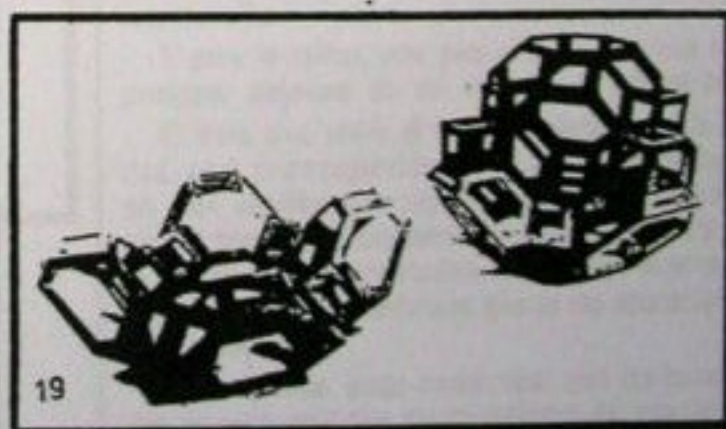
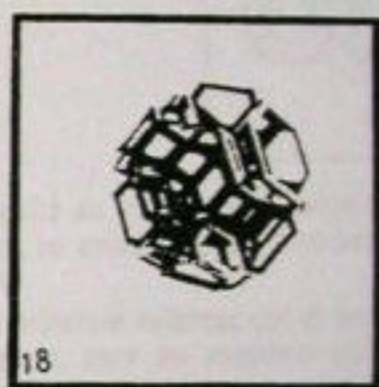
5. RETÍCULA TETRAKAIDECAEDRICA EXPANDIDA. L^3



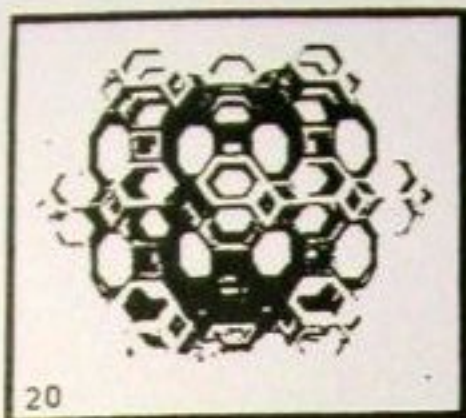
¿Podemos imaginar qué sucederá si la retícula anterior la expandimos su lado al cubo; es decir si en cada cara cuadrada introducimos un cubo de arista igual?

He de confesar que cuando me propuse este problema, sabía que su resultado era posible; la formación de una nueva retícula, pero me era muy difícil averiguar cuál era el nuevo poliedro que entraba en su composición.

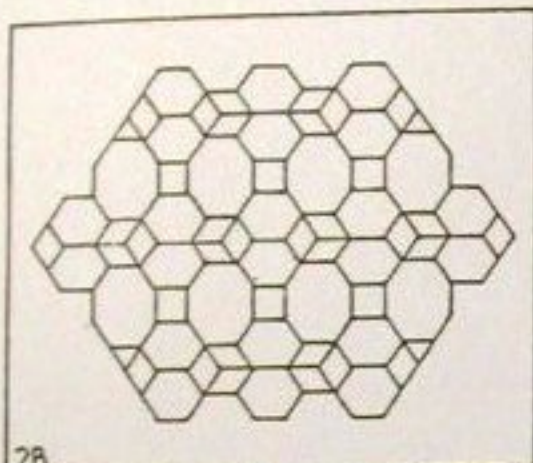
Seguí el proceso de descomponer un trozo de retícula, cortando los ocho tetrakaidecaedros que rodean totalmente a uno de ellos, por sus secciones exagonales (figura 22). Introduje los cubos correspondientes a su expansión (fotos 18, 19) y la solución me vino dada automáticamente: el gran rombicuboctaedro —6 octógonos, 8 exágonos y 12 cuadrados. Es decir un truncamiento del cuboctaedro: fig. 27 y el nuevo ángulo diedro que nos aparece es de $(144^\circ 44')$, que sumados al del tetrakaidecaedro $(125^\circ 16')$ y al del cubo (90°) son 360° que conforman una nueva retícula.



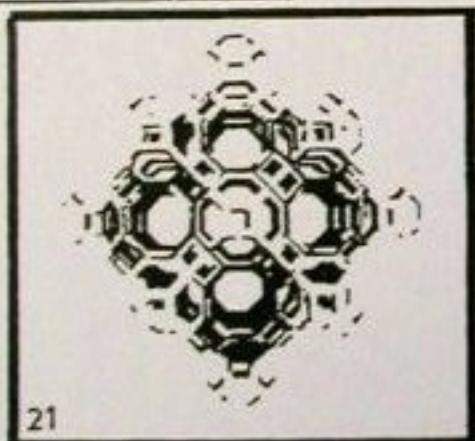
VISTAS Y EXPRESION EN EL PLANO



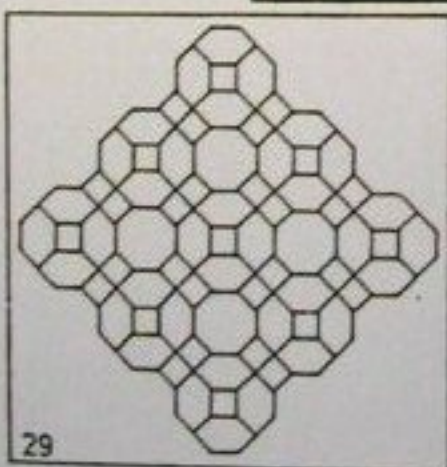
20



28



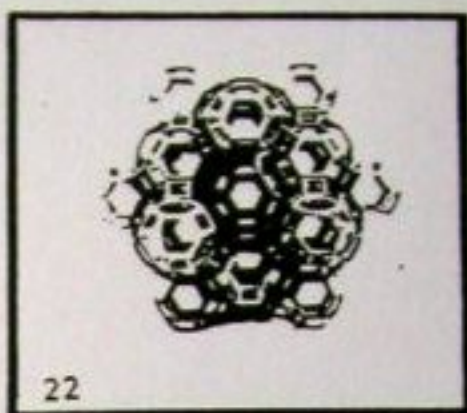
21



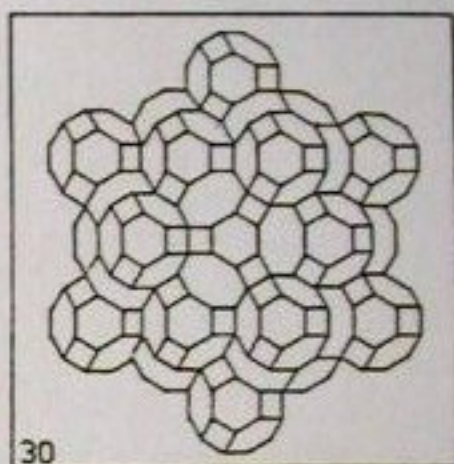
29

Vemos una cierta semejanza con las expresiones de la retícula anterior pero en esta aparecen los octógonos, que provocan que sus soluciones geométricas en el plano sean totalmente distintas.

Aquí, por ahora, me detengo en mi afán de atrapar ese espacio que se nos aparece en principio como algo abstracto e infinito, intangible e invisible y sin embargo de qué manera nos envuelve y en él vivimos.



22



30

Seguiré en mi intento y propongo a quien quiera seguir en su estudio, algún otro camino que ahora se me ocurre.

Al principio veíamos que el tetraedro no macizaba en el espacio, pero me pregunto —¿El tetraedro truncado, lo hará?...

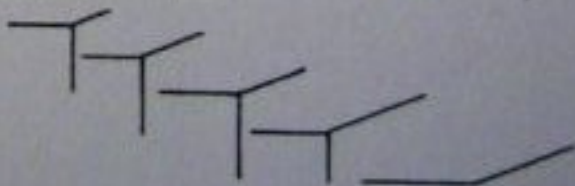
Y ¿qué puede suceder con la dualidad dodecaedro-icosaedro?...

Y para terminar, una pequeña historia que resume el principal objetivo de mi trabajo: la educación visual.

El otro día, entre el caos circulatorio de la gran ciudad, tuvo unos segundos para fijar mi vista en la carga de un gran camión que repentinamente me llamó la atención. Llevaba sobresaliendo de su caja una serie de haces de hierro muy largos atados. No era esto lo sorprendente sino las formas geométricas que se me aparecían: exágonos y cuadrados.

Al acercarme pude comprobar que los haces cuadrados no eran más que acumulaciones de larguísima prismas huecos cuadrados y rectangulares y los exágonos las mismas aglomeraciones de finos y largos cilindros. Efectivamente, todo ese montón de tubitos de hierro, sujetos a una tensión uniforme externa, la atadura, su perímetro formaba un exágono perfecto; un tubito más haría peligrar en teoría, la seguridad de la atadura y la del transporte.

Ante esto se me ocurre pensar que un matemático enseguida trataría de averiguar cuántos tubitos hay en cada haz; si su diámetro es "X" y hay tantas filitas en la altura del exágono. A mí me bastó con la sorpresa que me produjo el haberlo visto.



CAP. VI

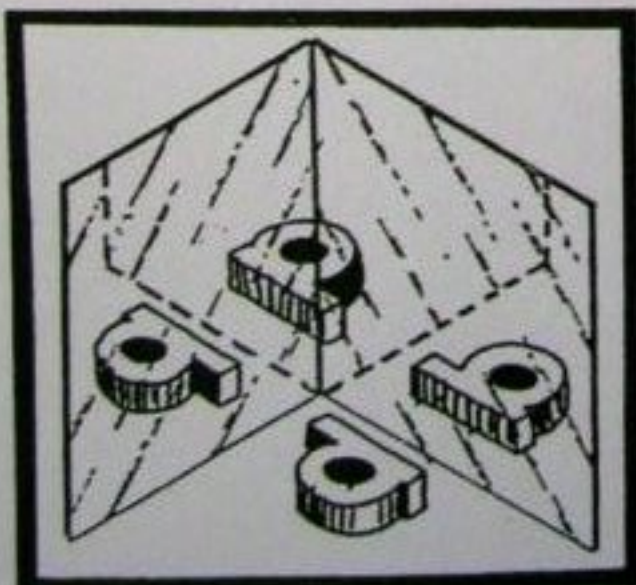
IMÁGENES PALÍNDROMAS Y OTRAS SIMETRÍAS

IMÁGENES PALÍNDROMAS Y OTRAS SIMETRÍAS

Un palíndromo, dice el diccionario, es una palabra o frase que se lee igual de derecha a izquierda que en sentido inverso, lo que en términos visuales no es más que una simetría bilateral con una letra o espacio que cumple la función de eje de simetría. Esto sucede en todos los códigos de escritura de lectura horizontal, no será así en la escritura oriental que se realiza de arriba-abajo, por lo que en este caso la simetría podríamos llamarla más propiamente *inversión*, es decir cuando el espejo como eje de simetría, lo colocamos bajo nuestros pies.

Esto viene a cuenta por que a la hora de hablar de imágenes palíndromas tenemos que tener en cuenta que, así como la lectura de textos es una lectura lineal, horizontal o vertical pero siempre unidimensional, la imagen puede tener la lectura del plano bidimensional: derecha-izquierda y arriba-abajo simultáneamente.

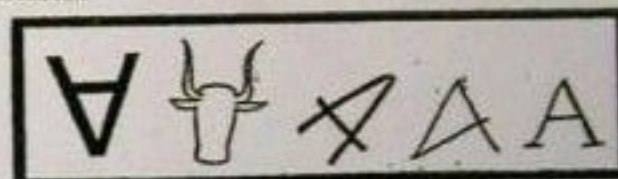
Antes de entrar en este tema y otros, quisiera hacer una reflexión sobre el signo gráfico que representan las letras, no desde el punto de vista de sonido articulado que generan las palabras sino desde el de su iconografía. Y nos encontramos a la hora de mirar detenidamente el abecedario, que una serie de letras tienen simetría bilateral (palíndroma), otras pueden invertirse y algunas resisten inmutables los dos movimientos simultáneos. Otras por el contrario no soportan el menor ajeteo. No será fácil realizar este ejercicio visual si no nos ayudamos de un espejo. En el caso de las letras minúsculas el resultado puede ser diferente y hasta extremo en algún caso; como en la *d*, que en el libro de espejos abierto 90° puede convertirse en *p*, *q* o *b*.



Muy singular es el caso de la *W* que en su inversión se convierte en *M* lo que da lugar al logotipo palíndromo de una conocida marca comercial,



si conseguimos hacer la inversión mental e inconscientemente. Mucho más singular, ingenioso y divertido sin duda, es lo que hace Joan Brossa al decir que una *A* invertida es una vaca con cuernos. Visualmente la imagen es perfecta además que la *A* contiene a la *V* y es la única vocal que repetidamente aparece en la palabra vaca. Aparte la broma de Brossa, el juego no deja de tener su base científica, pues la *Apis* egipcia era una cabeza de vaca, que fue transformándose en la *Alef* fenicia, la *Alfa* griega y la *A* romana.



Por último, antes de dejar de hablar de las letras, quiero dedicar este palíndromo-caligrama a la doctora (oftalmóloga, por supuesto) Patrocinio Falomir, que trabaja: OJO A OJO.



Las gafas son el espejo donde se miran los ojos. Y ya estamos en la gregoria...

Imágenes palíndromas podríamos encontrarlas fácilmente en Paul Klee, Vassarely, en muchos de los pintores abstractos geométricos y como no, en los mosaicos árabes, pero de entre todas me quedo con las de Escher. Pues sabe compaginar excelentemente la lógica con el absurdo, lo congruente con lo inverosímil, haciendo simetrías de los contrarios, hace uno de lo dual y congratula la verdad y la mentira.

Diría que todas las dicotomías simétricas están en sus dibujos: arriba-abajo, derecha-izquierda, delante-detrás, dentro-fuera, fondo-forma, cóncavo-convexo, vacío-leno, día-noche, blanco-negro, finito-infinito, grande-pequeño, todo-parte, plano-espacio, posible-imposible, lógica-absurdo, principio-fin, fantasía-realidad, verdadero-falso, bien-mal, etc.

Simetría bilateral: en el grabado *día y noche*,



vemos a primera vista desde una perspectiva aérea, cómo una bandada de patos volando en sentido contrario atraviesan un mismo paisaje. Formalmente es una perfecta imagen palíndroma bilateral. El eje de simetría está camuflado en una línea ondulante; límite de las alas de los patos centrales blancos y negros hasta el punto de confluencia de los dos caminos de la parte inferior. No es palíndromo en su sentido inverso pues leído verticalmente, los campos de paisaje se convierten en patos. Presenta en su lectura horizontal, un doble juego de dos contrarios: fondo y forma, blanco y negro; de modo que el paisaje de día con patos negros se transforma en paisaje de noche con patos blancos. Su palíndromo es el contrario: paisaje de noche con patos blancos en paisaje de día con patos negros.

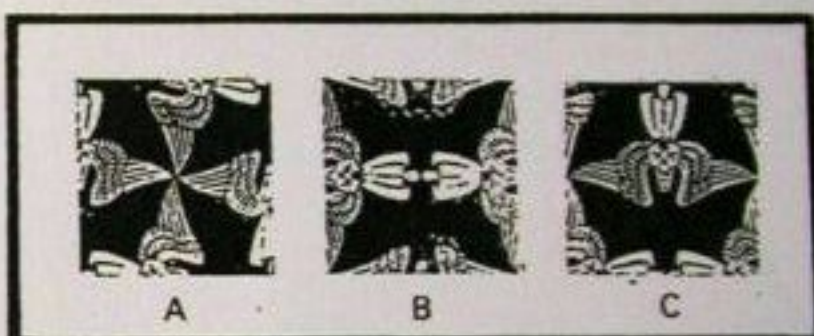
Simetría e inversión: decía Magritte que *si se tienen dos ideas incongruentes se ha de buscar la forma de reconciliarlas*. No es casual la cita de Magritte pues su obra y la de Escher tienen mucho en común, pues los dos se aprovechan del engaño de nuestra vista al trabajar en el plano mentiroso. Y ¿qué mayor reconciliación puede existir que esa perfecta simbiosis de ángeles y demonios?



Es un claro ejemplo de imagen palíndroma en dos dimensiones pero el problema formal puede ser tanto o más complejo que el problema teológico. Consigue a partir de una retícula cuadrada que una pareja de ángeles y otra de demonios convivan en perfecta armonía en la celda de un sólo cuadrado de la retícula cumpliendo la definición de módulo plano descrita por Rafael Leoz que dice: *el módulo encajable consigo mismo será equisuperficial al polígono del que se parte*.

Veamos: por los ejes de simetría de todos los ángeles y demonios podemos trazar unas líneas horizontales y otras verticales que conformaran una retícula cuadrada.

El centro de estos cuadrados será el punto de contacto de todas las alas, formando una



celdilla (A), donde cuatro medios-demonios se alternan en giros de 45° con otros cuatro medios-ángeles en una perfecta formación y concordia. Pero si la retícula la desplazamos de manera que sus intersecciones pasen por la confluencia de las alas, el centro de la celdilla cuadrada será el punto de contacto de los pies angelicales (B) y en ella aparecerán: dos demonios prácticamente enteros (faltan sólo las puntas de las orejas) y dos ángeles bastante deteriorados. En el caso de la tercera celdilla (C), las perpendiculares de la retícula pasan por lo que antes fueron sus centros, mostrándonos: un ángel y un demonio enteros, dos medios-demonios y el segundo ángel hecho añicos, lo que demuestra también el problema teológico de que el camino de la perfección (ángeles) es mucho más complejo y difícil de alcanzar, que resistir a la tentación (demonios) que siempre se nos presenta más entera y asequible.

Simetría radial: la más compleja de las simetrías y límite de las otras dos como lo es la circunferencia de todos los polígonos. Sus infinitos ejes serán las diagonales de entre las dos coordenadas al modo de los radios de una rueda. Nuevamente la elección del dibujo de Escher no es fácil pues hubiese valido cualquiera en los que nos presenta ejemplos de soluciones infinitas en el plano finito.

En peces y escamas



62. Peces y escamas, grabado en madera, 1959

venimos como dos peces grandes palíndromos, están cubiertos de escamas que progresivamente van convirtiéndose en peces cada vez más grandes hasta conformar todos ellos de nuevo el pez grande, cubierto de escamas que progresivamente... el cuento de nunca acabar. O, ¿podríamos llegar a decir que la parte es igual al todo...? Magritte hace también una alusión clara al tema, en un cuadro donde pinta un árbol en un vasto paisaje, que no es más que una sola hoja, sostenida verticalmente sobre su peciolo a modo de tronco del árbol.

Volviendo nuevamente a los peces podemos comprobar que desde cualquier punto del límite del dibujo donde confluyan lo blanco y lo negro, podremos trazar una línea ondulante y palíndroma hasta el extremo opuesto. Todas ellas se cruzarán en el punto de contacto de las colas de los dos peces blancos centrales.

...Y a propósito de otros palíndromos y como de momento aquí nadie lo va a hacer quiero mencionar dos claros casos de lecturas *palíndromas musicales*, lo que en teoría del contrapunto se llama movimiento *cancrizante* o *canon del cangrejo*, que sabido es que cuando quiere ir para adelante anda para atrás.

El primero es de Bach, de su *Ofranda Musical*,



serie de variaciones sobre un tema que el rey Federico de Prusia escribió a petición del maestro y que este armonizó y transcribió después de haberlas interpretado improvisadamente delante suyo. Es un canon a dos voces cuya primera voz que dura 9 compases es fielmente el tema del rey (Do-Mi-Sol-La-Si...). La segunda voz es una variación del tema (Do-Mi-Sol-Do-Si...) pero a partir del compás décimo el tema del rey pasa a la segunda voz interpretado al revés, de atrás para adelante (Mi-Do-Re-Mi...), y lo mismo sucede con la variación de Bach, pasando a la primera voz y leído a la inversa (Sol-Fa-Sol-Do...). Está claro que la barra que separa el noveno y décimo compás es el eje de simetría de este perfecto palíndromo musical.

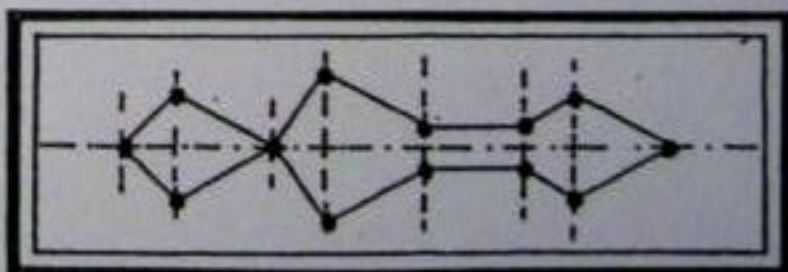
Es segundo caso es de Mozart,

CANON INVERSUS

Wolfgang Amadeus Mozart

CANON INVERSUS

y aunque lo titule *Canon Inversus*, no es propiamente una inversión. En el contrapunto Barroco se llama inversión, cuando la distancia interválica de una melodía es del mismo valor que la otra pero a la inversa, al modo de una inversión plástica.



Pero en el caso que nos ocupa, los únicos invertidos o digamos mejor inversos, son los dos violinistas colocados frente a frente y que ejecutan una misma melodía de una misma partitura colocada horizontalmente sobre un único atril. De modo que para uno, el principio es el final de su acompañante y a la inversa. La melodía en sí no es palíndroma, pero sí lo es la *suma* de los sonidos interpretados conjuntamente y en tal disposición. El eje de simetría estará entre el compás 29 y 30, al final del séptimo pentagrama y principio del octavo, cuando el primer violín comienza a interpretar la serie de semicorcheas que es el momento exacto en que el segundo violín ha dejado de hacerlo.

Por último prometo, que si antes del día veinte del mes de febrero del año dos mil dos: 20/02/2002, alguien con más conocimiento del tema que yo, no lo ha hecho, hablaré en estas mismas páginas de los números y sucesiones capicúas (palíndromas). Espero para entonces estar suficientemente ilustrado.

BIBLIOGRAFÍA

- Locher, J.L.: *The World of M. C. Escher*. Ed. Abrams.
 Ernst, Bruno: *El espejo mágico de M.S. Escher*. Ed. Taco.
 Foucault, Michael: *Esto no es una pipa*. Ed. Anagrama.
 Hofstadter, D.R.: *Gödel, Escher, Bach*. Ed. Tusquets.
 Rubert de Ventos, Xavier: *Teoría de la sensibilidad*. Ed. Península.
 Copland, Aaron: *Como escuchar la música*. Ed. Fondo de Cultura Económico.
 Pousseur, Henry: *Música, semántica, sociedad*. Ed. Alianza Música.
 Joan Brossa, *prestidigitador de la paraula*. Video.

Javier Carvajal
 (Universidad de Valencia)

CAP. VII

EL SIGNO GRÁFICO

EL SIGNO GRÁFICO

EL GRAFISMO LITERAL, NUMÉRICO Y MUSICAL

Para que las palabras no se las llevara el viento, se inventó el código de la escritura. Para que la música no nos entrara por un oído y saliera por el otro, se inventó la notación musical. Y para no llevar el bolsillo lleno de piedrecitas —cálculus en latín— se inventaron los números.

Escritura literal, musical y numérica, se realiza actualmente mediante signos gráficos —código plástico visual— elementales, pero no siempre fue así. Llegado un momento de la cultura de la humanidad, el hombre necesitó dejar plasmado de algún modo sus distintos lenguajes expresivos:

- Plástico —Prehistoria: dibujos.
- Literario —Egipto y Mesopotamia: jeroglíficos y cuneiforme.
- Numérico —Siglo IX, Arabes orientales: guarismos.
- Musical —Siglo VIII-XII: neumas, antifonarios mozárabes.

Los hombres del Paleolítico necesitaron dibujar animales para contar sus experiencias cinegéticas. En el Neolítico estos dibujos se esquematizan siguiendo un proceso de simplificación del grafismo, que será común a todos los lenguajes escritos. Se ha establecido que la Historia comienza con la escritura. Cuando ese dibujo esquemático ya no tiene el significado de toda la palabra que representa, sino que es sólo la primera letra con la que construir palabras con significado distinto a las imágenes allí representadas. En una nueva esquematización a lo largo de las distintas culturas, llegamos a establecer los signos del alfabeto romano, el utilizado hoy día en el mundo occidental.

Égypte Chypre	Phénicien	Grec	Étrusque	Latin

Cuando Joan Brossa nos dice que: "Una A invertida es una vaca con cuernos"; aparte de hacer un homenaje a Don Ramón y sus greguerías, nos da una concisa lección de cómo ha evolucionado el código de la escritura, pues la *Apis* egipcia era una cabeza de vaca.

Pero la opinión que más me interesa resaltar en este momento y en la que participo, dentro de la línea investigadora del departamento sobre el signo gráfico, es la parte geométrica que está contenida en los distintos lenguajes de la expresión.

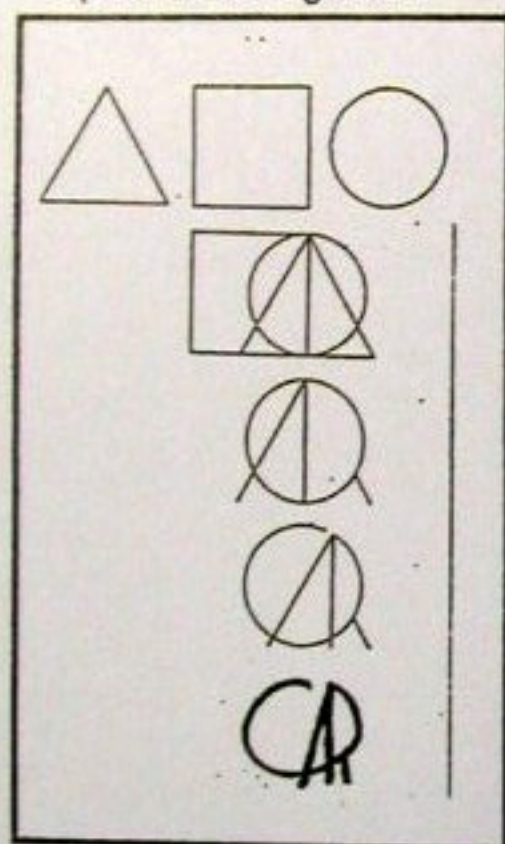
Los elementos gráficos que intervienen en la ejecución de letras, números y notación musical, son los más elementales y básicos de la geometría bidimensional, y no podría ser de otra manera después del proceso de depuración formal sufrida a lo largo de siglos y milenios.

- Puntos: pequeños o grandes, éstos últimos pueden no estar cegados a modo de circunferencias pequeñas.
- Líneas:
 - a) rectas: verticales, horizontales y oblicuas. Todas ellas también pueden ser más largas o más cortas.
 - b) curvas: cerradas en circunferencia o abiertas en arcos de distinto grado.

La repetición por simetría bilateral o inversión de estos elementos, la convergencia, el paralelismo, perpendicularidad o tangencia, serán conceptos geométricos repetidamente utilizados.

Permitaseme poner un ejemplo, sin pecar por cercano a mí, de egocéntrico e interesado. Es el del logotipo de la primera sílaba de mi apellido —CAR— utilizado en la firma de mis esculturas, geométricas por supuesto. Quería que las tres letras definiesen de la manera mas concisa y clara, la naturaleza geométrica de mis esculturas, a la vez que fuesen fácilmente grabadas con el mínimo esfuerzo. Evidentemente partí de los tres polígonos base de la geometría plana: el triángulo, el cuadrado y la circunferencia, que son proyección en el plano vertical de aquellos tres sólidos con los cuales decía Cézanne que podía hacerse cualquier cosa: el cono, el cilindro y la esfera. En esos tres polígonos base quedan resumidos gran parte de los conceptos geométricos antes enunciados, con los que se dibujaban las letras: la perpendicularidad queda definida en el cuadrado, la inclinación y convergencia en el triángulo, y la curva en la circunferencia.

El proceso fue el siguiente:



Polígonos base

Superposición de los tres: lado del cuadrado, diámetro de la circunferencia y altura del triángulo, coincidentes.

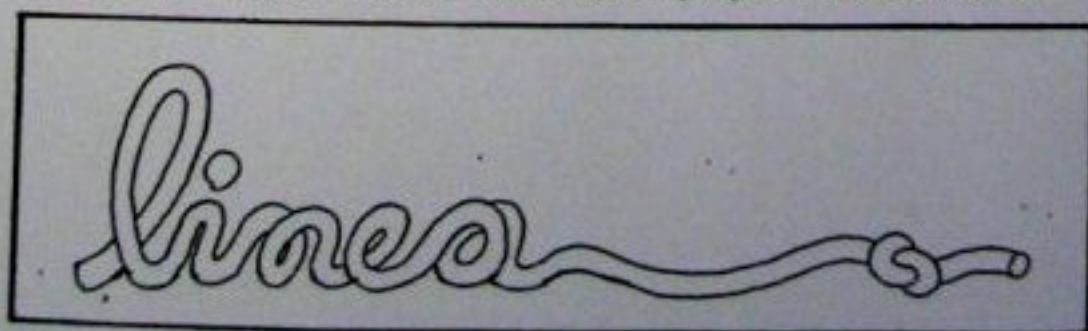
Simplificación dejando lo esencial: ángulos de 60°, 90° y 360°.

Desplazamiento de la A hacia la derecha, para dar mayor curvatura a la C que a la R.

Grafismo gestual del logotipo.

De este modo la sílaba CAR, queda reducida a cuatro trazos o movimientos de la mano: uno con forma curva y tres rectos, cuando para el grafismo normal hubiese necesitado siete.

La obra escultórica que realizo, ya dije que era de naturaleza geométrica, pero quiero especificar que su origen es exclusivamente el cilindro. No es el momento de explicar aquí todas las posibilidades de transformación del cilindro, pero si quiero resaltar una sola. Un cilindro muy largo y finito bien puede ser considerado como una línea y por tanto nada me impide que pueda escribir con él.



Hacer letras *tridimensionales*, lo que en principio es un gran contrasentido, pues todos los códigos de la escritura son planos, fueron creados para leer-mirando. Ciertamente los jeroglíficos grabados en relieve, la escritura cuneiforme sobre barro, y las lápidas romanas etc..., también podían ser *leídas* por los ciegos al estilo de la escritura en Braille, pero excepto en este último caso no era esa la intención. Las escrituras han sido en su gran mayoría *pintadas* sobre soporte de papel.

El pretexto de hacer letras cilíndricas, a parte de presentar problemas geométricos interesantes de intersecciones, es dar un sentido pedagógico al aprendizaje del alfabeto en los niños más pequeños. Ya C. Freinet propuso, hace muchos años como pedagogía experimental, métodos *táctiles* de *prelectura* y *preescritura*: letras recortadas en tela, papel de lija, chapa de madera, para que el niño muy pequeño percibiese su forma, mediante el sentido del tacto, el más primario y que mejor desarrolla en tan temprana edad. Siguiendo con el dedo el sentido de los trazos de las letras, el niño asimilaba su forma, el ritmo y orden de su trazado. Las letras tridimensionales cilíndricas aportan un punto más en su percepción táctil. Es toda la mano, las dos, su palma, todos los dedos,... son muchos los puntos de contacto que mantiene con las letras. La puede abrazar, introducir la O en su brazo como una pulsera, jugar con ellas como si de elementos de una construcción se tratase, hasta que poco a poco, pronunciándolas, ir conformando ^{SILABAS Y} palabras con simples movimientos entre ellas. La redondez de sus contornos las hace muy agradables al tacto, lo que no sucedería si estuviesen construidas con prismas cuadrangulares.

Por último quiero dar la solución geométrica al problema que en principio se nos aparecería como el más complicado; la construcción de las partes curvas de las letras. Dicho simplificado sería: cómo transformar un cilindro en un toro. Si de un cilindro cortamos rodajas de caras convergentes, mediante traslación y giro de 180° de secciones muy cercanas a la circunferencia, una serie de ellas cerrarían un entorno poligonal, su número dependerá del ángulo de la sección: 15° igual a 12 rodajas, $7^\circ 30'$ igual a 24 rodajas, $3^\circ 45'$ igual a 48 rodajas. Si aceptamos que la circunferencia es el polígono de infinito número de lados, hemos de aceptar también que el toro, es el polígono de infinito número de lados cilíndricos. La construcción de todas las letras y números será un problema de intersecciones de cilindros y de toros.

Javier Carvajal



CAP. VIII

FORMA Y NÚMERO VARIACIONES

FORMA Y NÚMERO

v a r i a c i o n e s

ESCUPTURAS
nr².a



J A V I E R C A R V A J A L

$\pi r^2.a$: El cilindro es el cuerpo geométrico que ofrece y encierra las mayores posibilidades de transformación y genera multitud de formas diferentes, por lo cual será la base de la que parte todo mi trabajo, a través de un doble proceso: a) Analítico: sobre normas geométricas y relaciones numéricas; b) Sintético: principios creativos de repetición y variación de las formas resultantes del proceso anterior.

UNI-BI-TRI-DIMENSIONAL: Un cilindro muy largo y fino puede ser considerado como una línea: un alambre, la cuerda de un contrabajo, un cable de antena de T.V.; no dejan de ser cilindros muy finos y como tal línea puedo con él delimitar un plano -polígonos- y hasta construir poliedros de aristas cilíndricas; pero nunca dejará de ser un cuerpo tridimensional, apreciando su volumen en cuanto lo acorto.

LA RECTA Y LA CURVA: El cilindro es línea recta pero en sí contiene a la curva, característica que no posee ninguno de los otros prismas poligonales.

SECCIONES: Al seccionar el cilindro por un plano paralelo a la base obtendremos la circunferencia y si el plano es longitudinal, paralelo a las generatrices, su sección será el rectángulo que lo genera. Entre estos dos parámetros existe una gran variedad de elipses de igual eje menor pero de distinto eje mayor, según sea el grado de inclinación del plano de corte.

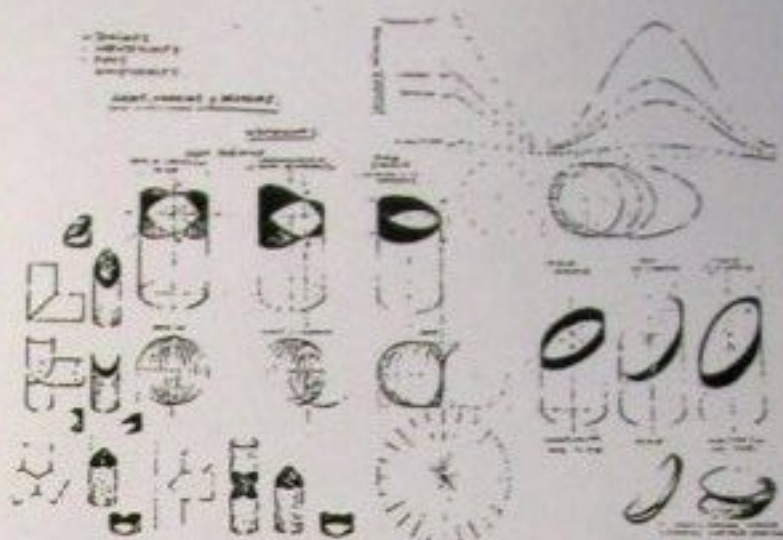
GIROS: Otra característica muy particular y que no la contiene ninguno de los prismas poligonales, es que una vez seccionado es posible girarlo grado a grado 360 veces, coincidiendo plenamente en sus partes. En un prisma cuadrado esto sólo será posible cuatro veces -cada 90°-, en el pentagonal, cinco -72°-, en el hexagonal, seis -60°-, ...etc.

EL CONO: Volumen engendrado por la rotación del triángulo, podríamos atribuirle igualmente muchas de las características del cilindro, pero nunca podrá ser considerado como una línea, al ser sus generatrices convergentes en un punto, lo que limita muchas posibilidades de transformación.

LA ESFERA: Generada por la circunferencia no es más que un punto gordo. Parece mentira, pero siendo punto y esfera principio y fin de todas las formas, las posibilidades de transformación son mínimas. Una esfera, la mire por donde la mire y la corte por donde la corte, no obtendré de ella más que círculos de distintos tamaños.

SECCIONES - INTERSECCIONES - GIROS Y TRASLACIONES, GAJOS, RODAJAS Y DESPOJOS

SECCIONES: Entre el plano-sección paralelo a la base -el círculo- y el que pasa por su eje -el rectángulo- existen grado a grado 90 secciones de forma elíptica, más alargadas cuanto el grado de inclinación sea mayor. En el dibujo escojo cuatro: 60° , 45° , 36° y $7^\circ 30'$, correspondientes a la construcción con el cilindro como lado: del triángulo equilátero, cuadrado, pentágono y polígono de 24 lados. En su abatimiento quedan dibujadas las cuatro elipses y su desarrollo correspondiente. Hago notar que en la elipse correspondiente al polígono de 24 lados, la diferencia entre el eje mayor y el menor es mínima, por lo que aparece casi como circunferencia. Menor lo será en el polígono de 48 lados - $3^\circ 45'$ -, prácticamente inapreciable a la vista pues tendemos al polígono de infinito número de lados que sería la circunferencia.



INTERSECCIONES: La esfera: supongamos dos secciones de $7^\circ 30'$ que se cruzan y que su recta de intersección corta al eje del cilindro. Se producen dos gajos iguales y simétricos; con 24 de ellos colocados a modo de gajos de naranja, se formará una teórica esfera. La mínima diferencia entre el eje vertical y el horizontal será la de los ejes de la elipse de la que partimos.

Ovoide y calabazas: si la línea de intersección la desplazamos hacia la generatriz del cilindro se producen dos gajos también simétricos pero no iguales sino suplementarios. Con 24 gajos menores formaré un tipo de ovoide y con los grandes una forma de calabaza. Sus tamaños dependerán del desplazamiento.

El toro: cuando las dos secciones elípticas no se corten sino que se toquen en un punto coincidiendo a su vez con la generatriz del cilindro, la forma resultante será una rodaja simétrica pero de caras convergentes, que sumadas 24, 48, 96, ...; según el ángulo de la sección, nos aproximaremos al toro.

Si aceptamos que la circunferencia es el polígono de infinito número de lados, hemos de aceptar también que el toro es el polígono de infinito número de lados cilíndricos.

TRASLACIONES: Una sección desplazada sobre el eje del cilindro produce una rodaja simétrica y de caras paralelas: la clásica rodaja de chorizo.

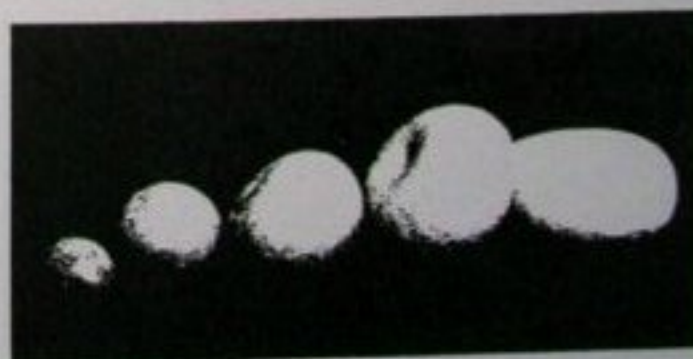
GIRO: Si la sección gira sobre el eje del cilindro se produce intersección de planos y un gajo no simétrico, la simetría se conseguirá con su gajo inverso.

TRASLACIÓN Y GIRO: En caso que se produzcan los dos movimientos de modo que no haya intersección, surgirá una rodaja no simétrica. De nuevo la simetría lo será con su inversa al modo como lo son las dos manos.

DESPOJOS: Serán aquellos trozos sobrantes o restos de la intersección, mordedura o penetración de dos o más cilindros. Está claro que las propiedades geométricas de éstos serán las mismas de aquellas de las que surgen por ser complementarias del cilindro. Podríamos compararlos con la relación existente entre el espacio vacío y el espacio lleno, lo cóncavo y lo convexo, uno comienza donde termina el otro. Los dos planos de intersección son principio y fin de unas y otras formas, del mismo modo que la fina lámina de arcilla de un jarón de porcelana lo es de su espacio interior y de su forma externa.

EL OVOIDE, LA ESFERA Y LAS CALABAZAS

El hundimiento central de las calabazas será mayor cuanto más se aproximen al toro, al tiempo que el ovoide suplementario que en su interior circunscribe será cada vez más pequeño.

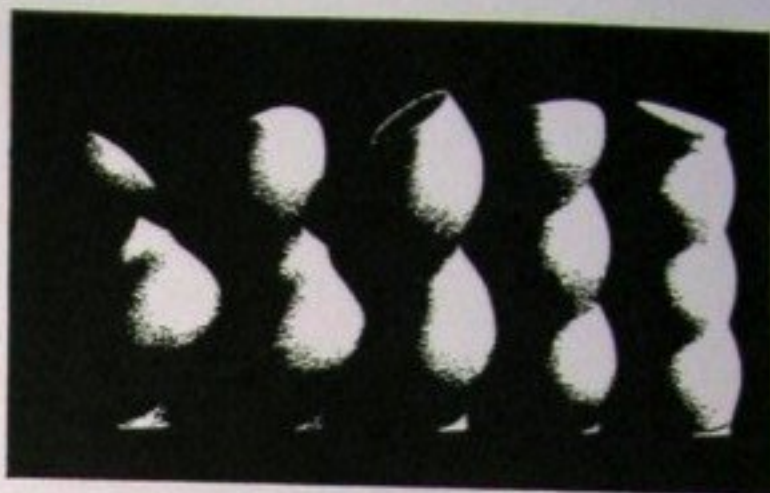


EL TORO

Seccionando el toro por una serie de planos radiales y giradas sus rodajas una a una un número igual de grados y en el mismo sentido, éste comienza a enroscarse, transformándose las circunferencias de sus perímetros exterior e interior en dos curvas helicoidales paralelas que conformarán, al aumentar el giro de las rodajas en una serie de columnas salomónicas.

COLUMNAS SALOMÓNICAS

Serie de columnas producto del giro de las rodajas de caras convergentes del toro. Cuanto mayor sea el giro, la columna tendrá mayor número de vueltas, de modo que giradas cada rodaja 180° volveremos al cilindro del cual todo el proceso había surgido. No obstante la principal variable en la generación de columnas estará en la forma del toro de la que parte; es decir la relación entre su radio interior y exterior.



ESCULTURAS

EL ACTO CREATIVO

Todo lo explicado hasta este momento es así y no podría ser de otra forma, pues todo está razonado en base a la lógica de relaciones geométricas y numéricas. Quiero decir, que hasta aquí ha sido el pensamiento lógico, el *hecho científico* podríamos decir, quien ha guiado a la expresión.

El momento creativo, la expresión artística llamada escultura, comenzará cuando decida qué hacer con estos fundamentos geométricos. Ellos serán solamente el origen de donde surgirán las múltiples preguntas, cada una con infinitas posibles respuestas, de entre las cuales hemos de escoger la mejor a nuestros ojos, siguiendo criterios de composición y relación formal mucho más subjetivos y aleatorios que los hasta aquí enunciados.

En el caso que nos ocupa de las columnas salomónicas, me propongo elegir dos y unirlos en un solo volumen. Pero ¿cuáles de las muchas posibles? y una vez elegidas ¿cómo las penetro?: ¿muy juntas o poco, más arriba o abajo, más girada una sobre la otra o menos, en que proporción quedarán sus partes cóncavas y convexas...? ¿y si tomo tres columnas? Las preguntas se multiplicarán hasta el infinito en el proceso creativo.

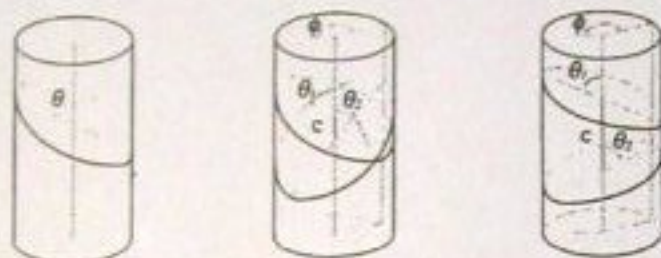
El acto creativo será la decisión de cuál es la mejor respuesta.



Dos columnas de muy distinto giro, contrapuestas producen por contraste una mayor sensación de movimiento.

FORMA Y NÚMERO - CRECIMIENTO

Hace algunos años que Javier Carvajal dejó el plano, el inagotable plano, como objeto directo de su investigación estética. Hace menos tiempo que, trabajando con figuras poliédricas de aristas cilíndricas, quedó atrapado, hipnotizado, por las posibilidades de ese cuerpo redondo y, a la vez, recto: el cilindro. Desde la simplicidad de este cuerpo ha creado formas complejas, guiado por dos fuerzas evolutivas: la lógica de los movimientos y la búsqueda de la belleza.



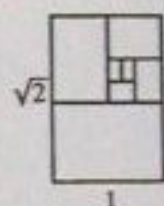
Cada sección del cilindro es una elipse cuya posición se puede caracterizar por el ángulo θ que forma su eje mayor con el eje central del cilindro. El plano determinado por ambos ejes lo llamaremos plano principal de la sección. Dos secciones distintas del cilindro determinarán un módulo de construcción. Además de los ángulos respectivos θ_1 y θ_2 , la posición relativa de ambas secciones queda determinada por el ángulo ϕ que forman entre sí los planos principales y la distancia c entre los centros de las dos elipses. Si c es suficientemente grande para que no se corten las secciones, el módulo obtenido es una *rodaja*; si se cortan, los dos módulos obtenidos son *gajos*.

En un cilindro de radio r , cuatro parámetros (θ_1 , θ_2 , ϕ , c) determinan cada uno de los módulos posibles, de modo que: $0 < \theta_1 \leq 90^\circ$, $0 < \theta_2 \leq 90^\circ$, $0 \leq \phi < 180^\circ$, $0 \leq c$. Estas relaciones indican que teóricamente, tenemos libertad para dar un número infinito de valores a cada uno de estos parámetros.

Al colocar un módulo junto a otro, girado un cierto ángulo α , igualmente orientado o invertido, con igual o distinto radio, van naciendo nuevas figuras: ovoides, esferas, calabazas, columnas salomónicas, rosquillas que se acercan más y más al toro, troncos de conos

y lábeles que serpentean, ... Un nuevo parámetro se añade así a los iniciales. Los movimientos de traslación y giro de los módulos generan formas que, con frecuencia, son muy semejantes a las de la naturaleza.

Pero no todas las formas impresionan por igual nuestros sentidos. Unas nos atraen más que otras y corresponden a distintos ritmos numéricos: El número π (π) está en los giros. El lado de la espiral poligonal del polígono de n lados, después de k giros, es el número $2k\pi/n$, lo que implica que el área correspondiente es k^2 unidades triangulares de la retícula sobre la que se construyen. En las columnas hay $2\pi/\alpha$ módulos en cada vuelta y una longitud, medida desde el centro, de $2\pi c/\alpha$; cuanto menor sea α , más alta será la columna. La hoja Din-A, es decir la hoja rectangular tal que al doblarla por la mitad por el lado mayor resulta una hoja que mantiene las proporciones de la inicial, lleva a la espiral espacial cuyos volúmenes sucesivos están en la proporción $2\sqrt{2}$.

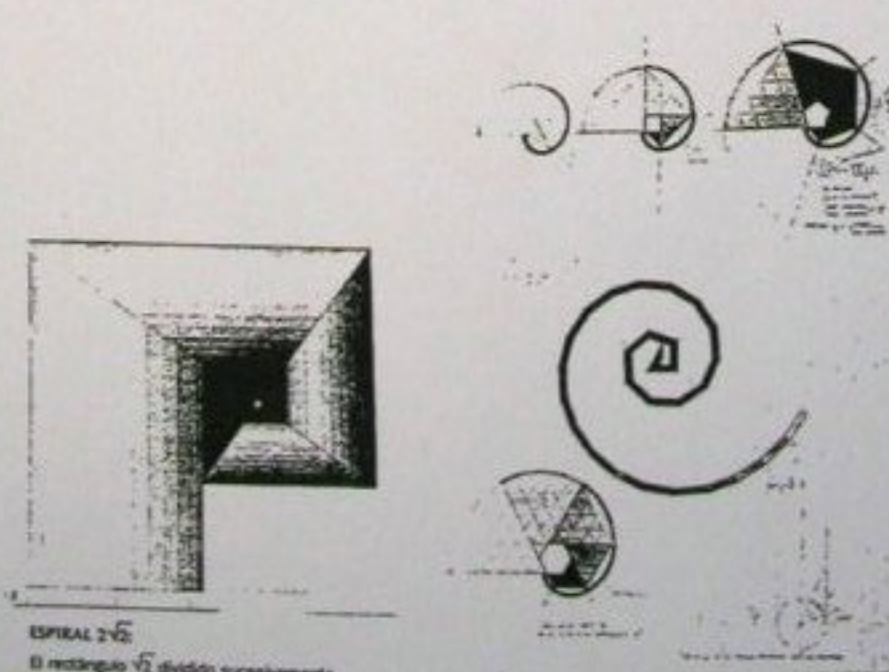


Los ángulos α_n entre los lados de la espiral multipoligonal siguen la relación $\alpha_n = \pi \left(1 - \frac{2}{2+n} \right)$ y en los radios vectores correspondientes ρ_n aparece la serie armónica:

$$\rho_0^2 = 1, \rho_n^2 = \left(1 + \sum_{m=1}^n \cos \left(\sum_{k=1}^m \frac{2\pi}{k+2} \right) \right)^2 + \left(\sum_{m=1}^n \sin \left(\sum_{k=1}^m \frac{2\pi}{k+2} \right) \right)^2$$

Forma y número son consecuencia directa de los procesos de crecimiento. Ambos aspectos se corresponden. Javier Carvajal, a través de la forma intuye el número, atrapa el ritmo y crea belleza.

Eliseo Borrás Veses



ESPIRAL $2\sqrt{2}$

El rectángulo $\sqrt{2}$ dividido sucesivamente

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{8}, \dots$$

... genera al igual que en todos los polígonos una espiral. Las diagonales de todos los rectángulos se cortan perpendicularmente, y seccionarán a los cilindros con los que construiremos la escultura en dos ángulos suplementarios de $54^\circ 44'$ y $35^\circ 16'$ cuyos elipses serán tangentes y circunscritas en los límites de sus ejes.

ESPIRALES POLIGONALES

Cada polígono genera una espiral distinta; cuanto mayor sea el número de lados más perfecta será la espiral, pues sus arcos de circunferencia serán más y de menor grado.

ESPIRAL MULTIPOLIGONAL

En base al principio anterior, me propongo crear una espiral de tramos rectos en la que participen todos los polígonos. Dos lados de un polígono y el ángulo que forman ya lo definen; con otro lado igual y un nuevo ángulo surge el polígono siguiente y así repetidamente en una sucesión recursiva.



La serie repetida de tramos rectos en el plano bidimensional tenderá a la línea curva pues me acerca al polígono de infinito número de lados, la circunferencia.

Esta espiral multipoligonal expresada en el espacio mediante giros en las secciones del cilindro se elevará progresivamente, y tenderá ahora a la línea recta cuando el giro en cada ángulo sea de 90° . A partir del ángulo recto volverá a decaer pero en sentido inverso.

LA ESCULTURA BIOLÓGICA DE JAVIER CARVAJAL

La obra escultórica de Javier Carvajal semeja un universo en pleno desarrollo evolutivo. Sus esculturas evocan la imagen de la evolución biológica donde múltiples organismos y especies surgen con formas diversas; sus secciones, intersecciones, giros y traslaciones equivaldrían a los cuatro elementos constituyentes del ADN; sus gajos, rodajas y despojos a la eclosión de vida que el ADN busca incessantemente; sus cestillos de despojos a los ricos depósitos de fósiles del período cámbrico, muestra de la pujanza de la evolución biológica y de la enorme diversidad de especies y organismos.

La evolución biológica es incomprensible si nuestra mirada se detiene únicamente en el ser humano considerándolo como la obra maestra de la evolución. Segregar al hombre del resto de las criaturas con las que ha coevolucionado y de cuyos *phyla* desciende es incurrir en un burdo antropocentrismo y, lo que es más grave, en el creacionismo. La idea de un creador es una de las metáforas más aplicadas a la producción artística. Es una bella metáfora pero contiene en su seno la semilla del platonismo. Si, además, la obra artística tiene como marco la geometría, es muy fácil que la semilla florezca con todo su esplendor. La geometría no es más que la naturaleza y sus formas pasadas por el tamiz de la mente; la mente a su vez elabora principios, leyes y modelos con los que interpreta de nuevo la naturaleza. Estos modelos no son ni innatos ni eternos, sino históricos y cambiantes. Cuando Carvajal deduce cómo combinar las secciones, intersecciones, giros y traslaciones está creando modelos de la realidad, está aplicando una combinatoria mental a estos cuatro elementos que, como los del ADN, dan lugar a una ingente y rica diversidad de cuerpos y figuras.

Javier Carvajal se rebela por medio de su obra escultórica contra el creacionismo y, por tanto, contra la creencia de que la deidad (o el artista) tiene en su mente un mundo de criaturas perfectamente delimitadas e independientes entre sí de las que, más tarde, el barro insuflado será su sombra. Las piezas escultóricas de Carvajal, como las criaturas de nuestro mundo, coevolucionan: unas aparecen simultáneamente; otras constituyen puntos de inflexión a partir de los cuales surgen *phyla* evolutivos de nuevas figuras; hay despojos que subsisten temporalmente esperando su acomodo con otros despojos pero que se extinguirán sin llegar a formar parte de este universo escultórico; despojos que parecían irrelevantes se funden entre sí conformando figuras inesperadas. Carvajal se siente una criatura más entre sus criaturas. Coevoluciona con ellas a través del logos geométrico.

No está por encima sino junto a y formando parte de sus esculturas. El ser humano encuentra en sus diversos lenguajes y modos de expresión la herramienta más refinada para comprender, explicar y transformar la realidad. La mente humana no es creacionista al modo del dios bíblico que ex nihilo da origen al universo. Los materiales constitutivos de la mente humana son los mismos que los del resto de seres de nuestro universo. Por ello, es más excelsa la creación humana que la atribuida a las deidades. El hombre crea siguiendo los dictados de la evolución. Así obra Carvajal en su universo de geometrías. El ser humano trasciende su propia biología, transformándose y transformando la realidad externa. Sus transformaciones devienen en cultura y la cultura en arte y el arte en belleza y la belleza en estética, otra propiedad que adquieren nuestros órganos sensoriales para percibir la realidad y experimentar emociones nuevas. El cerebro, obligado a elaborar representaciones mentales del mundo, desemboca de forma natural en la obra artística.

La característica más relevante de la potencia creativa de Javier Carvajal es su acentuada capacidad para construir imágenes y representaciones mentales. Ante el cilindro, su *célula geométrica primitiva*, idea cuerpos que difícilmente podíamos imaginar surgiesen de la protoforma cilíndrica. Es en el plano donde nos descifra sus complejas e imaginativas elaboraciones mentales. Allí todo parece ser diáfano y predeterminado por las leyes de la geometría. Quien ignore la ingente actividad neuronal que exige la visión y, más todavía, la capacidad para imaginar mentalmente giros y traslaciones, podría pensar que en la obra de Carvajal no hay más que una mera aplicación de principios geométricos (esto ya en sí es arte). Más no. Cuando decide un tipo de sección y no otro, una intersección, un giro, una traslación frente a tantos otros no hay ley sino azar y contingencia creativos que, una vez aplicados, reincorporan la ley y el determinismo geométricos. En sus esculturas biológicas no hay escalas que conduzcan de lo mínimo e inferior a lo supremo, no hay gradaciones, como tampoco las hay en la naturaleza. Todas las figuras de su universo son importantes y necesarias. Todas son elementos imprescindibles y nobles. Podemos deleitarnos en una figura concreta, pero es su cosmos escultórico como totalidad el que nos sorprende y admira y el que contemplamos como un trasunto creativo del mundo real.

J. Sánchez-Cánovas



FORMA Y NÚMEROS.
VARIACIONES. $\pi r^2 a$
 Javier Carvajal
 Miquel Francès (realizador)
 Fundación Bancaixa
 15 minutos
 Material complementario:
 Libro catálogo
 del mismo título



Javier Carvajal nos vuelve a sorprender con una de sus maravillosas realizaciones. Se trata de un documento audiovisual de gran belleza que relaciona las matemáticas, las formas geométricas y la escultura. Como muy bien lo resume su autor: «A través de la lógica me encuentro con la Naturaleza».

Carvajal parte de uno de los cuerpos más sencillos, el cilindro [$\pi r^2 a$], y a partir de él, mejor de sus secciones, genera multitud de formas, algunas muy familiares pero cuya procedencia desconocíamos, y otras realmente originales. Todo ello a través de un doble proceso:

- Analítico: explorando normas geométricas y relaciones numéricas.
- Sintético: aplicando principios creativos de repetición y variación de las formas primarias obtenidas del proceso anterior.

El video utiliza imágenes animadas generadas en 3-D, de una gran plasticidad y elocuencia.

La intersección de un plano con el cilindro nos proporciona una gama de secciones elípticas. Cortando el cilindro mediante dos planos podemos obtener una gran variedad de módulos sólidos. Si la recta de intersección de los planos es secante al cilindro tendremos gajos.

Si esta recta coincide con el diámetro la yuxtaposición de los gajos nos permite construir una teórica esfera. El desplazamiento de esta línea de intersección hacia la generatriz nos proporciona otros gajos que nos permiten construir todo tipo de ovalos y calabazas, formas muy frecuentes en la Naturaleza.

Si la recta de intersección de los planos es tangente o exterior al cilindro obtenemos rodajas. La yuxtaposición de estas rodajas hasta completar 360° nos permite construir el toro.

Pero, y aquí comienzan las verdaderas sorpresas, si pegamos las rodajas girándolas una respecto de la siguiente el mismo número de grados, obtenemos una forma que comienza a enroscarse sobre sí misma para dar origen a... una columna salomónica. Cuanto mayor sea el ángulo de giro mayor será el número de vueltas. Si el giro es de 180° volvemos a obtener el cilindro.

A partir de aquí, Carvajal aplica el proceso sintético para demostrarnos como la combinación creativa de estas formas da origen a auténticas obras de arte.

Si las rodajas van disminuyendo de forma progresiva de radio nos podemos introducir en un mundo casi mágico de formas originales: el cuerno de muchos rumiantes, el nautilus...

Las rodajas más simples, las obtenidas mediante dos planos paralelos, la famosa raja de chorizo, también nos deparará en el video sorpresas agradables.

Efectivamente la yuxtaposición de este tipo de rodajas giradas 180° una respecto de la anterior genera una forma similar a un fuelle.

La obtención de rodajas no simétricas se obtiene mediante la combinación de dos movimientos: traslación y giro. La combinación de rodajas de este tipo de forma creativa produce espectaculares formas escultóricas.

Por último, lo que Javier Carvajal denomina despojos, los trazos sobrantes o restos de la intersección, mordedura o penetración de dos o más cilindros, constituyen un material que combinado de forma apropiada genera formas muy cercanas a la naturaleza: semillas, caparazones, colas de crustáceos...

Jugando con polígonos distintos el autor nos sumerge en un apasionante mundo de formas espirales en el espacio, de la que merece especial atención la que denomina espiral

El documento no se queda en el desarrollo del proceso analítico. Para terminar, y como culminación del proceso sintético que el autor nos había prometido al principio, nos presenta un extraordinario muestrario de esculturas basadas en las formas geométricas obtenidas con todos los materiales mostrados.

Acompaña al video un libro-catálogo de la exposición de las esculturas [algunas de sus reproducciones aparecen en este número de SUMA], con textos explicativos del propio autor, incluyendo el story board del video, junto a textos de carácter científico, poético, musical, plástico... con unas excelentes fotografías.

En fin, un documento que para aquellos profesores que impartan las Matemáticas de la forma se convertirá en un material casi imprescindible para utilizar en clase. Y para el resto un material fabuloso para disfrutar y deleitarse con la vinculación, alejada de los tópicos y lugares comunes, entre las Matemáticas y el Arte.

Antonio Pérez Sanz

CAP. IX

INSCRIPCIÓN Y CIRCUNSCRIPCIÓN DE POLIEDROS

Inscripción y circunscripción de poliedros

Regulares . Regulares truncados

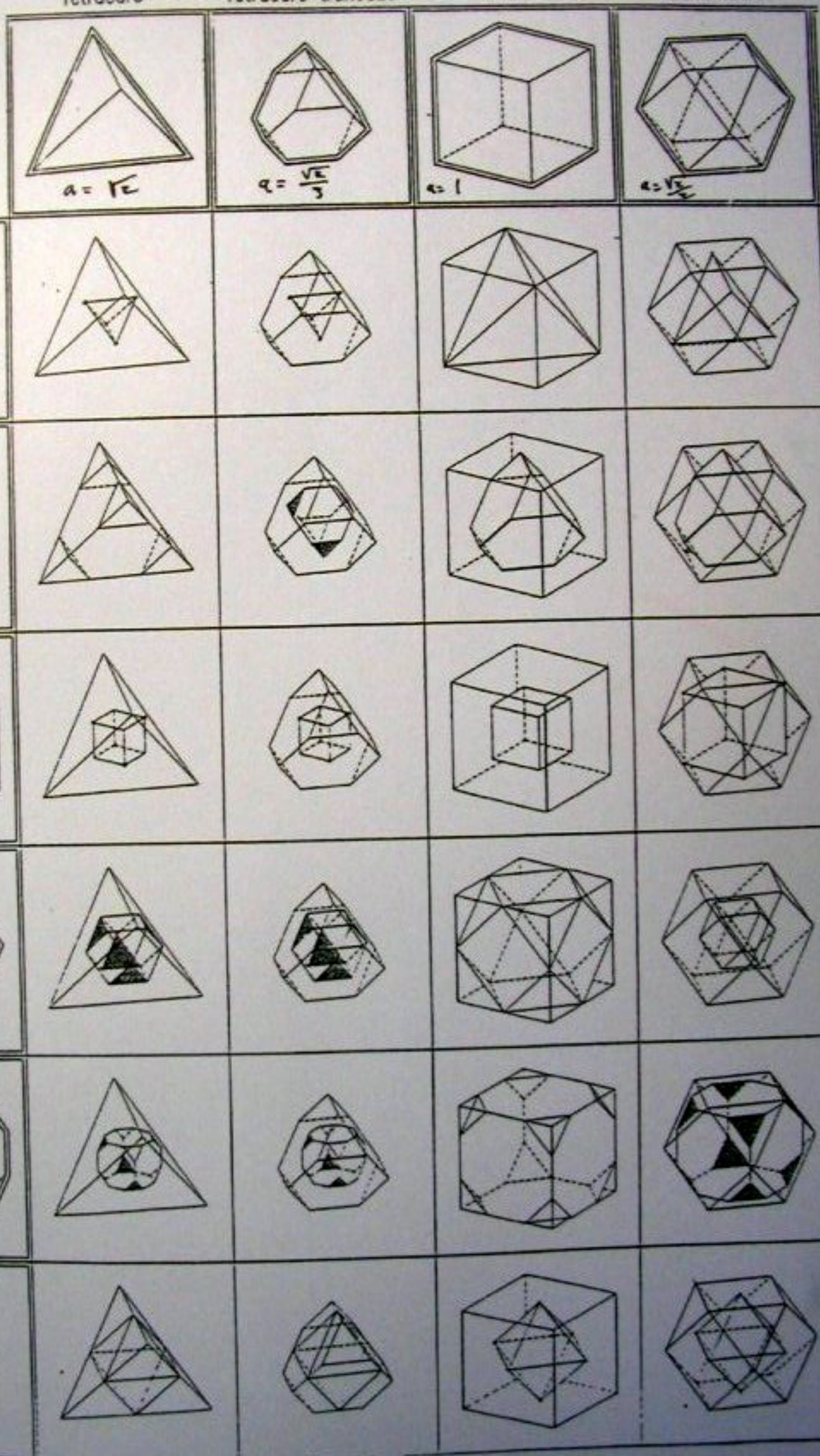
Común y envolvente de las dualidades

Tetraedro

Tetraedro truncado

Cubo

Cuboctaedro



RECEIÇÃO DE INSERTO
COM EL CUBO $q = 1$ (PROVISÓRIO) - - -

$a = \frac{2}{3}\sqrt{2}$	$q = \sqrt{2}$	$q = \frac{\sqrt{2}}{3}$	$q = \frac{\sqrt{2}}{3}$	TETRAEDRO
$q = \frac{\sqrt{2}}{3}$	$q = \frac{\sqrt{2}}{3}$	$q = \frac{\sqrt{2}}{9}$	$q = \frac{\sqrt{2}}{3}$	TETRAEDRO TRUNCADO
$a = \frac{2}{3}$	$a = \frac{1}{3}$	$q = \frac{1}{3}$	$a = \frac{1}{3}$	CUBO
$q = \frac{\sqrt{2}}{3}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$q = \frac{\sqrt{2}}{4}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{4}$	CUBO TRUNCADO (COM O OZ LO DUAL DO CUBO - OCTAEDRO)
$a = 2(\sqrt{2}-1)^2$	$a = \sqrt{2}-1$	$q = (\sqrt{2}-1)^2$	$q = (\sqrt{2}-1)^2$	CUBO TRUNCADO
$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$q = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$	OCTAEDRO

Cubo truncado

Octaedro

Octaedro truncado

Rombododecaedro

Icosaedro



$$a = \sqrt{2} - 1$$



$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



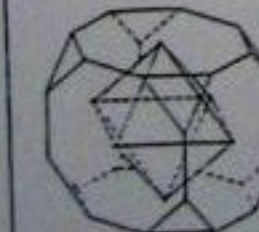
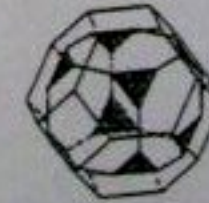
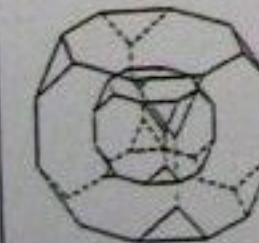
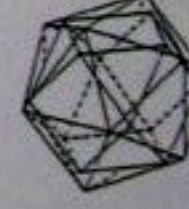
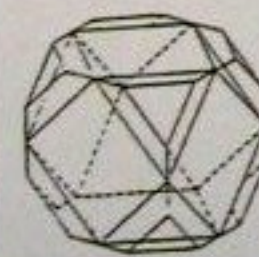
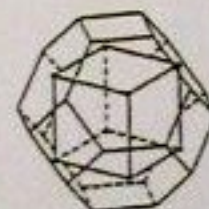
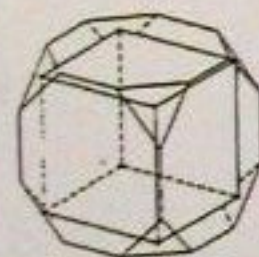
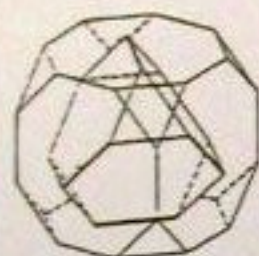
$$a = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



$$a = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



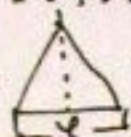
$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$$



$$** (1-\varphi) \sqrt{2} = 0.5402 =$$

$$** \frac{\varphi+1}{3} = 0.53973\dots$$

$$** \text{Altura } \triangle = \frac{\varphi\sqrt{3}}{2} = 0.5352.$$



$** \left(\frac{\sqrt{3} \cdot \varphi}{2} \right) \sqrt{2}$ $a = 0.54(\sqrt{2})$	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{3}$	$a = 0.81(\sqrt{2})$
$a = \left(1 - \frac{1-\varphi}{3} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)$	$a = \frac{\sqrt{2}}{4}$	$a = \frac{0.88(\sqrt{2})}{3}$ $\approx \sqrt{2} - 1$	$a = \frac{\sqrt{2}}{5}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{3}$
$** (0.535)$ $a = \frac{\sqrt{3} \cdot \varphi}{2}$	$a = \frac{1}{2}$	$a = \frac{1}{2}$	$a = \frac{1}{3}$	$a = 0.81$
$a = 0.5117$	$a = \frac{\sqrt{2}}{4}$	$a = \frac{3\sqrt{2}}{8}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{4}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$a = \frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$	$a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$	$a = 0.62(\sqrt{2}-1)$	$a = (\sqrt{2}-1)^2$	$a = (\sqrt{2}-1)^2$
$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{4}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Icosidodecaedro

Icosaedro truncado

Dodecaedro

Dodecaedro truncado

Triacontaedro rómbico



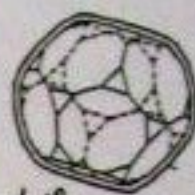
$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



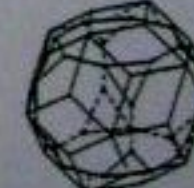
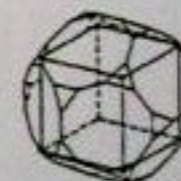
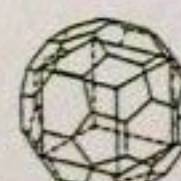
$$a = 1 - \varphi$$



$$a = \frac{1 - \varphi}{\sqrt{5}}$$



$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \varphi}{\sqrt{5}}\right)^2}$$



$$\alpha = \varphi \cdot \sqrt{2}$$

$$\alpha = 0.54(\sqrt{2})$$

$$q = 0.54(\sqrt{2})$$

$$a = x\sqrt{2}$$

$$q = \left(1 - \frac{1-\varphi}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \\ \approx 0.41$$

$$a = 0.83\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$a = \varphi$$

$$q = \frac{\sqrt{3} \cdot \varphi}{2}$$

$$q = \frac{\sqrt{3} \cdot \varphi}{2}$$

$$q = \varphi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$q = \left(1 - \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$q = \frac{\varphi\sqrt{2}}{2}$$

$$q = \varphi(\sqrt{2}-1)$$

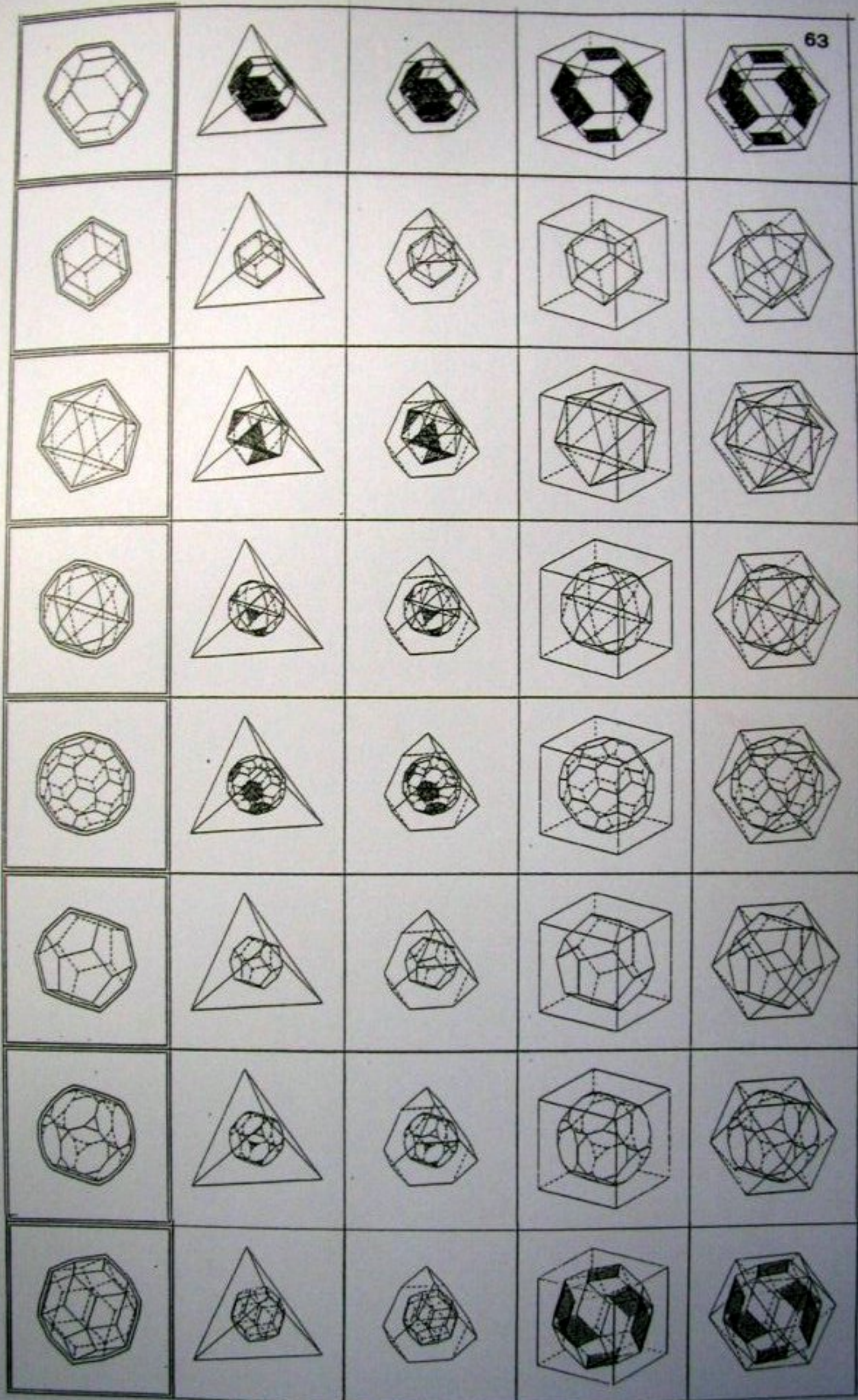
$$q = \frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$$

$$q = \varphi(\sqrt{2}-1)$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



64

$$a = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

OCTÁGONO
TRUNCADO.

$$a = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

ROMBOIDECAEDRO
(ENVOLVENTE DE
LA MACEDA
ARCO - OCTÁGONO)

$$a = \varphi$$

$$a = \varphi$$

$$a = 1 - \varphi$$

$$a = 1 - \varphi$$

ICOSAEDRO.

$$a = \frac{\varphi}{2}$$

$$a = \frac{\varphi}{2}$$

$$a = \frac{1 - \varphi}{2}$$

$$a = \frac{1 - \varphi}{2}$$

ICOSIDONECAEDRO
(COMBINAR DE LA
MACEDA
ICOSAEDRO - ARCO)

$$a = \frac{\varphi}{3}$$

$$a = \frac{\varphi}{3}$$

$$a = \frac{1 - \varphi}{3}$$

$$a = \frac{1 - \varphi}{3}$$

ICOSAEDRO
TRUNCADO.

$$a = 1 - \varphi$$

$$a = 1 - \varphi$$

$$a = \frac{\varphi}{3}$$

$$a = \frac{\varphi}{3}$$

DODECAEDRO.

$$a = (1 - \varphi) \left(\frac{\sqrt{3} \cdot \varphi}{2} \right)$$

$$a = \frac{1 - \varphi}{\sqrt{5}}$$

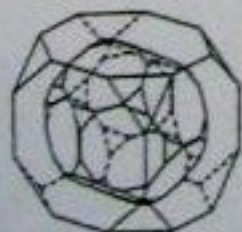
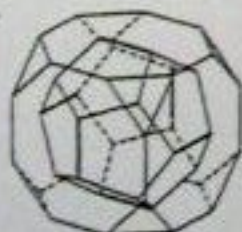
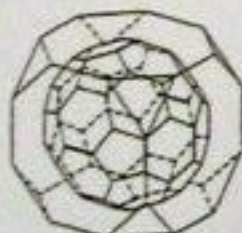
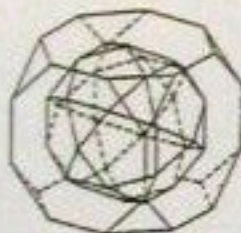
DODECAEDRO
TRUNCADO.

$$a = \sqrt{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \varphi}{2}\right)^2}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}$$

$a = 0.95$

TRIACONTAEDRO
RÓMBICO
(ENVOLVENTE DE LA
MACEDA
ICOSAEDRO - ARCO)



$a = \frac{\sqrt{2} \cdot \varphi}{3}$ $(\approx 0'2913)$	$a = \frac{\sqrt{2}}{6}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{6}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{6}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{9}$
---	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

$a = \frac{\sqrt{3}}{4}$	$a = \frac{\sqrt{3}}{8}$	$a = \frac{\sqrt{3}}{4}$	$a = \frac{\sqrt{3}}{6}$	$a = \frac{\sqrt{3}}{4}$
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

$a = 1 - \varphi$	$a = 1 - \varphi$	$a = 1.5(1 - \varphi)$	$a = 1 - \varphi$	$a = \varphi$
-------------------	-------------------	------------------------	-------------------	---------------

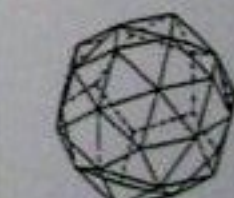
$a = \frac{\varphi}{2}$	$a = \varphi(1 - \varphi)$	$a = \frac{1 - \varphi}{2}$	$a = \frac{1 - \varphi}{2}$	$a = \frac{\varphi}{2}$
-------------------------	----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-------------------------

$a = \frac{\varphi}{3}$	$a = \frac{\varphi\sqrt{2}}{6}$	$a = \frac{1 - \varphi}{3}$	$a = \frac{1 - \varphi}{3}$	$a = \frac{\varphi}{3}$
-------------------------	---------------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-------------------------

$a = \varphi \left(\frac{\sqrt{3} \cdot \varphi}{2} \right)$ $a = 0'3307$	$a = 0'73(1 - \varphi)$	$a = \frac{\varphi}{2}$	$a = \frac{\varphi}{3}$	$a = 1 - \varphi$
--	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------

$a = 0'1273$	$a = 0'099$			
--------------	-------------	--	--	--

$a = \varphi \sqrt{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \varphi}{2}\right)^2}$	$a = \frac{1 - \varphi}{2}$ $(\approx 0'196)$			
--	---	--	--	--



CAP. X

**UN ROMPECABEZAS
CON LOS
SÓLIDOS PLATÓNICOS**

Un trenclaclosques amb els sòlids platònics

En aquest article es presenta un trenclaclosques en què les seves peces són poliedres que s'acoplen seguint una estratègia que permet descobrir diverses relacions geomètriques que hi ha entre els poliedres regulars convexos. Així, tot jugant amb les peces s'afavoreix la percepció i la intuïció espacial, tan necessàries per augmentar el nostre coneixement sobre l'estructura de l'espai. En aquest sentit, aquest treball té una clara finalitat didàctica, tal com queda palès en la tercera i última secció de l'article, on es fa una proposta didàctica per mitjà d'una sèrie d'activitats pedagògiques, destinades a un 7è nivell d'EGB.

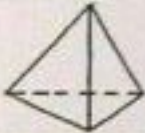
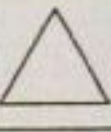
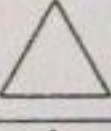
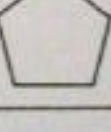
En la primera secció de l'article es fa una breu descripció dels poliedres regulars, ja que són les peces claus del trenclaclosques, i es posa de relleu la seva història i la seva aplicabilitat com a models de nombroses estructures de la natura, ciència, tècnica i filosofia.

Quant a la segona secció, està encaminada a estudiar les relacions dels poliedres regulars entre ells, les quals permeten donar les bases teòriques i pràctiques perquè qualsevol pugui construir el trenclaclosques i jugar-hi.

Cal fer notar que aquí s'han escollit els poliedres regulars per la seva simetria i bellesa, qualitats que resten totalment integrades en els processos de composició i coloració del trenclaclosques.

Un poliedre regular és un poliedre les cares del qual són polígons regulars iguals que concorren de la mateixa manera en cada vèrtex del poliedre. Els poliedres regulars convexos (o sòlids platònics) són i tenen les característiques següents (fig. 0):

Figura 0

FORMA I NOM	FORMA CARES	Nº CARES PER VERTEX	Nº CARES	Nº VERTEXS	Nº ARESTES
 Tetraèdre		3	4	4	6
 Cub		3	6	8	12
 Octàedre		4	8	6	12
 Icosàedre		5	20	12	30
 Dodecaèdre		3	12	20	30

Relacions entre els sòlids platònics

Construcció del trenclaclosques

Anem a veure com es circumscriuen uns poliedres dins els altres seguint l'ordre següent: Dodecaèdre - cub - tetraèdre - octàedre - icosaèdre.

Aquestes relacions ens serviran per dissenyar les diferents peces de què consta el trenclaclosques.

1. Dodecaèdre - Cub

Un cub es pot inscriure en un dodecaèdre de manera que cada una de les dotze arestes del cub és una diagonal d'una cara del dodecaèdre. (Fig. 2)

Per tant la relació entre l'aresta del cub (c) i la del dodecaèdre (d), serà el nombre d'or $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Així un dodecaèdre està format per un cub més sis peces en forma de taulada, adossades a les cares del cub (Fig. 3) de forma i dimensions donada per la següent planilla (Fig. 4) ja que

$$d = \frac{c}{\tau} \approx 6'18 \text{ cm}$$

considerant $c = 10 \text{ cm}$ per a tot el trenclaclosques.

Fig. 2. El dodecaèdre amb un cub inscrit



Figura 3

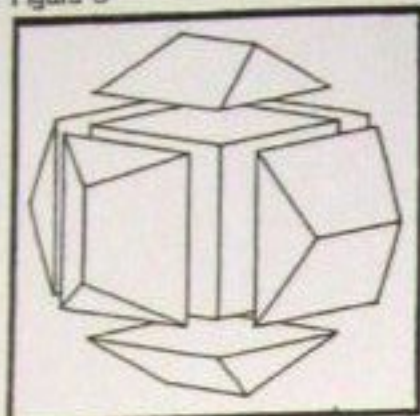
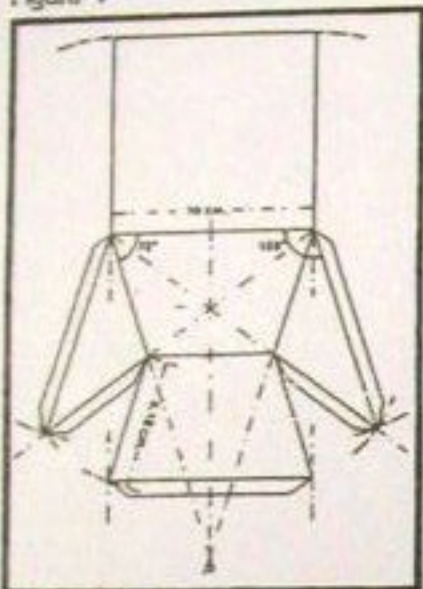


Figura 4



2. Cub - Tetràedre

Seguint el procés anterior, un tetràedre regular es pot inscriure en un cub de manera que les seves sis arestes siguin diagonals de les cares del cub (Fig. 5). Per tant la re-

Fig. 5. El cub amb un tetràedre inscrit

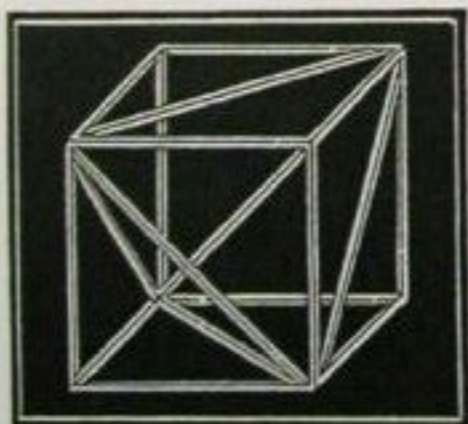
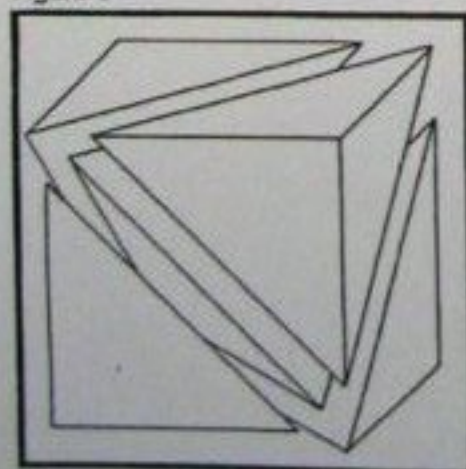


Figura 6



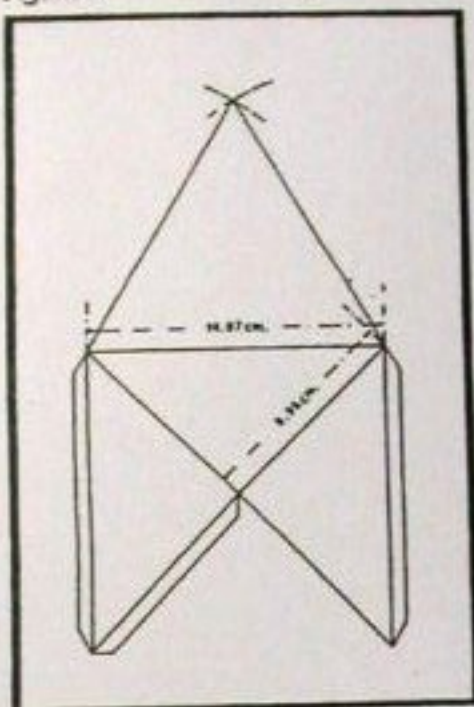
lació entre l'aresta del tetràedre (t) i la del cub (c) serà $\sqrt{2}$.

Així un cub està format per un tetràedre més quatre piràmides (Fig. 6) de forma i dimensions donada per la següent plantilla (Fig. 7) ja que

$$t = \sqrt{2} \cdot c = 14'14 \text{ cm}$$

(en la plantilla s'ha descomptat l'espessor de la cartolina)

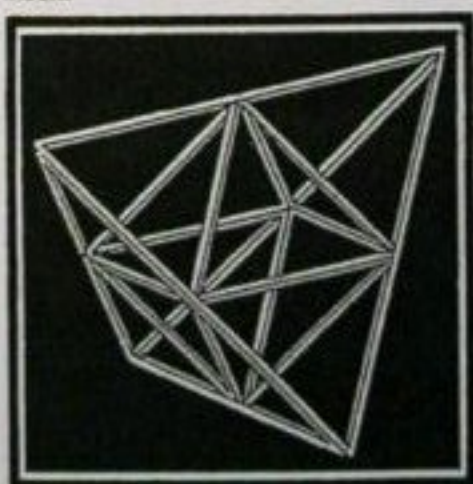
Figura 7



3. Tetràedre - Octàedre

Dins un tetràedre es pot inscriure un octàedre regular tal que els seus vèrtexs siguin els punts mitjans de les arestes del tetràedre (Fig. 8).

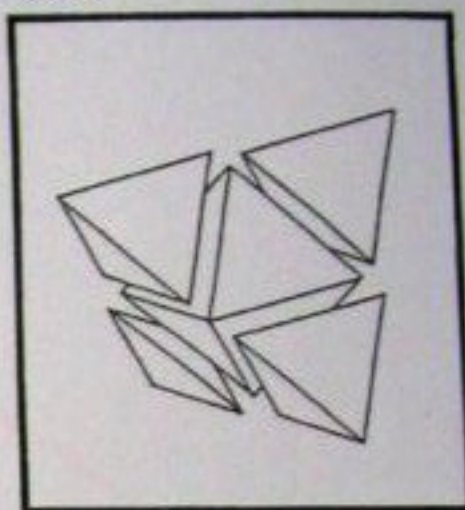
Fig. 8. El tetràedre amb un octàedre inscrit



Així cada cara del tetràedre té inscrit un triangle equilàter petit de costats les paral·leles mitges de les arestes del tetràedre gran, per tant la relació entre l'aresta de l'octàedre (θ) i la del tetràedre és $1/2$.

Així un tetràedre es compon d'un octàedre més quatre tetràedres petits adossats alternativament en les seves cares (Fig. 9).

Figura 9



A efectes pràctics es prendrà la mesura de

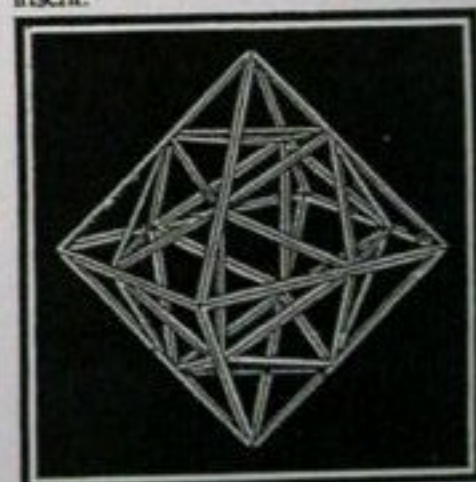
$$6,95 \text{ cm} \approx \frac{t}{2} - 0,08 \text{ cm}$$

per les arestes dels tetràedres petits.

4. Octàedre - Icosàedre

Dins d'un octàedre podem inscriure un icosaèdre regular, tal que els seus vèrtexs estan situats en els punts que divideixen cada aresta de l'octàedre en dues parts, a i b de raó el nombre d'or (Fig. 10)

Fig. 10. L'octàedre amb un icosaèdre inscrit.



Per tant la relació entre l'aresta de l'icosàedre (i) i la de l'octàedre (θ) serà

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (3 - \sqrt{5}),$$

$$\text{ja que } i = \sqrt{2} \cdot b \cdot \frac{1}{2}$$

$$\theta = a + b = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 \right) \cdot b$$

Així un octàedre es compon d'un icosaèdre més sis peces en forma de bipiràmide triangular obliqua (Fig. 11) de la qual es dona la plantilla següent (Fig. 12)

$$i = 3,43 \text{ cm}$$

$$b = 2,62 \text{ cm}$$

$$a = 4,24 \text{ cm}$$

$$i = \frac{\sqrt{2}}{2} (3 - \sqrt{5}) \theta = 0,1 \text{ cm}$$

$$b = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \theta = 0,08 \text{ cm}$$

$$a = \theta - b = 0,13 \text{ cm}$$

amb $\theta = 7,07 \text{ cm}$

Així queda completada la descripció de les peces del trencaclosques, que passem a resumir en el llistat següent:

- 1 Icosàedre regular de 3,4 cm d'aresta (nucli)
- 6 Peces (Fig. 12)
- 4 Tetràedres de 6,95 cm d'aresta
- 4 Peces (Fig. 7)
- 6 Peces (Fig. 4)
- 1 Dodecàedre de 6,18 cm d'aresta (contenedor)

Figura 11

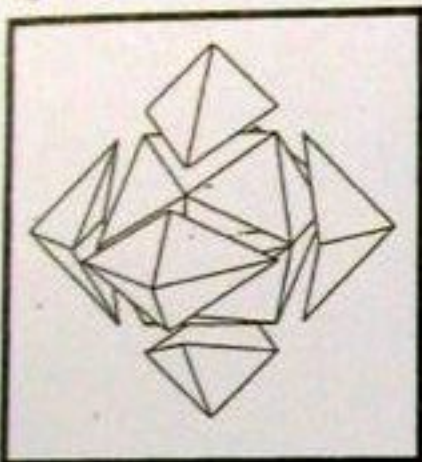
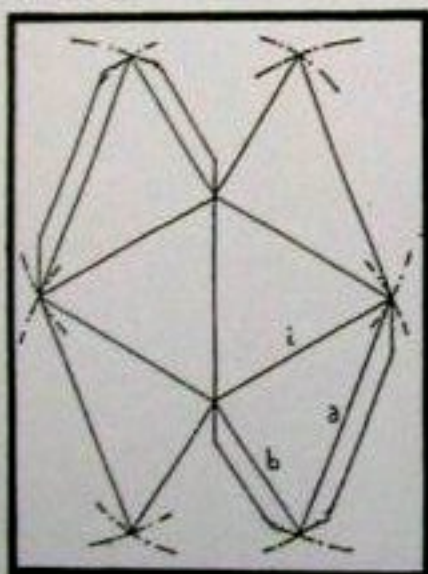


Figura 12



Proposta didàctica

L'objectiu general d'aquesta proposta està encaminat a afavorir la percepció, visualització i intuïció de certes estructures de l'espai, que aquí se centren en l'objectiu específic de fer veure les relacions qualitatives i quantitatives que hi ha entre

els cinc poliedres regulars convexos, ressaltant la percepció de l'equivalència entre l'espai buit i l'espai ple, així com també la consideració de la teoria del color en la forma dodecèdrica final del trencaclosques, en el sentit d'una ampliació de la significació del dodecèdre platònic com l'univers, el tot. De manera que si l'icosàedre és l'aigua i el pintem de verd, l'octàedre —l'aire— de blau, el tetràedre —foc— de roig i el cub —terra— de marró, és lògic que el dodecèdre que els conté a tots, contingui tots els colors; per això en la figura 17 estan representats els tres colors primaris (amb línies) i els tres secundaris (amb punts) de manera que en un vèrtex del cub-dodecèdre hi concorren tres cares de primaris i entre elles els secundaris,

producte de les seves respectives mesclures.

La proposta va dirigida a alumnes de 7è o 8è d'EGB que se suposa que han fet les primeres descripcions dels poliedres regulars. De tota manera, abans de presentar als alumnes les activitats d'aquesta proposta es fa per a tot el grup classe una introducció amb un contingut similar a la d'aquest article amb la intenció que quedi après el que són els poliedres regulars. A continuació se segueix una metodologia experimental, presentant a cada petit grup de 2 o 3 alumnes tot un seguit d'activitats sistematitzades, que els permetin, a partir d'una experimentació, descobrir per ells mateixos les relacions objecte d'investigació, tal com es detalla a continuació:

Poliedres regulars	Trencaclosques	Nom	Data
	1		

Poliedres regulars	Trencaclosques	Nom	Data
	2		

Material

- Cartolina blava i 32 gomets verds
- tisores, cùtex
- cola, cel·lo

Treball a realitzar

1. Construeix una estructura d'octàedre tal com s'indica aquí:

Figura 15

2. Construeix sis peces iguals amb la plantilla de la figura 12. Enganxa un gomet en els centres dels triangles equilàters.
3. Construeix un icosàedre de 3,4 cm d'aresta. A continuació col·loca aquest icosàedre juntament amb les sis peces anteriors a dintre de l'estructura de l'octàedre.

Descobriments.....

Com estan col·locades les cares de l'icosàedre que toquen les de l'octàedre?

Poliedres regulars	Trencaclosques	Nom	Data
	3		

Material

- Cartolina vermella i 4 gomets blancs
- tisores, cùtex
- cola, cel·lo

Treball a realitzar

1. Construeix una estructura de tetràedre regular tal com s'indica en el patró següent:

Figura 14

2. Construeix quatre tetràedres petits de 6,95 cm d'aresta. Enganxa un gomet en una de les cares de cada tetràedre, i col·loca'ls en els racons de l'interior de l'estructura del tetràedre gran.

Descobriments.....

Poliedres regulars	Trencaclosques	Nom	Data
	4		
Material — Cartolina marró, 4 gomets vermells — tisores, cúter — cola, cel·lo			
Treball a realitzar 1. Construeix una estructura de cub tal com s'indica en el patró següent: 2. Construeix quatre piràmides amb la plantilla de la figura 7. Enganxa un gomet en el centre de les cares que siguin triangles equilàters. 3. Col·loca les quatre peces anteriors en els «racons» interiors de l'estructura del cub (si et cal ajuda't amb el cel·lo).			
Descobriments			
¿Quina forma té el nucli que queda buit i com es pot relacionar amb l'estructura exterior?			

Figura 13

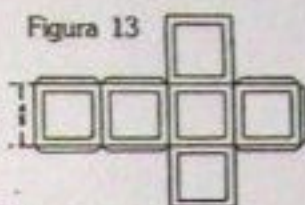
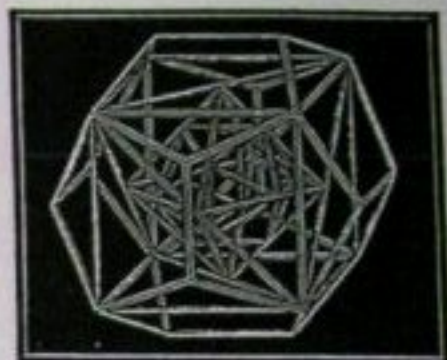
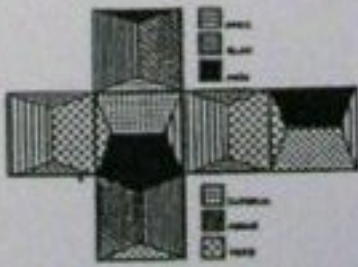


Figura 18



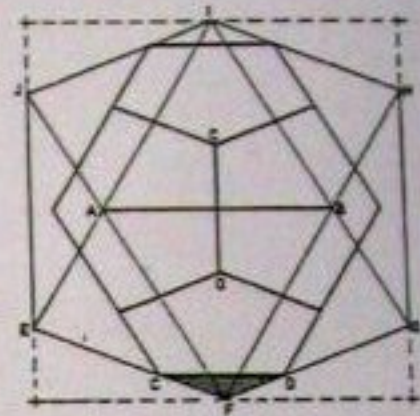
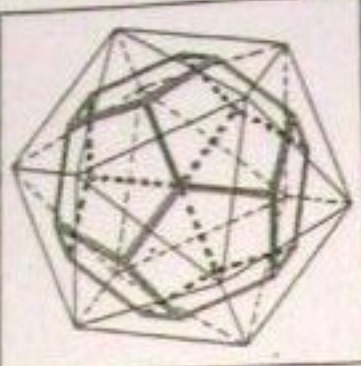
Finalment fem notar que encara que aquesta proposta didàctica es plantegi per a alumnes de 7è i 8è d'EGB, creiem que també és adequada tant per a nivells superiors (BUP, FP) com en el cicle mitjà amb les degudes limitacions; l'únic que ha de canviar són les tècniques de treball i el nivell d'expressió i formalització dels descobriments. Cal també remarcar que en aquestes activitats tant es treballen els continguts de la geometria espacial escolar com són la posició de rectes i plans a l'espai, la incidència, etc., com els conceptes de proporcionalitat i simetria.

Javier Carvajal.

Poliedres regulars	Trencaclosques	Nom	Data
	5		
Material — Cartolina blanca, 6 gomets marrons i 6 retoladors de color roig, groc, blau, taronja, morat i verd, — tisores, cúter — cola, cel·lo — 12 pentàgons d'acetat de transparència de 4 cm de costat.			
Treball a realitzar 1. Construeix una estructura de dodecaedre tal com s'indica aquí:			
			
Deixa oberta una «teulada» i enganxa els pentàgons transparents en les finestres de les cares. 2. Construeix sis peces iguals amb la plantilla de la figura 4. Col·loca-les juntament amb el cub de l'activitat 1 a dintre de l'estructura de dodecaedre i, a continuació, pinta les cares del dodecaedre resultant, segons la coloració següent:			
			
Descobriments			

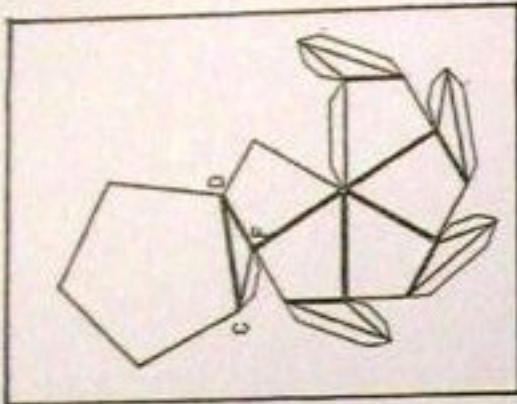
* L'autor agraeix la col·laboració de Josep Ma. Fortuny i les mestres Montse Arnau i Montse Gargallo en l'elaboració d'aquest treball.

- ICOSAEDRO
- DODECAEDRO.



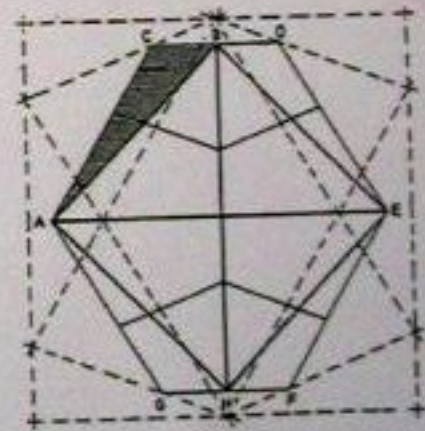
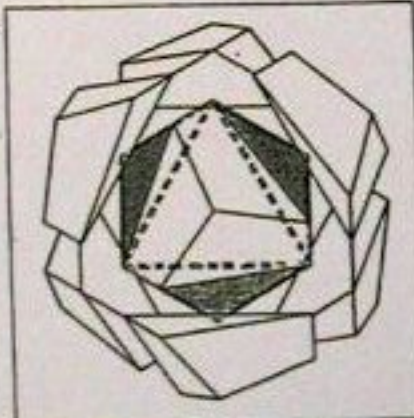
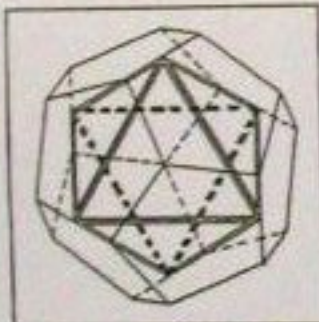
- LA SECCIÓN PRINCIPAL DEL ICO: E, F, G, H, I, J, DEFINE EL ÁNGULO DIEDRO =

$$\widehat{C, F, D} = 138^{\circ} 11'$$



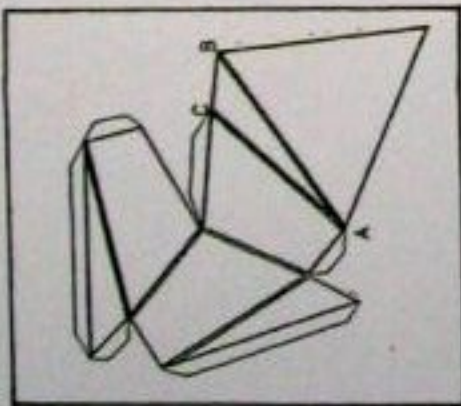
- DESARROLLO
- 12 PIEZAS (VÉRTICES DEL ICO = CARAS DEL DODEC.)

- DODECAEDRO
- OCTAEDRO.



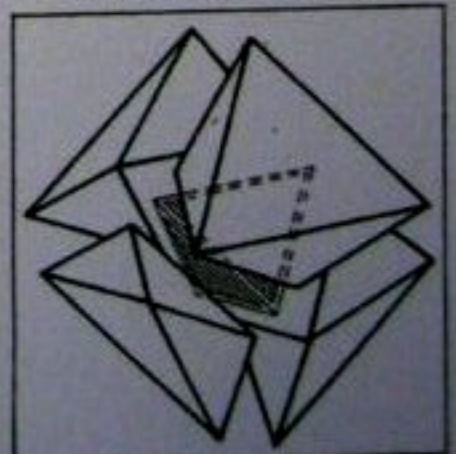
- LA SECCIÓN PRINCIPAL DEL DODEC: A, C, D, E, F, G. DEFINE EL ÁNGULO DIEDRO =

$$\widehat{A, C, B} = 116^{\circ} 34'$$

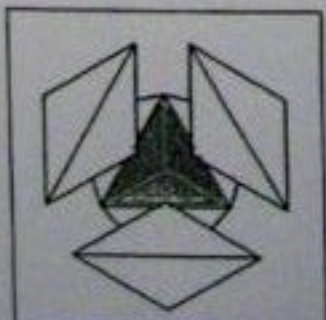
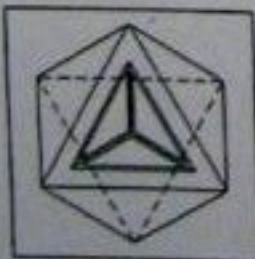


- DESARROLLO
- 8 PIEZAS (CARAS DEL OCTAEDRO)
- CARAS DEL DODEC: $(3 \frac{1}{2}) \cdot 8 = 12$

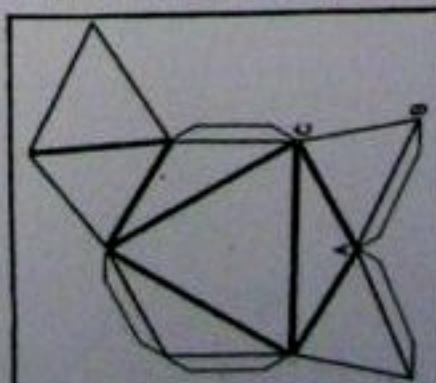
- OTRA VISTA DEL DODEC



- OCTAEDRO
- TETRAEDRO.



- DESARROLLO : 4 PIEZAS



CAP. XI

... DEL CUADERNO DE APUNTES

Combinaciones varias

- CUBO
- TETRAEDRO
- OCTAEDRO
- CUBO

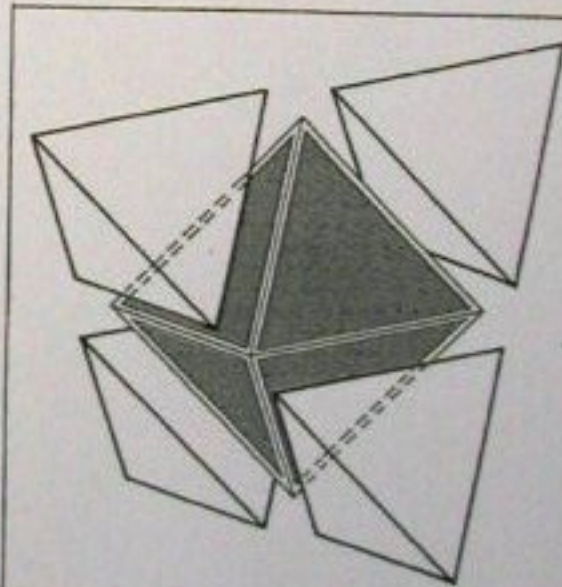
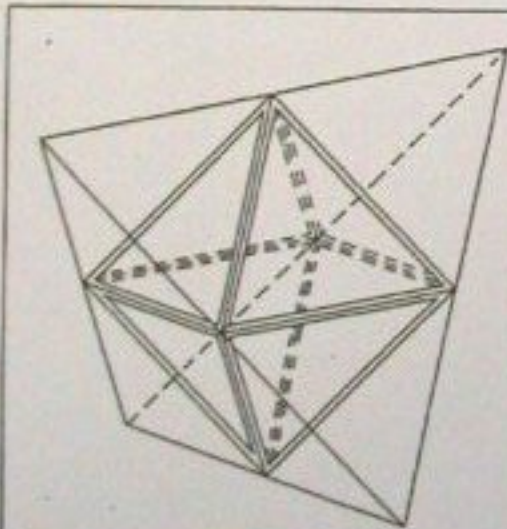
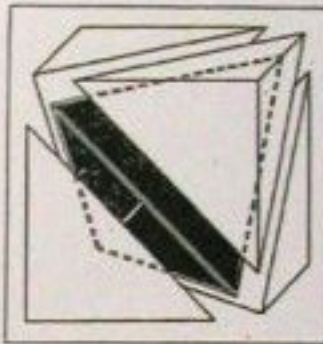
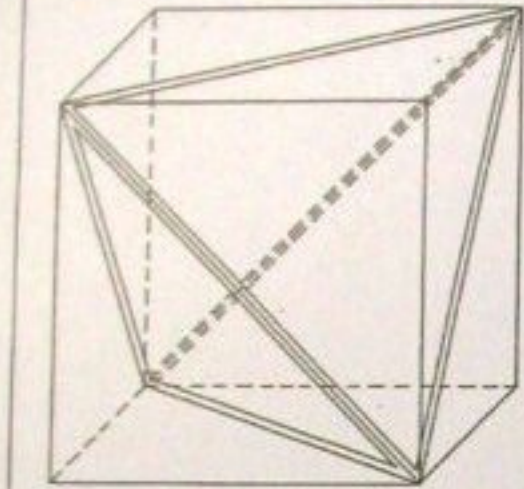


- CUBO: $a = 1$
- TETRAEDRO: $a = \sqrt{2}$

RESTO:

- 4 pirámides: $\frac{1}{6}$ CUBO

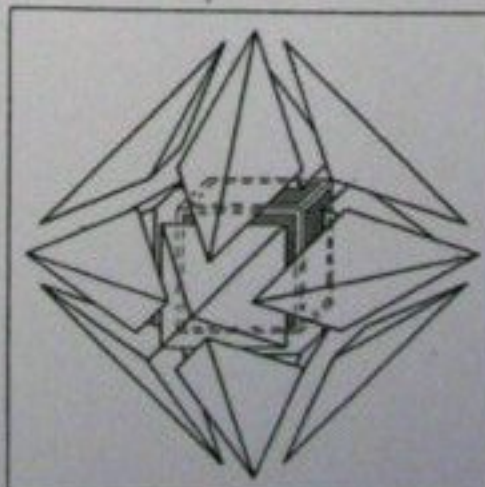
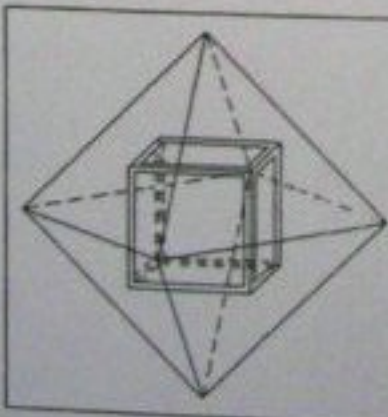
$$\frac{(S_b: 2) a}{3}$$



$$\text{OCTAEDRO: } a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

RESTO:

$$+ \text{TETRAEDROS: } a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\text{CUBO: } a = \frac{1}{3}$$

RESTO:

- 12 BIPIRÁMIDES

$$a' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a'' = \frac{1}{3}$$

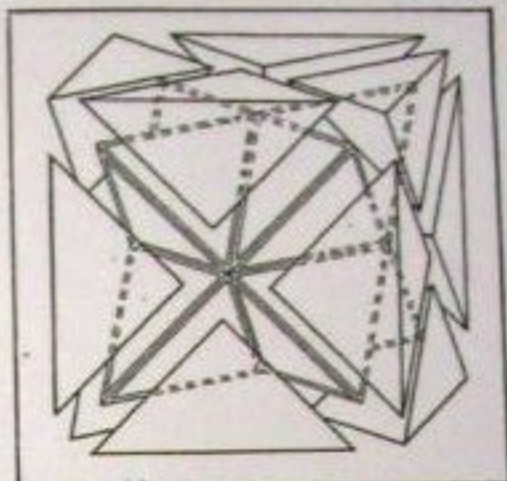
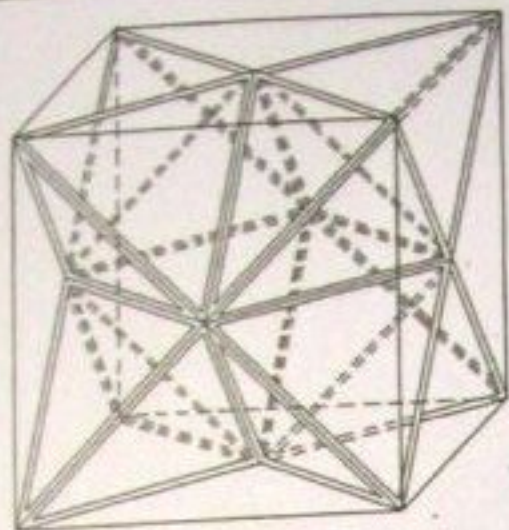
$$a''' = \frac{2}{3} \text{ alt. } \Delta \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- 6 PIRÁMIDES

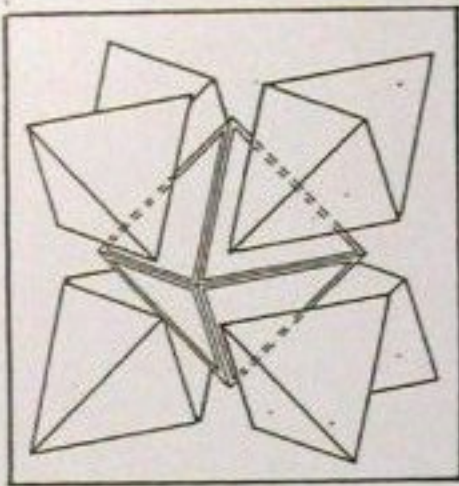
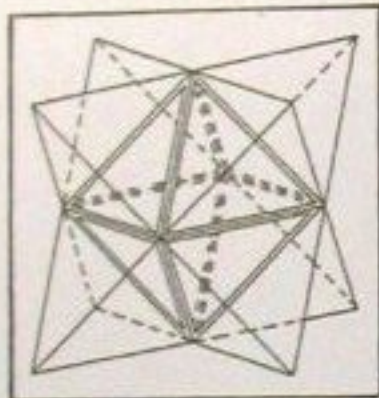
$$b' = \frac{1}{3}$$

$$b'' = \dots a'''$$

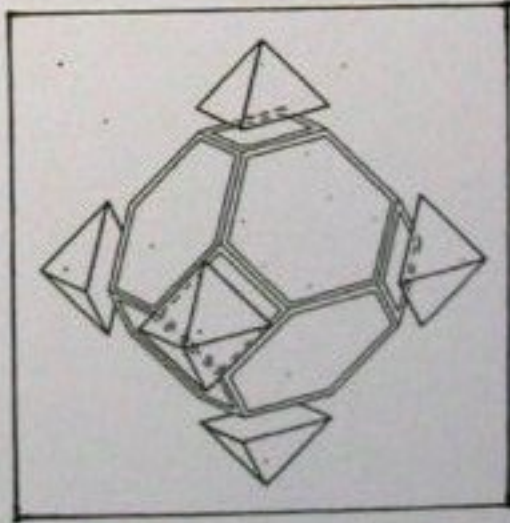
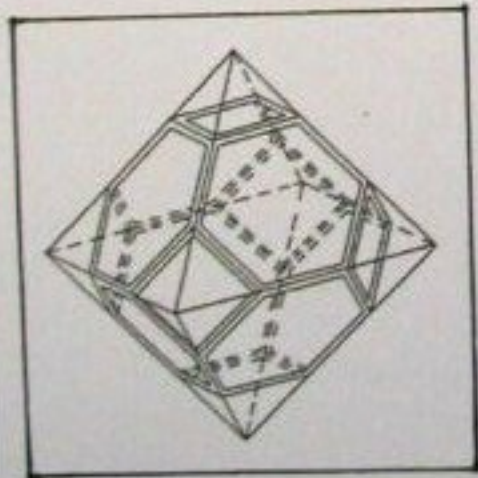
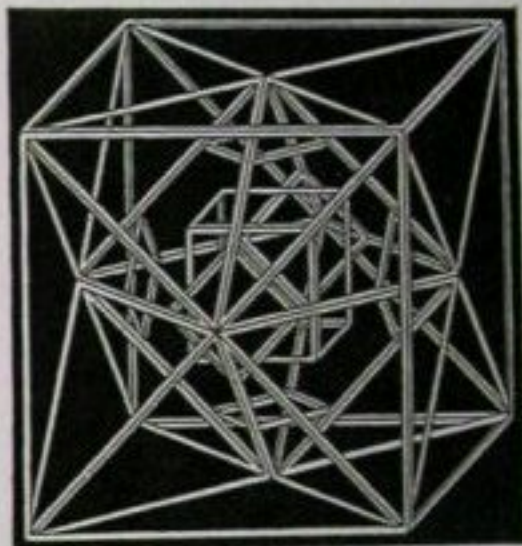
RESTO!
- 12 BIPIRÂMIDES $a' = 1$
 $a'' = \frac{\sqrt{2}}{2}$



CUBO
- OCTAEDRO ESTRELAADO
 (OCTAEDRO TERRA - TERRA)
- OCTAEDRO
- KELVIN
 (OCTAEDRO TRUNCADO)
- CUBO.



RESTO!
- 8 TETRAEDROS, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

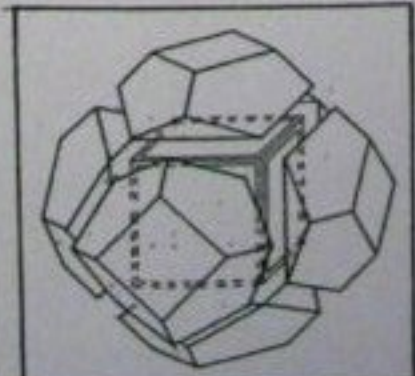
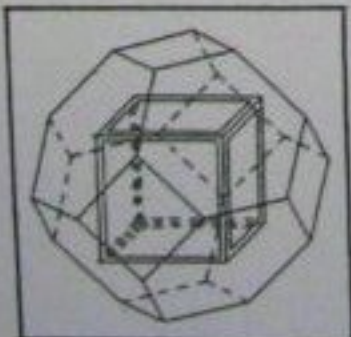


KELVIN: $a = \frac{\sqrt{2}}{6}$

RESTO!

- 6 PIRÂMIDES $\square$

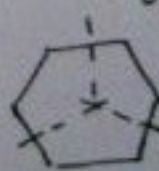
$$a = \frac{\sqrt{2}}{6}$$



CUBO: $a = \frac{1}{3}$

RESTO:

- 6 VOLUMETRES DASAS



$$a' = \frac{1}{3}$$

$$a'' = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$a''' = \frac{\text{ALTURA EXTO.}}{2}$$



¿PUEDE UN DISEÑO MATEMÁTICO UN MOSAICO APARECER QUE SE NO APARECE COMO POSIBLE, LO PROHIBE. ¿POSIBILIDAD IMPOSIBLE?.....

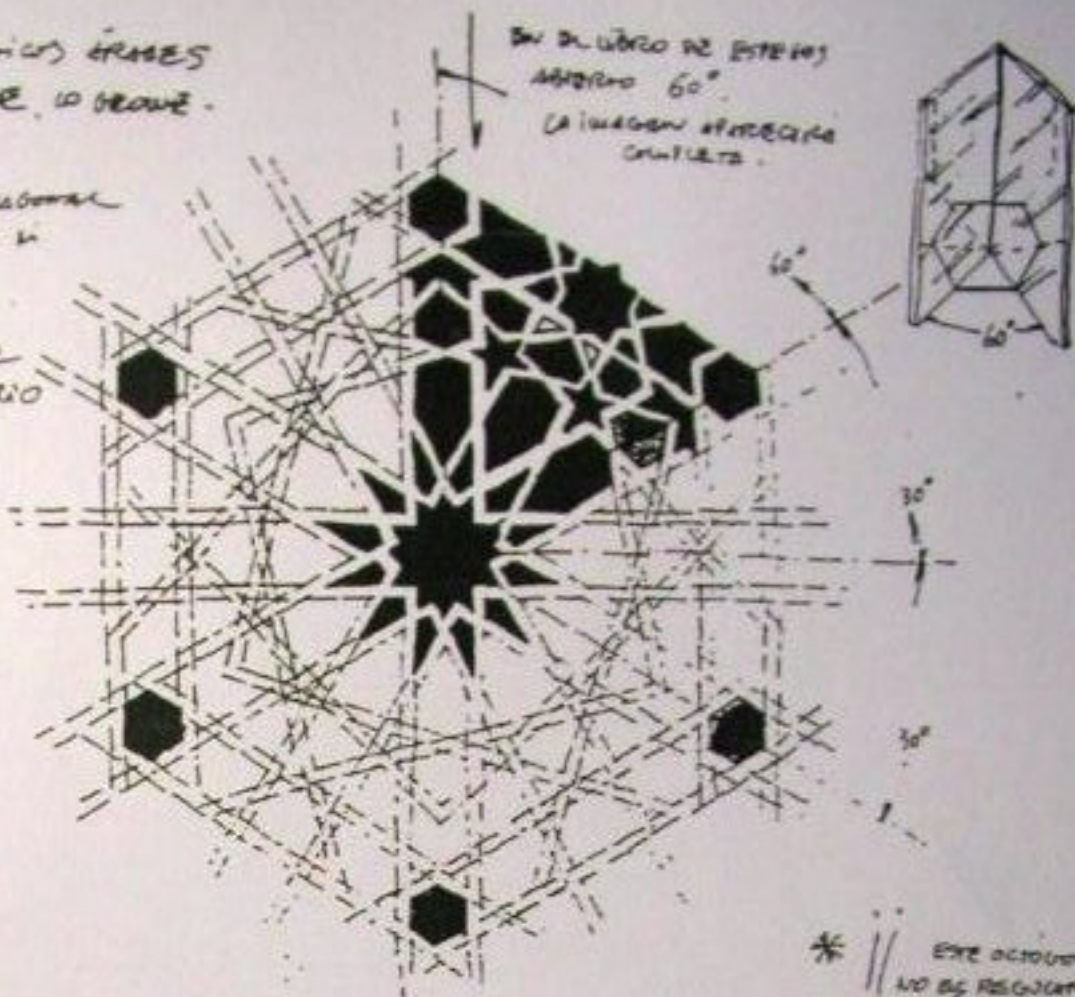
A PRIMERA VISTA EN UNA RETICULA EXAGONAL NO "CABEN" UN OCTÓGONO EXTENDIDO Y UN ESTRELLA DE CINCO PUNTA.

SÓLO LA SUPERPOSICIÓN DE TRES RETICULAS ROTACIONES GIRADAS ENTRE SI CON UNO 30° DESVÍAN EL MOSAICO DE ESTE MOSAICO.

ESTOS MOSAICOS PERFECTAMENTE CUBRIERON EN SU CONJUNTO.

(3 CUBRIMIENTOS x 4 VERTICES = 12)

(12 ES MÚLTIPLO DE 6.)



FUENTE EN UNA SACIÓN DE LA MEDINA DE FEZ.

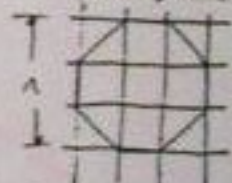


- OTRO TRUQUE!

¿CÓMO PUEDE APARECER UN OCTÓGONO REGULAR EN UNA RETICULA CUBICADA?

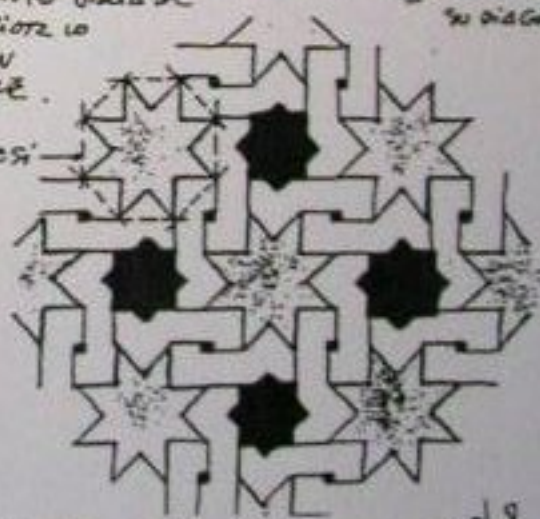
- SÓLO LA SUPERPOSICIÓN DE LAS SERIES DE CUBICADOS Y EN DESPLAZAMIENTO BASA EL INTERIORE LO HAYAN POSIBLE.

* ESTE OCTÓGONO NO ES REGULAR.



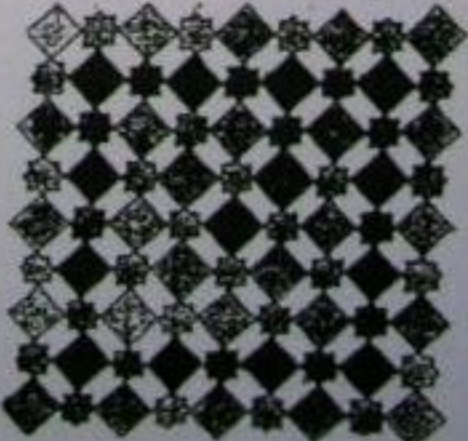
EL LADO DEL OCTÓGONO NO ES IGUAL A SU DIAGONAL.

* ESTOS



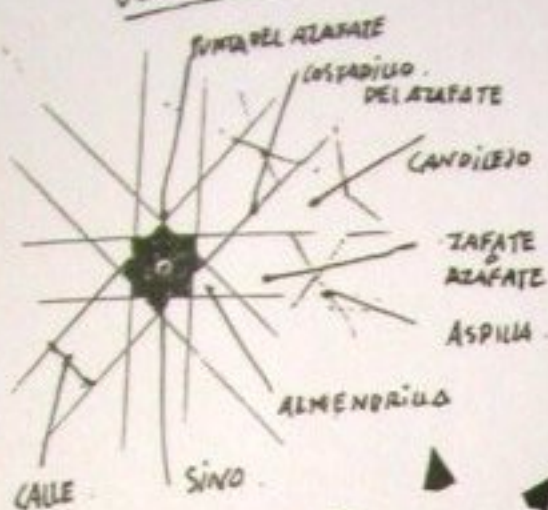
* CÁLCULO DEL OCTÓGONO: =

$$= \sqrt{2} - 1 \quad \neq \frac{1}{3} \quad \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

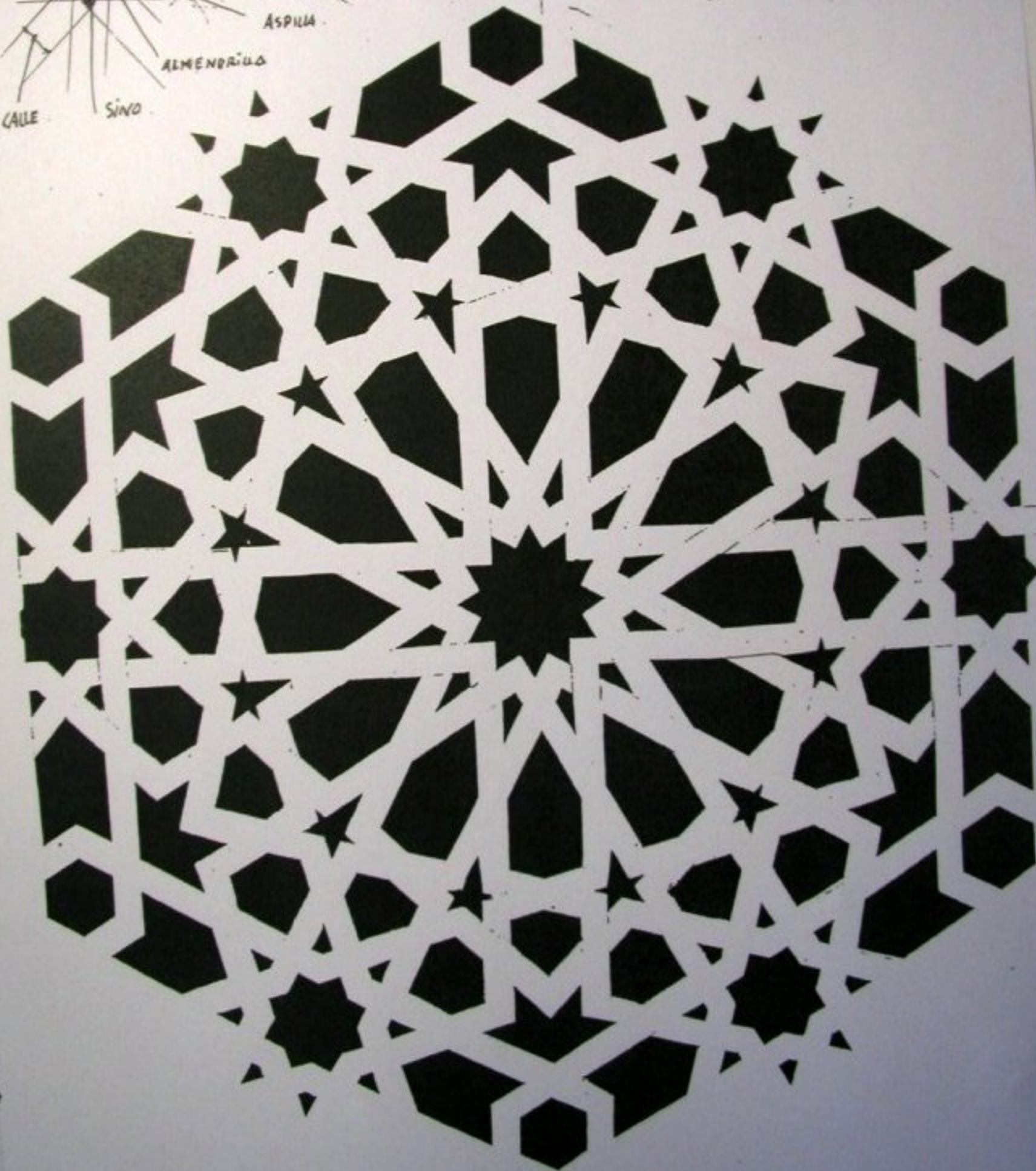


EL ÁNGULO DE ESTE MOSAICO ES OBTENIDO AL CONECTAR ENTRE SI LAS VERTICES DIAGONALES DE LA RETICULA Y LA VERIFICACIÓN DEL ÁNGULO.

VOCABULARIO

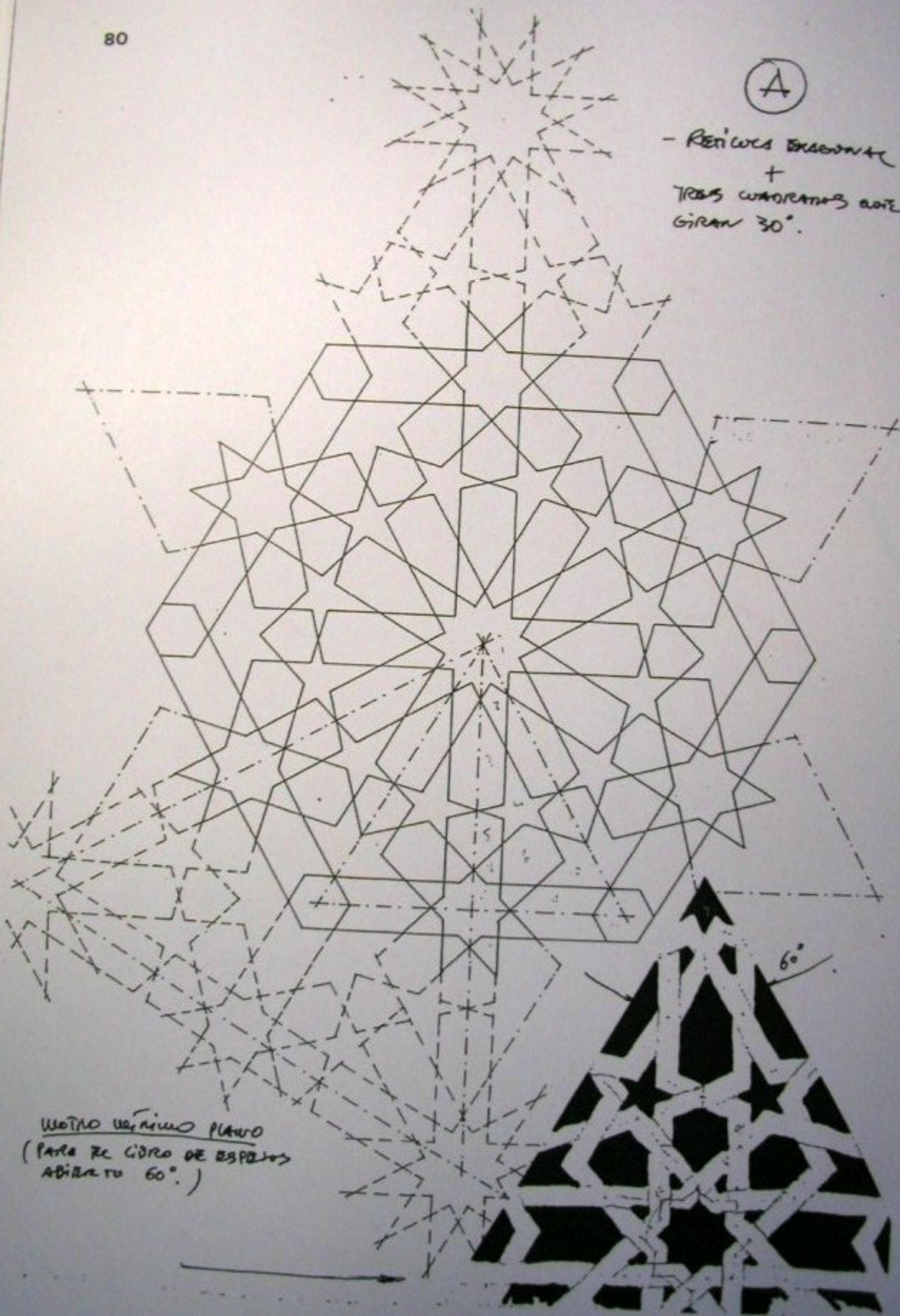


MOSAIOS
ARABES



A

- Retículas hexagonales
+
Tres waveforms a 30°
Giran 30°.

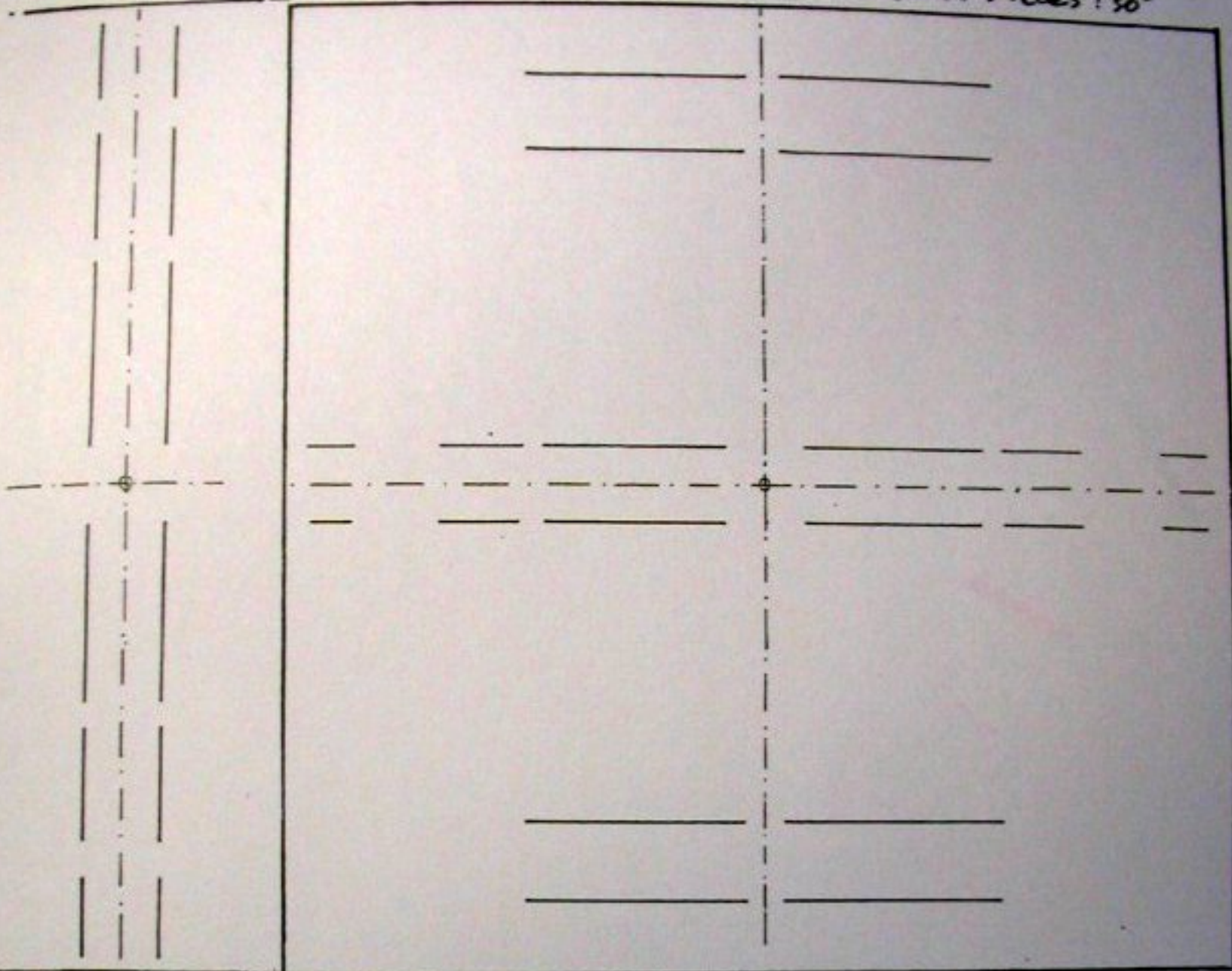


MOTIVO hexágono plano
(PARA RE CÍRCULO DE ESPEROS
ABIRRU 60°.)

Motivo mínimo girar del mosaico (A)

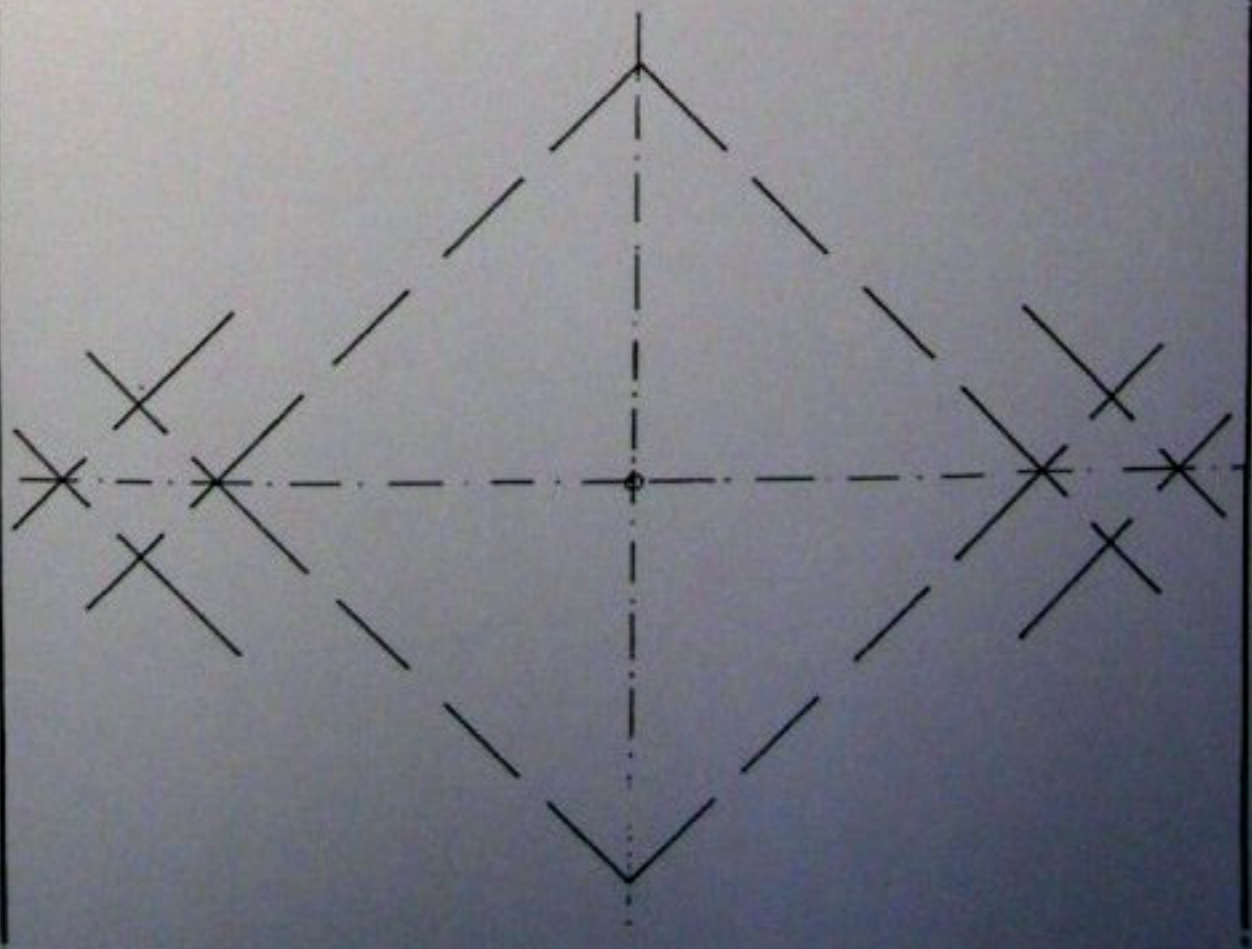
81

- DIAGONAL Y DOS CAROS DEL TRIÁNGULO: GIRAR 3 VECES: 30°



TRES SECTORES
DEL TRIÁNGULO

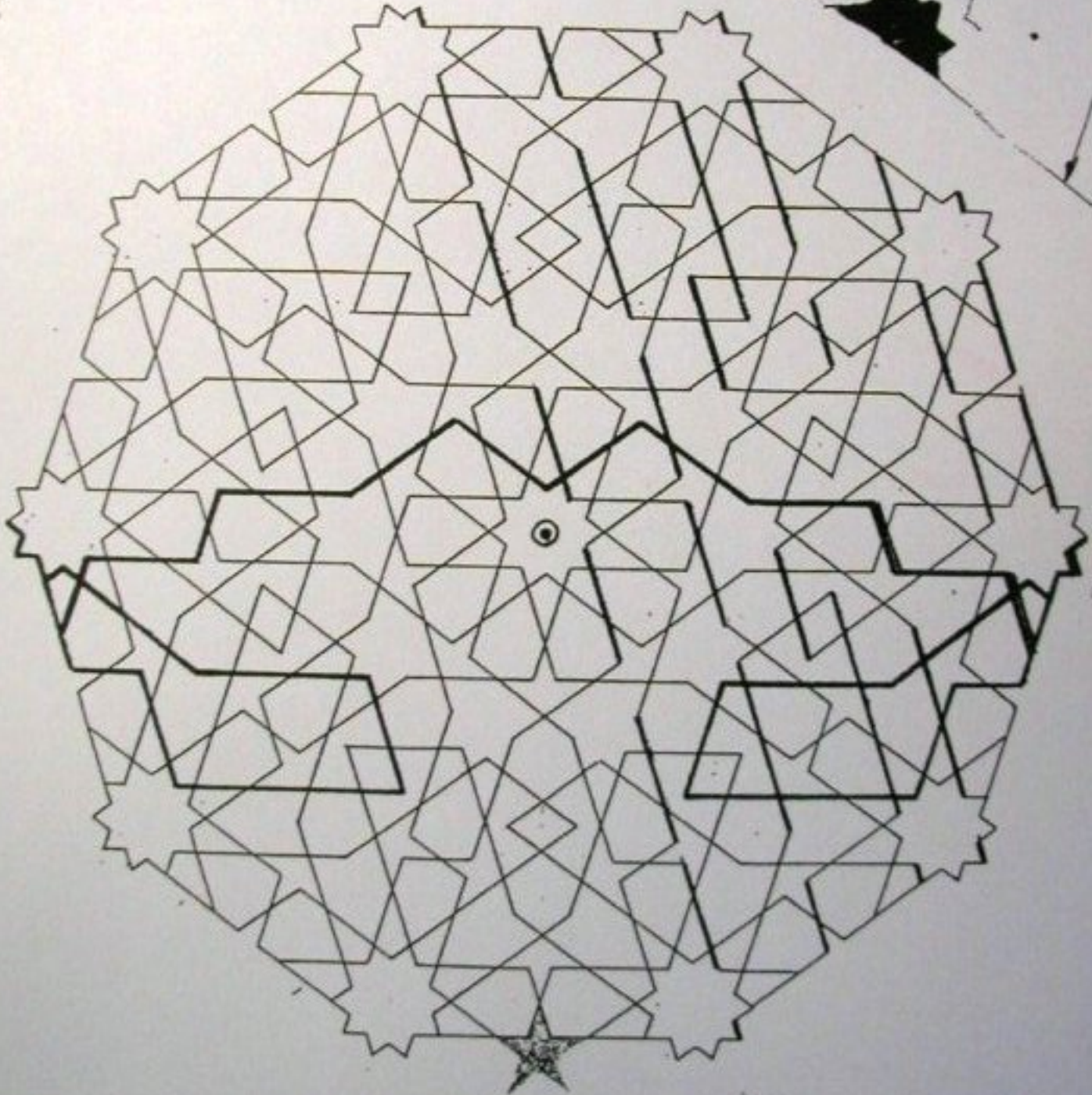
TRIÁNGULO SUR
GIRAR 3 VECES
 30°



Mosico

(B)

(Motto) unus
 - flora
 - fructus

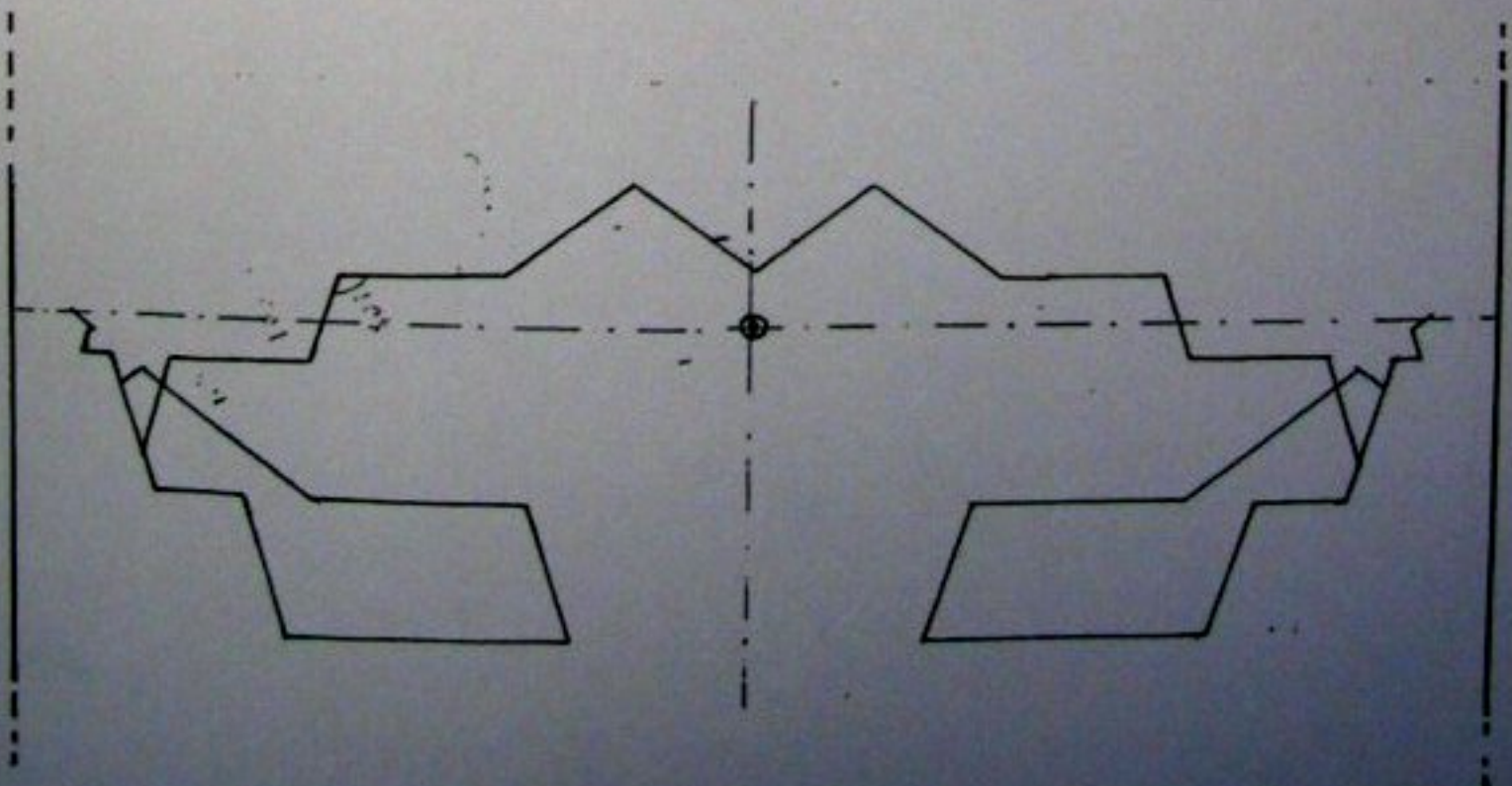
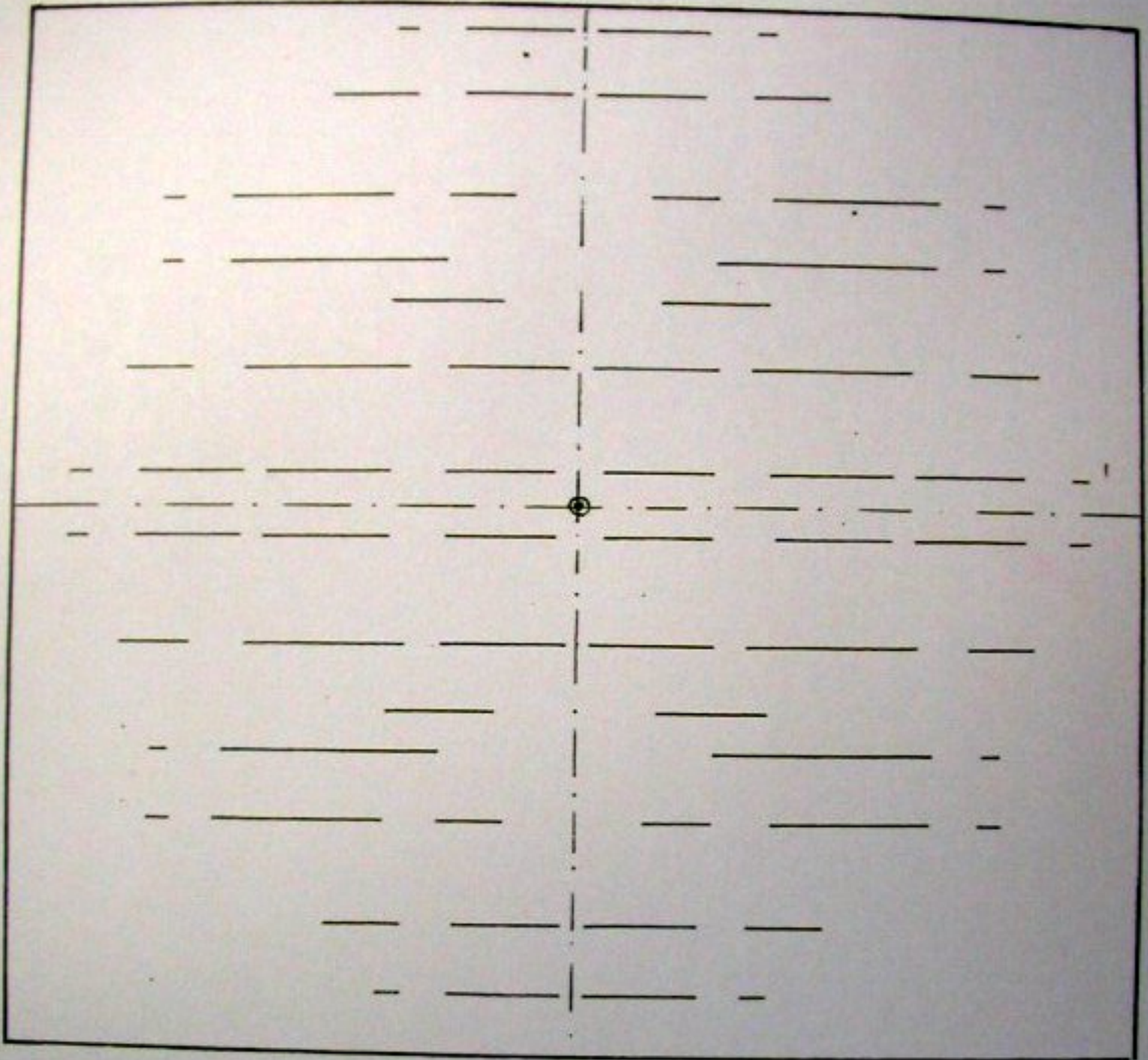


360

180

(Motto) unus
 - flora
 - fructus

¿cuantos GROS. ?



Pirámides poliédricas especulares . 140. 13 .

- POLIGONOS Y POLIEDROS : REPETICIÓN SIMÉTRICA DE CARAS O CARAS .

- ESPEJOS :

- REPETICIÓN
- SIMETRÍA

- CIBRO DE ESPEJOS

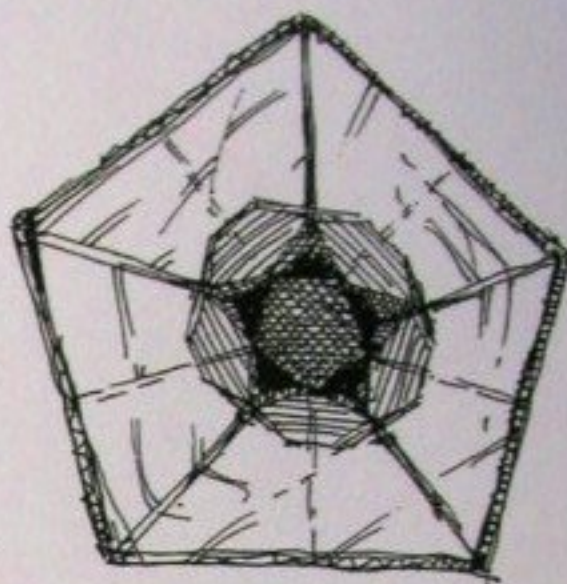


- ESTUDIO DE POLIGONO

- ANGULO INTERIOR
- LACERADOS
- LACERADOS
- MOSAICOS ..



POLIEDRO .



PIRÁMIDES : ESTUDIO DE POLIEDROS

(LOS PLANOS INCLINADOS PRODUCEN DE VOLÚMEN)

- ANGULO DIEDRO
- REALIZAR EL ESPACIO
- RETÍCULAS ESPACIALES
- DIVERSIDADES ..

OCURRENTO
(5 PIEZAS)

40°

TETRAEDRO
(5 PIEZAS)

109°28'

63°26'

41°49'

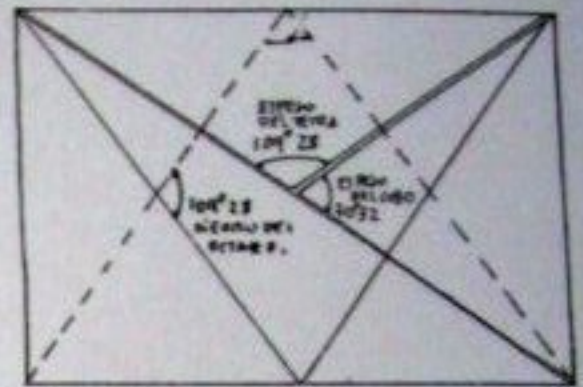
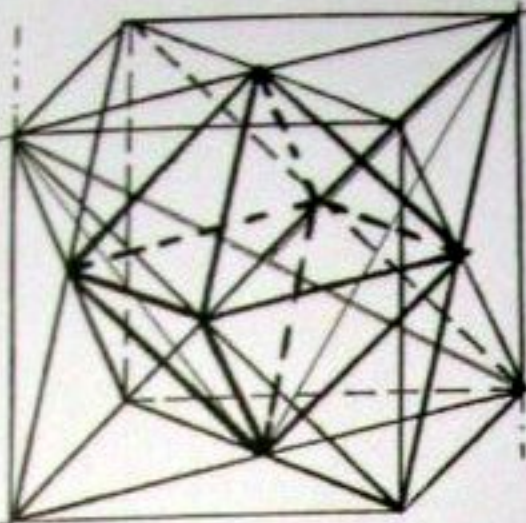
70°32'

ICOSAEDRO
(3 PIEZAS)

DODECAEDRO
(5 PIEZAS)

(4 PIEZAS +)
0800

DESARROLLO DE UNA CARA DE LA PIRÁMIDE



SECCION RECTANGULAR DEL CUBO

$$\begin{aligned} \text{VIEDRO DODE} + \text{ESPEJO ICO} &= 2 \text{ RECTOS} \\ \text{" ICO} + \text{" DODE} &= \text{" "} \end{aligned}$$

$$116^{\circ} 34' + x = 180^{\circ}$$

$$x = 63^{\circ} 26' = \text{ICO}$$

$$138^{\circ} 11' + x = 180^{\circ}$$

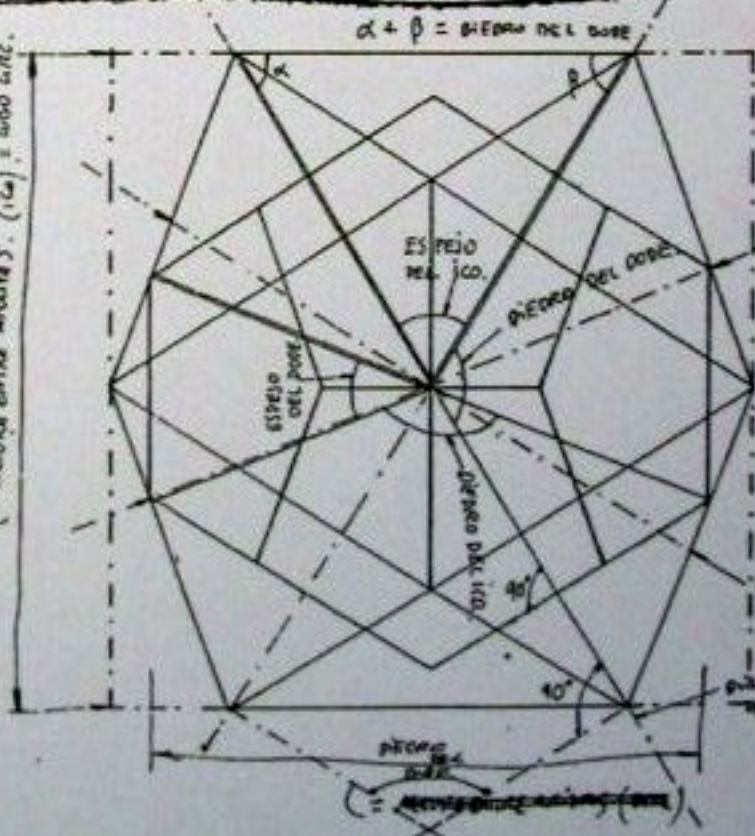
$$x = 41^{\circ} 49' = \text{DODE}$$

$$\text{ESPEJO DODE} + \text{DIEDRO PENTAGONAL} = 2 \text{ RECTOS}$$

!!!

DESEÑOS:
CUBO, DODECAEDRO, TETRAEDRO, OCTAEDRO, Icosaedro
a las caras del cubo.

SECCION RECTA:
ALTA: 14, 5' 18".
(= ALTA ENTRE ARISTAS. (ICO) = 14, 5' 18".



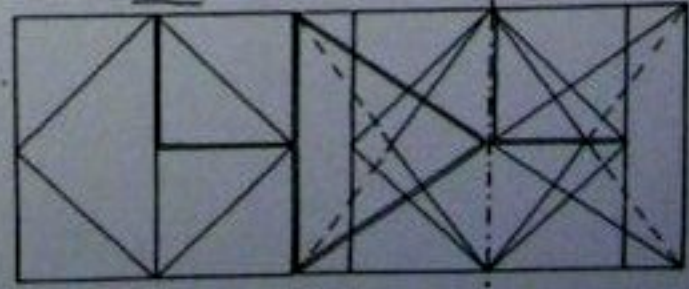
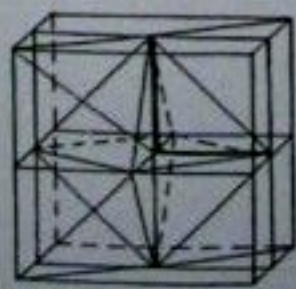
PIGONAL DODE.

16, 5' 18"

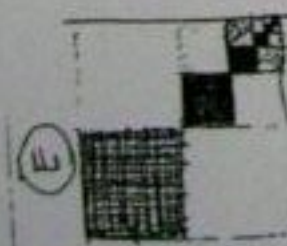
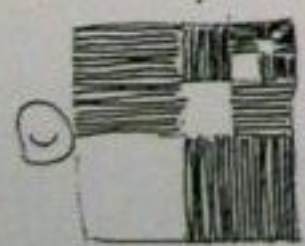
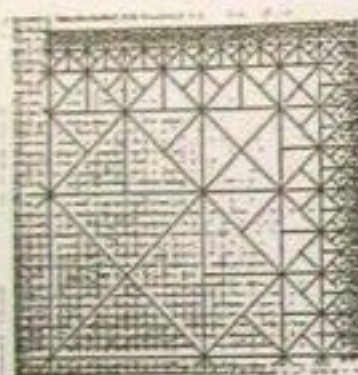
ALTA ICO.

PIGONAL DEL ICO

$$\begin{aligned} 180^{\circ} - 70^{\circ} 32' (\text{DIEDRO TETRA}) &= 109^{\circ} 28' (\text{ESPEJO TETRA}) \\ 180^{\circ} - 109^{\circ} 28' (= \text{PIGONAL}) &= 70^{\circ} 32' (\text{ESPEJO CUBO}) \\ 180^{\circ} - 90^{\circ} (\text{DIEDRO CUBO}) &= 90^{\circ} (\text{ESPEJO OCTAEDRO}) \end{aligned}$$



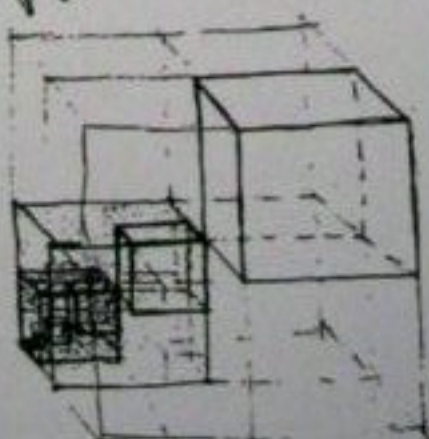
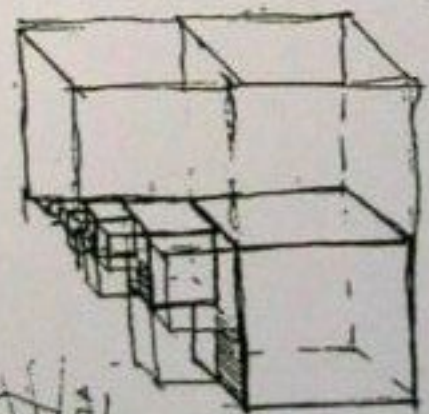
VIEDRO: DEL MUNDO DEL ESPACIO.



EL DOBLE DE NEGROS
1/3 BLANCOS
2/3 NEGROS

EL DOBLE DE NEGROS
1/3 BLANCOS
2/3 NEGROS

EL DOBLE DE NEGROS
1/3 BLANCOS
2/3 NEGROS



1/3

1/3

1/3

1/3

1/3

1/3

1/3

1/3

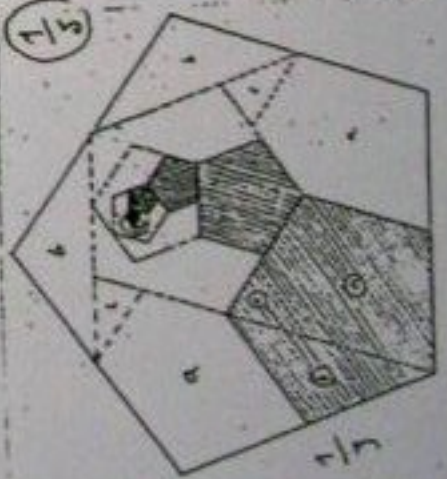


2A = B =

X



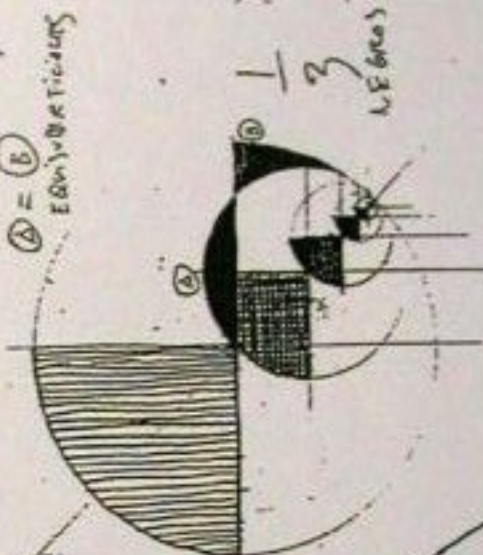
EL DOBLE DE NEGROS
1/3 BLANCOS



1/3



1/3



A = B
EQUILIBRIO

2B = A

1/3 BLANCOS

1/3 NEGROS



¿OTRO DE PERICIA NEGRO? ...
2/3 BLANCOS ...
(PERICIA EN LA MANEJA DE LAS PIEZAS ...)

SUCESIÓN RECURRENTE
1/3

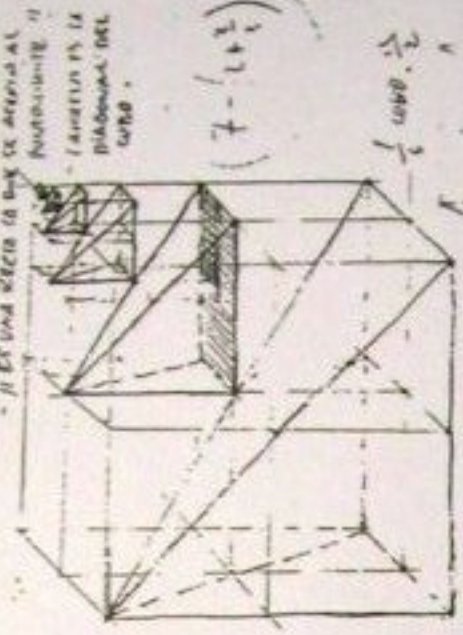
¿Y CON NEGROS?

División serie 1/3 del plano
División serie 1/7 del volumen

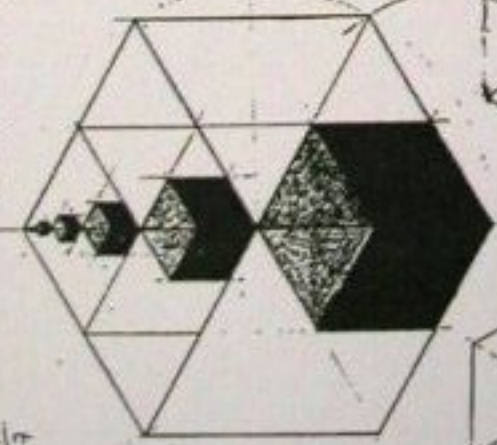
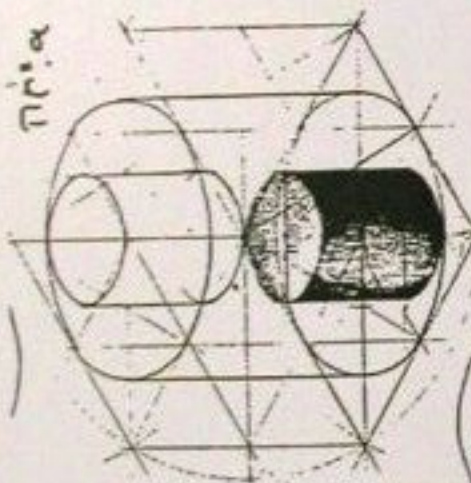
PIRAMIDE

$\frac{1}{3}$ del cubo = $\frac{1}{3}$ del cubo

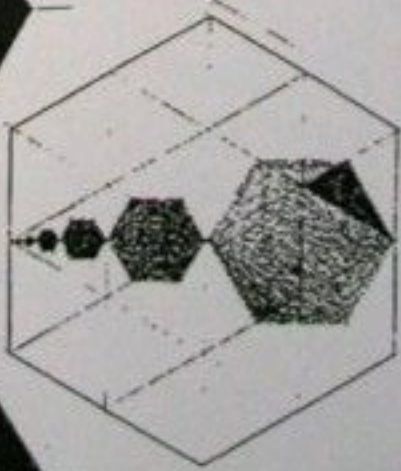
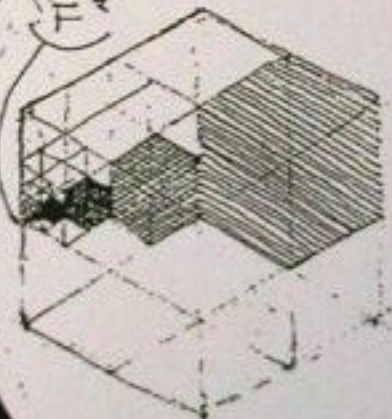
- El cubo mágico
- División mágica
- $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{7}$



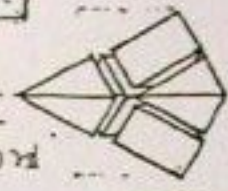
PIRAMIDE
- División mágica
- $\frac{1}{3}$ del cubo



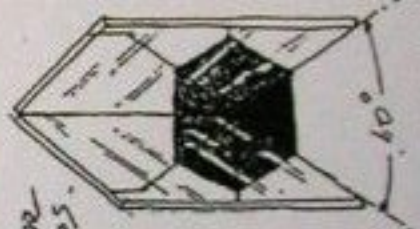
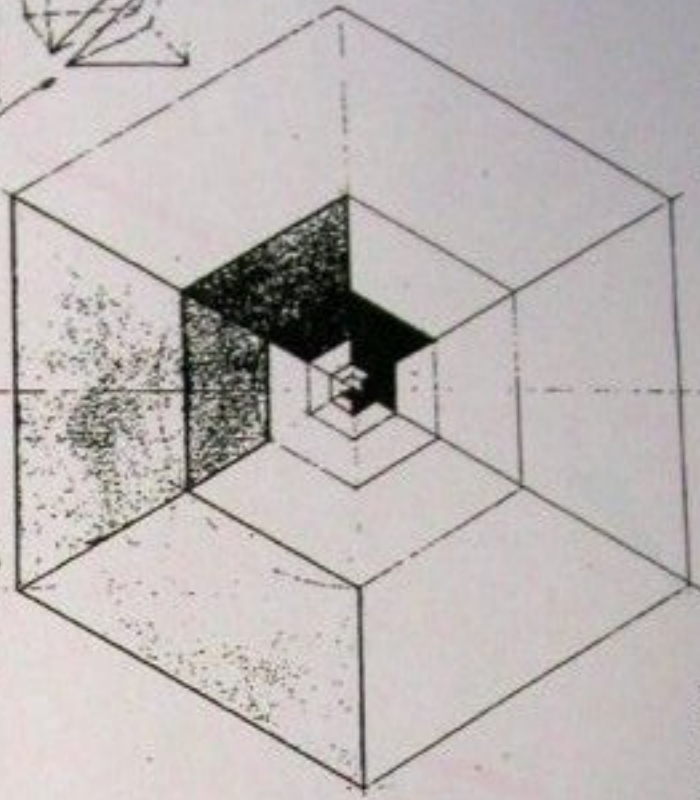
PIRAMIDE
- División mágica
- $\frac{1}{3}$ del cubo



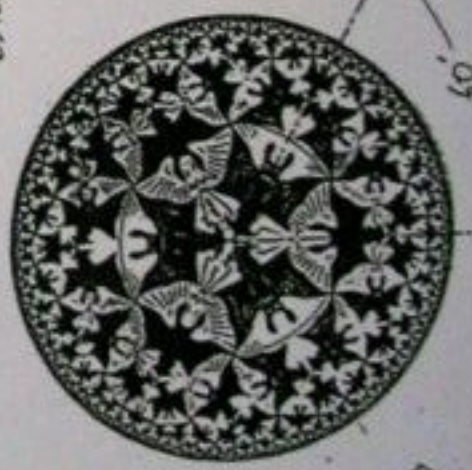
PIRAMIDE
- División mágica
- $\frac{1}{3}$ del cubo



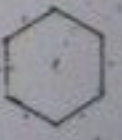
PIRAMIDE
- División mágica
- $\frac{1}{3}$ del cubo



PIRAMIDE
- División mágica
- $\frac{1}{3}$ del cubo



PIRAMIDE
- División mágica
- $\frac{1}{3}$ del cubo



PIRAMIDE
- División mágica
- $\frac{1}{3}$ del cubo

PIRAMIDE
- División mágica
- $\frac{1}{3}$ del cubo

$$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a} = 0.6180339$$

$$\frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{2} = 0.5 - \frac{1236}{2} = 0.618$$

$$\frac{2}{3} = 0.666$$

$$\frac{3}{5} = 0.6$$

$$\frac{5}{8} = 0.625$$

$$\frac{8}{13} = 0.615 - \frac{81}{131} = 0.6153$$

$$\frac{13}{21} = 0.619$$

$$\frac{21}{34} = 0.617$$

$$\frac{34}{55} = 0.61818 + 18$$

$$\frac{55}{89} = 0.61797 - 03$$

$$\frac{89}{144} = 0.61805$$

$$\frac{144}{233} = 0.61811$$

$$\frac{233}{377} = 0.61803$$

$$\frac{377}{610} = 0.618032$$

$$\frac{610}{987} = 0.618034$$

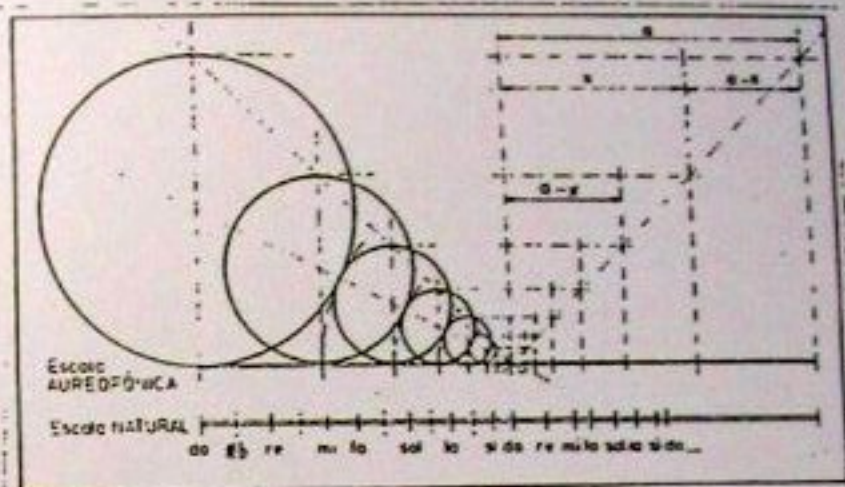
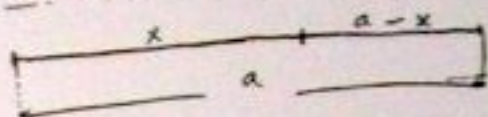
$$\frac{987}{1597} = 0.6180339$$

$$\frac{1597}{2584} = 0.618034$$

$$\frac{2584}{4181} = 0.6180339 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$$

SUCESIÓN DE FIBONACCI

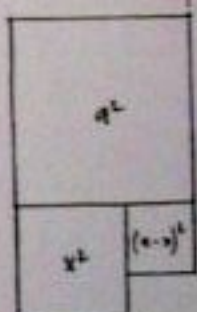
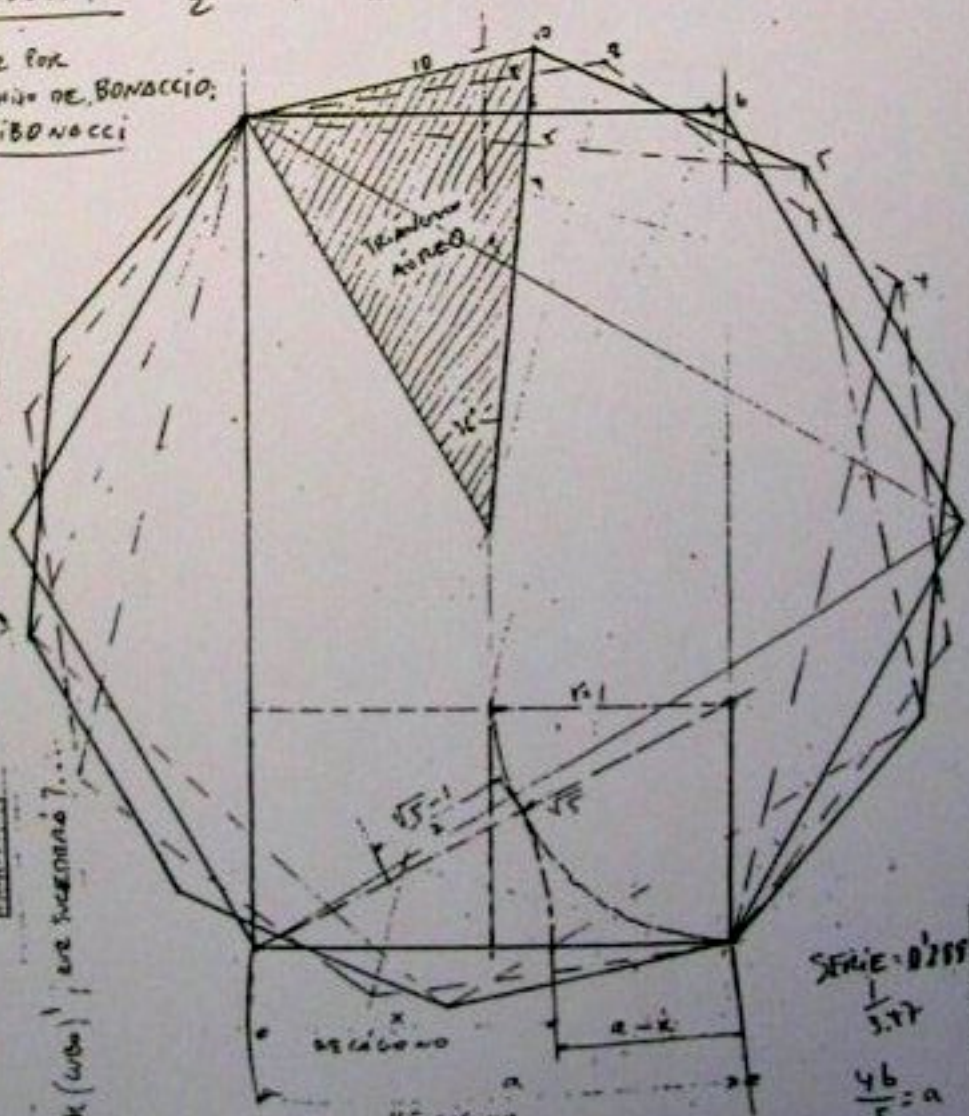
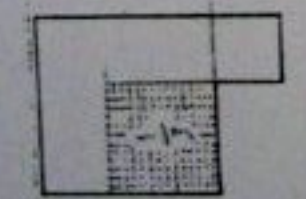
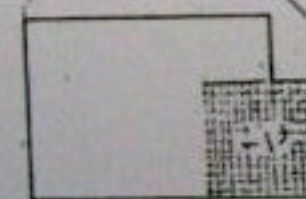
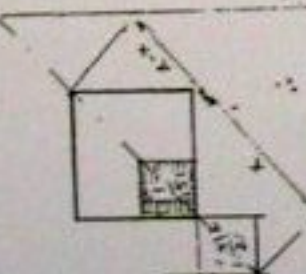
NÚMERO DE ORO = $\varphi = 0.618$



SERIE = 0.8090
1/236
con 1/5

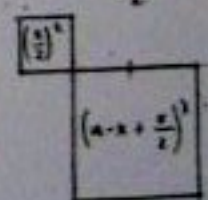
POSICIONES INSERIDAS EN CIRCULO

DETERMINADA EN 1202 POR
LEONARDO DE PISA, HIJO DE BONACCIO;
"FILIUS BONACCI" = FIBONACCI



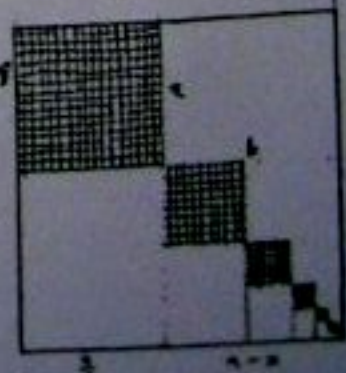
$$\frac{a^2 + (a-x)^2}{3} = x^2$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618$$



$$\frac{(a-x + \frac{x}{2})^2}{5} = (\frac{x}{2})^2$$

SERIE = 0.215
1/3.77
46/5 = a

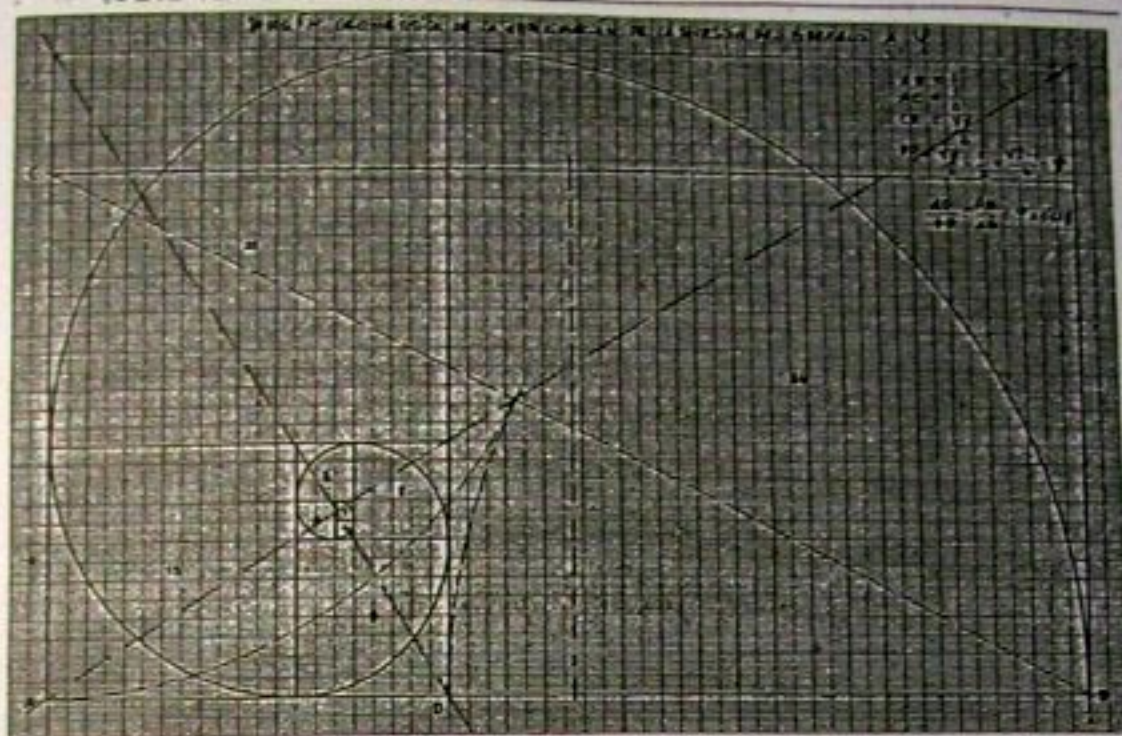


LA FALSA "ORFEBRÍA" = PROTECCIÓN
(UCA POCOS) = FALSA PROTECCIÓN

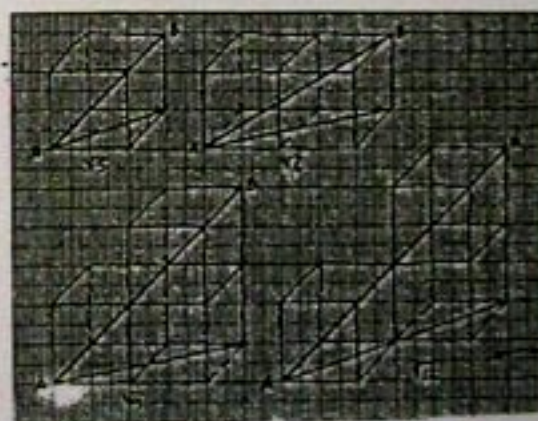
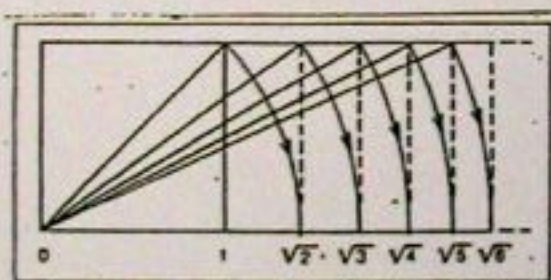
$$a = 2$$

$$x = \sqrt{5}-1$$

$$a-x = 2-(\sqrt{5}-1)$$

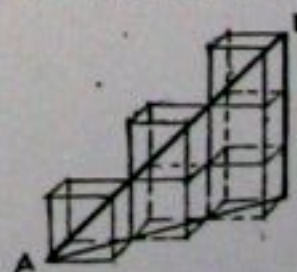
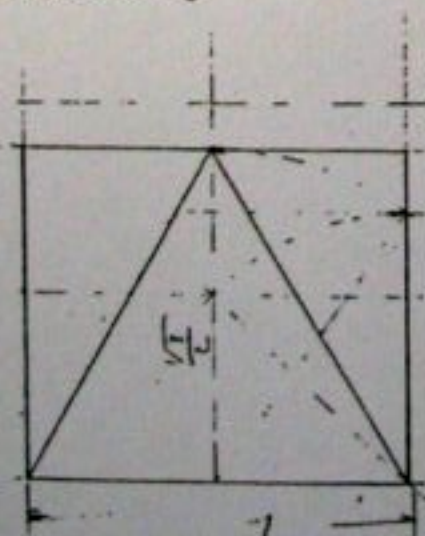


PROPORCIONES DINÁMICAS
 $\sqrt{n}$



$\sqrt{4} = 2(\sqrt{1})$: LA OBTENIDA
 $\sqrt{3} = 2(\sqrt{1})$: NO TAMPOCO
CONOCES

$\sqrt{n}$ EN POSICIONES... $\sqrt{22}$
NO SON POSIBLES: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{16}, \sqrt{17}, \sqrt{18}, \sqrt{19}, \sqrt{20}, \sqrt{21}, \sqrt{22}$
SI

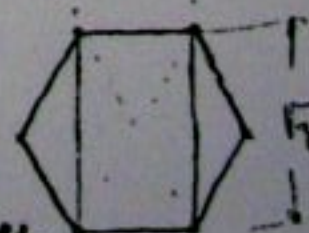


$$(\sqrt{3})^2 + 3^2 = \sqrt{27}$$

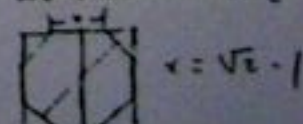
$\frac{\sqrt{3}}{2} =$ ALTA TRIÁNGULO EQUILÁTERO.



RECTÁNGULO = $\sqrt{2} + 1$
RECTÁNGULO



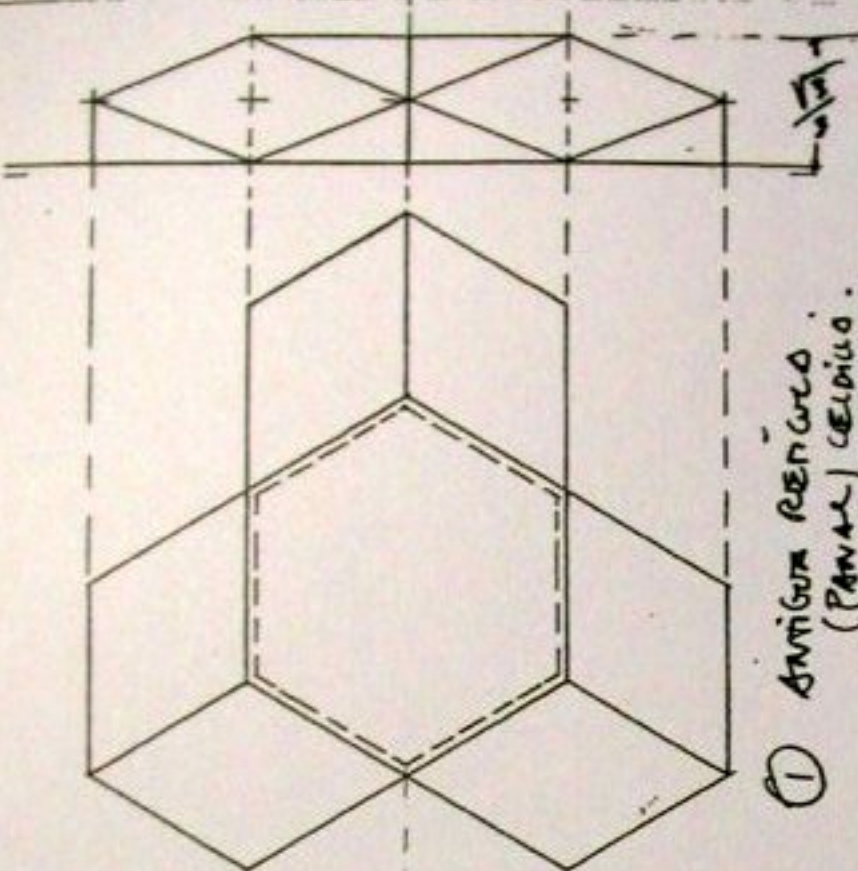
RECTÁNGULO $\sqrt{3}$



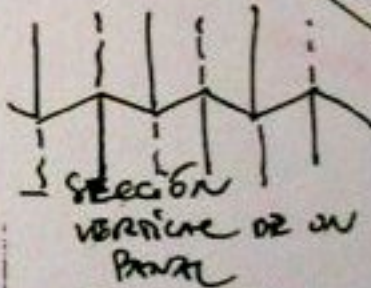
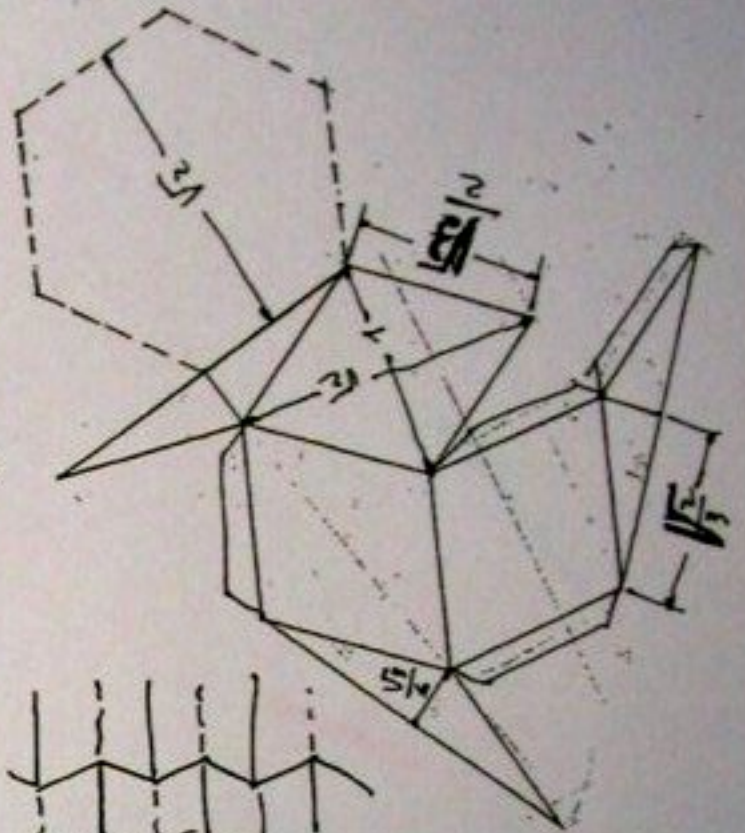
$$x = \sqrt{2} - 1$$

NUVA RETICOLA FORMACION CUBILLAS DE LOS ABEJAS

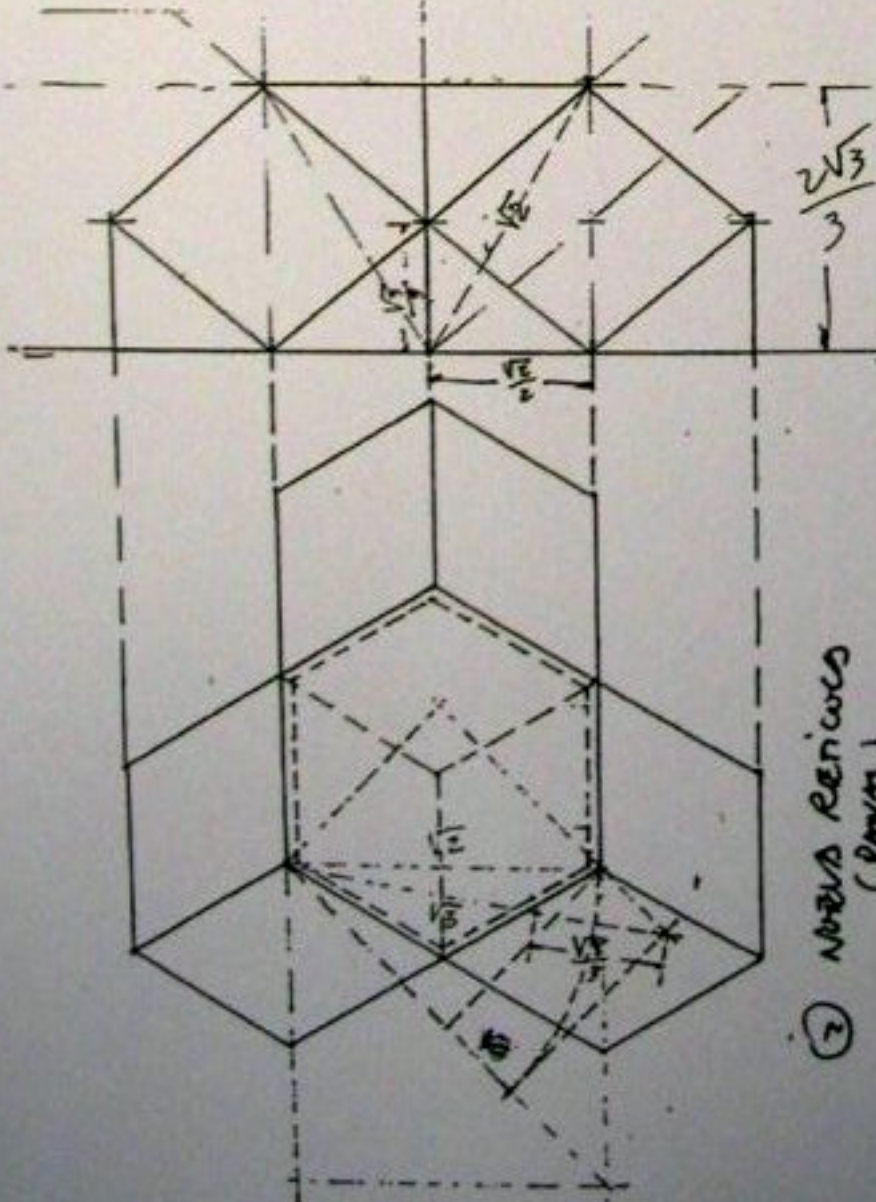
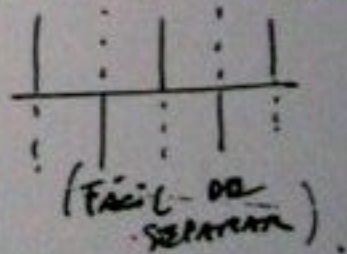
- ① - AL VERTICE CADA 3 DEL RANCHO DE CADA UNO.
- ② - AL " DEL CUBO.
- Sobre una celda de volumen = 4 cinco cubos. Se atraerán en 10 g.



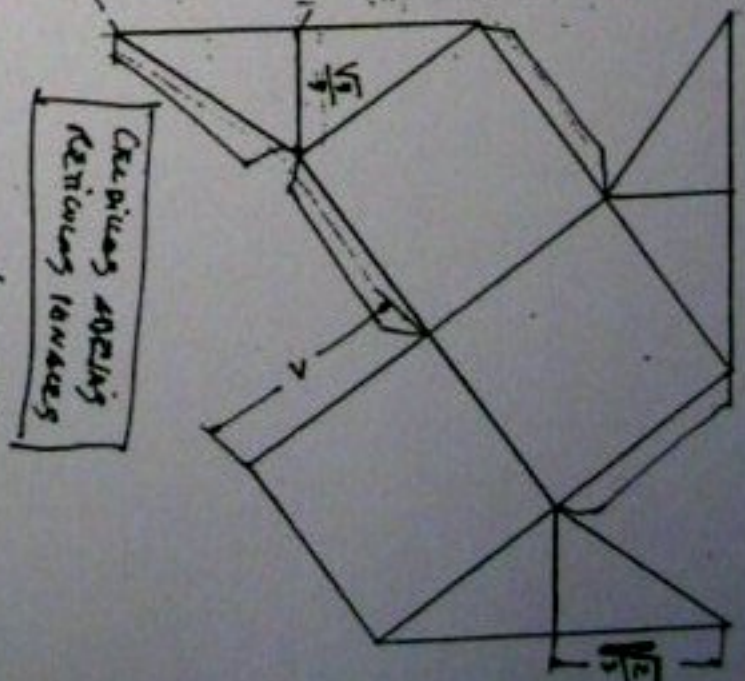
① ANTIGUA RETICULA (PANEL) CUBILLO.



- Si fueran prismas la sección sería una línea. (BASES DE LOS PRISMAS)



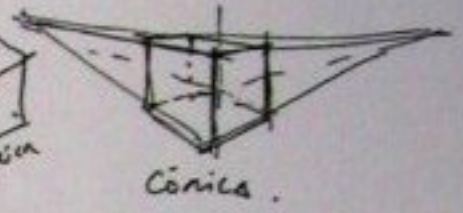
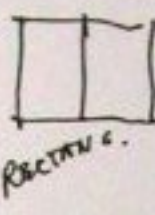
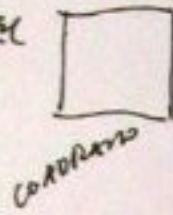
② NUVA RETICULA (PANEL)



FIGURAS IMPOSIBLES (PARTE 6)

- SOLUCIÓN EN EL PLANO . BIDIMENSIONAL
- IMPOSIBLE EN VOLUMEN . TRIDIMENSIONAL
- EDUCACIÓN VISUAL:

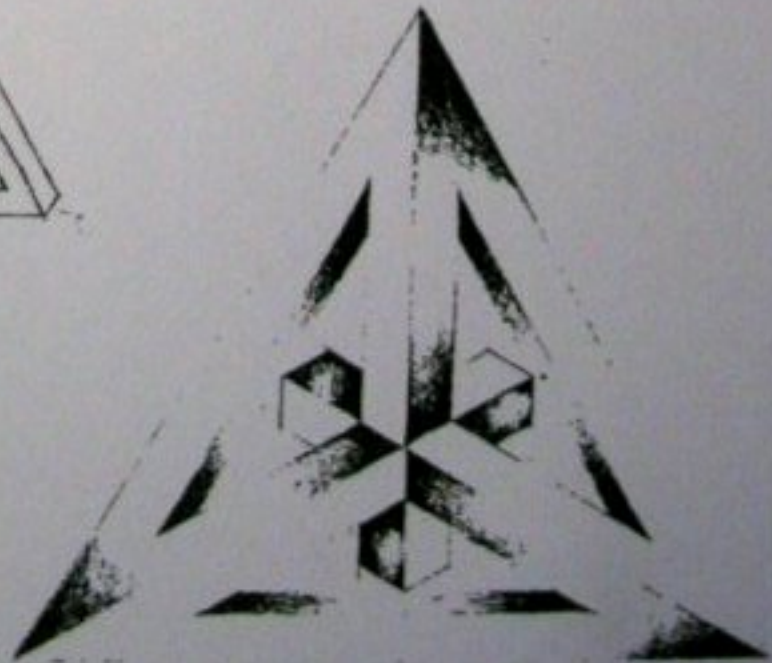
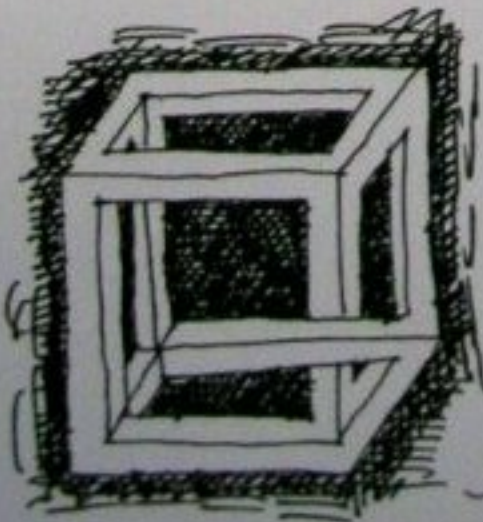
CÓMO SE
PIENTA



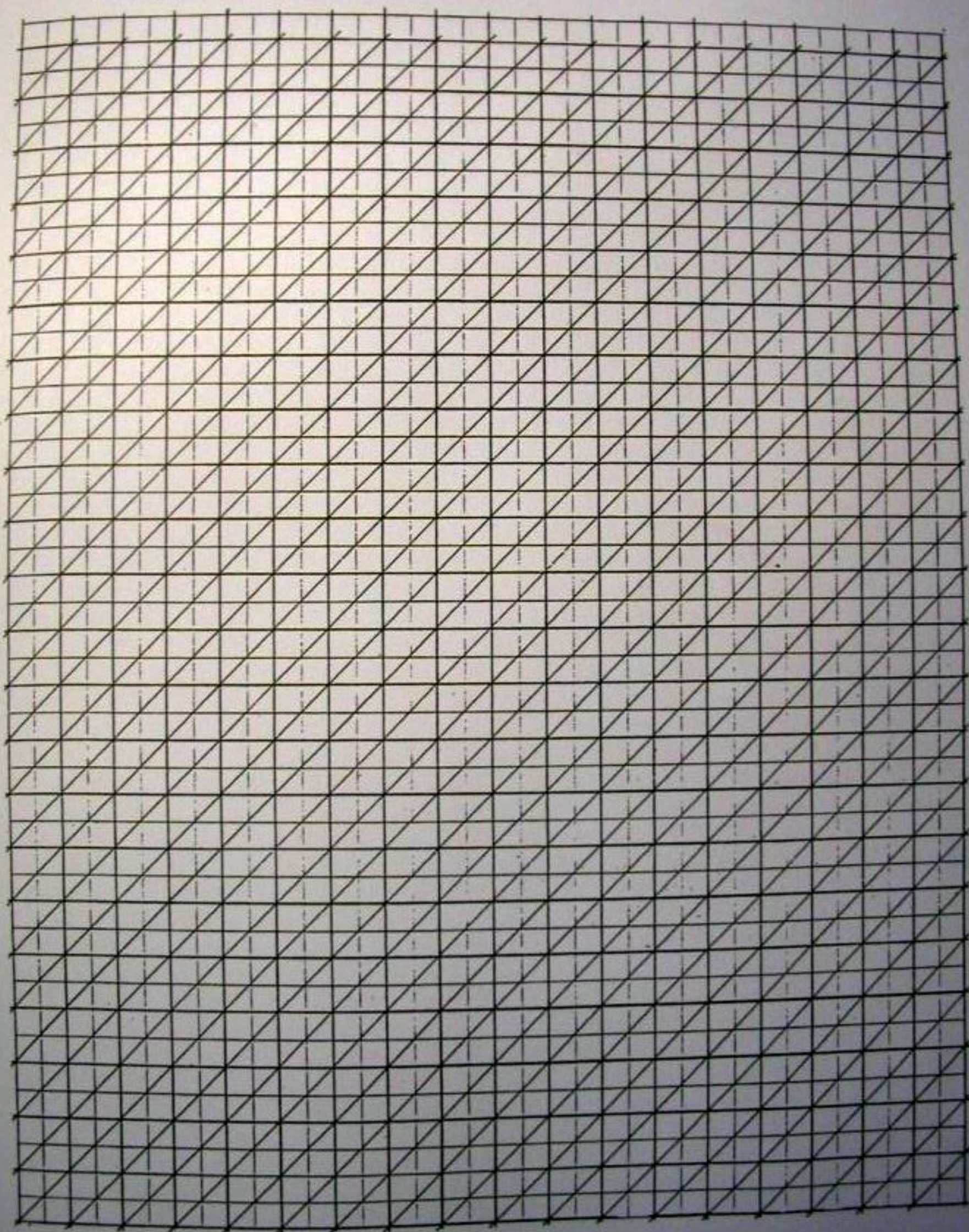
... QUANTO MAS REAL PARECE SER, MAS MENTIROSO ES !!

... ESCHER ...

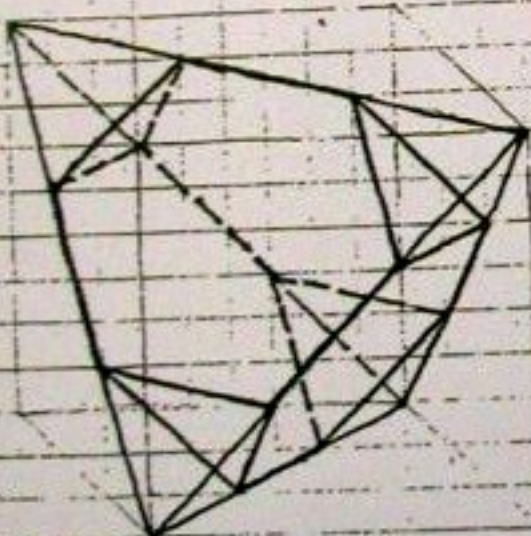
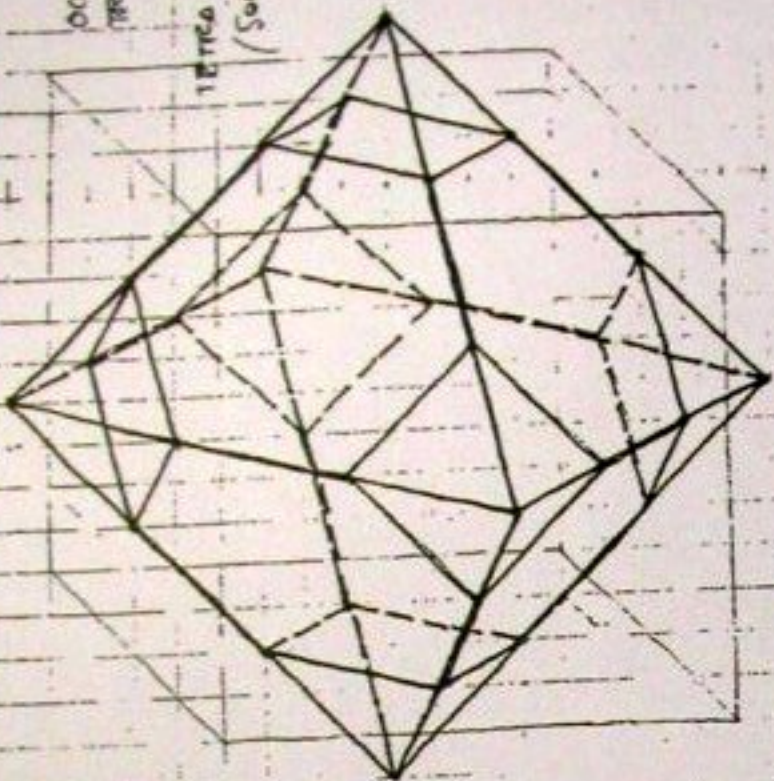
... MAGRITTE ...



Retícula caballera ...



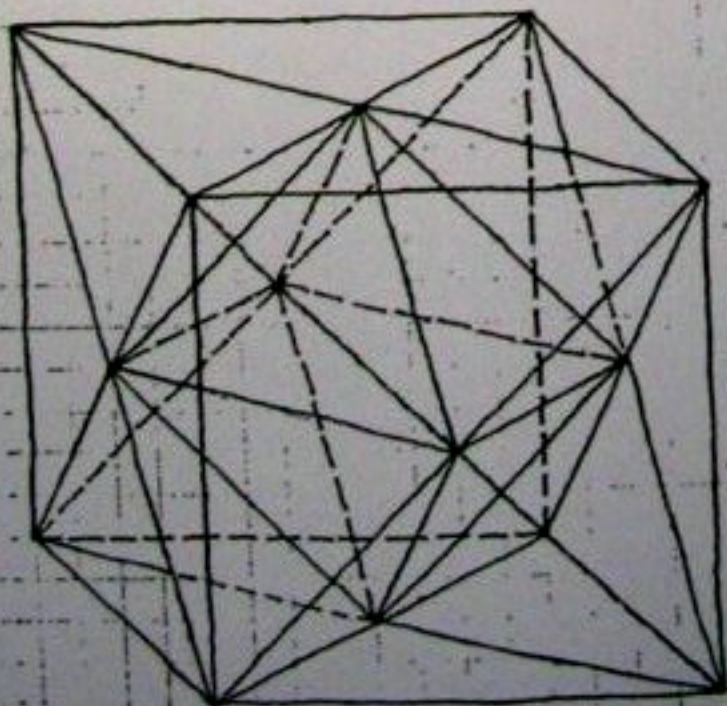
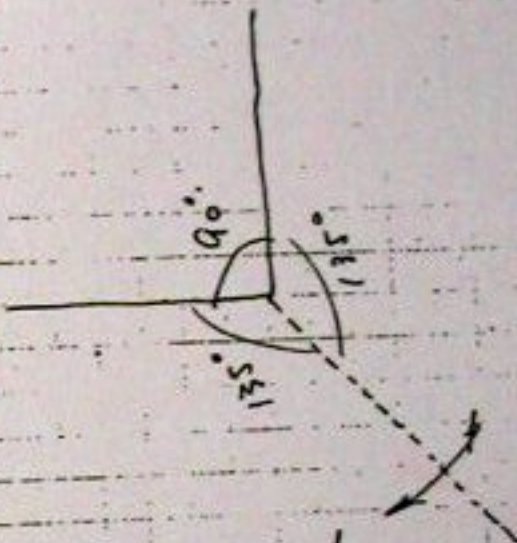
OTRERO
TERRECA
TERRECA
(SOLDO DE TERRECA)



TERRECA
TERRECA

RETIWA
CERRADO

CABALLERO

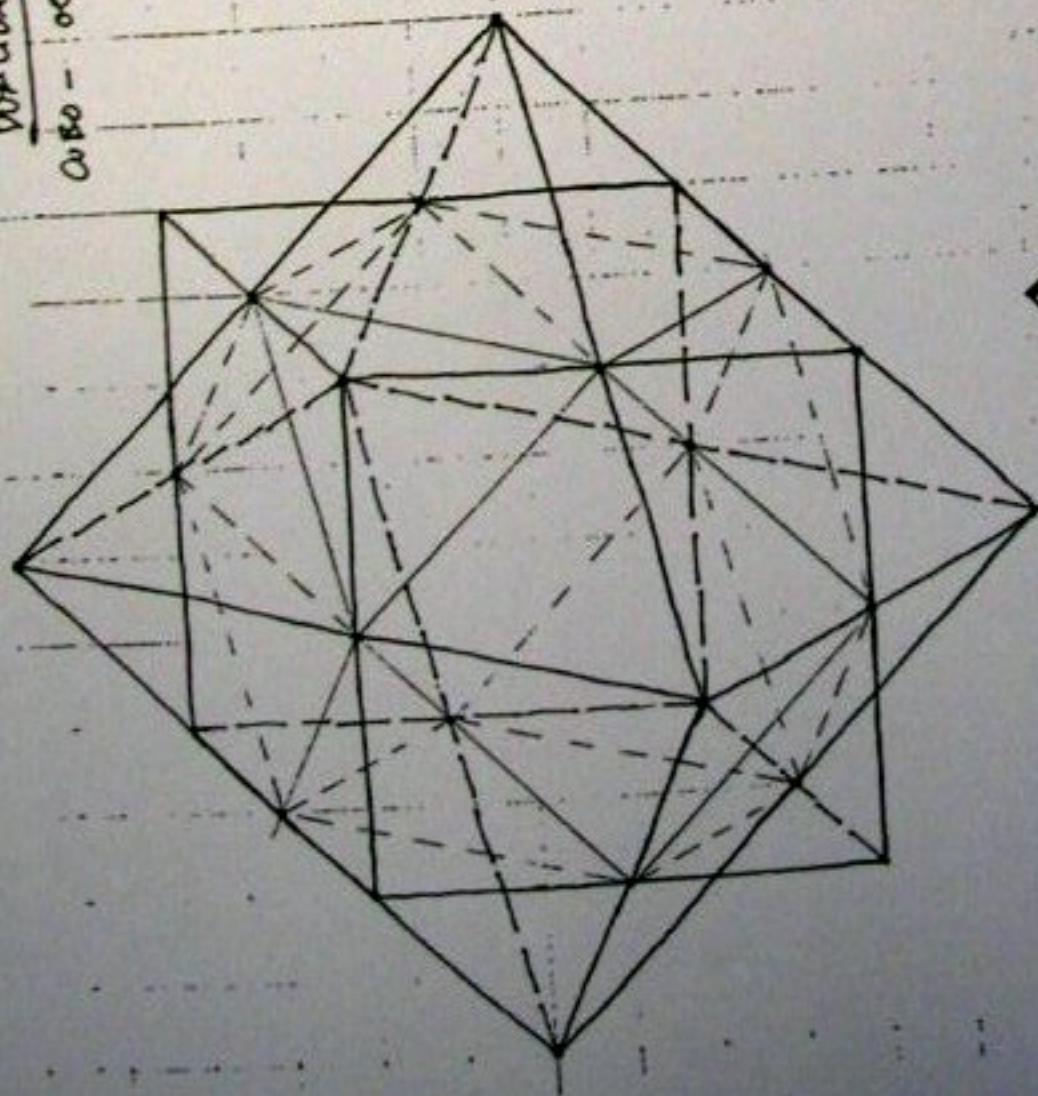
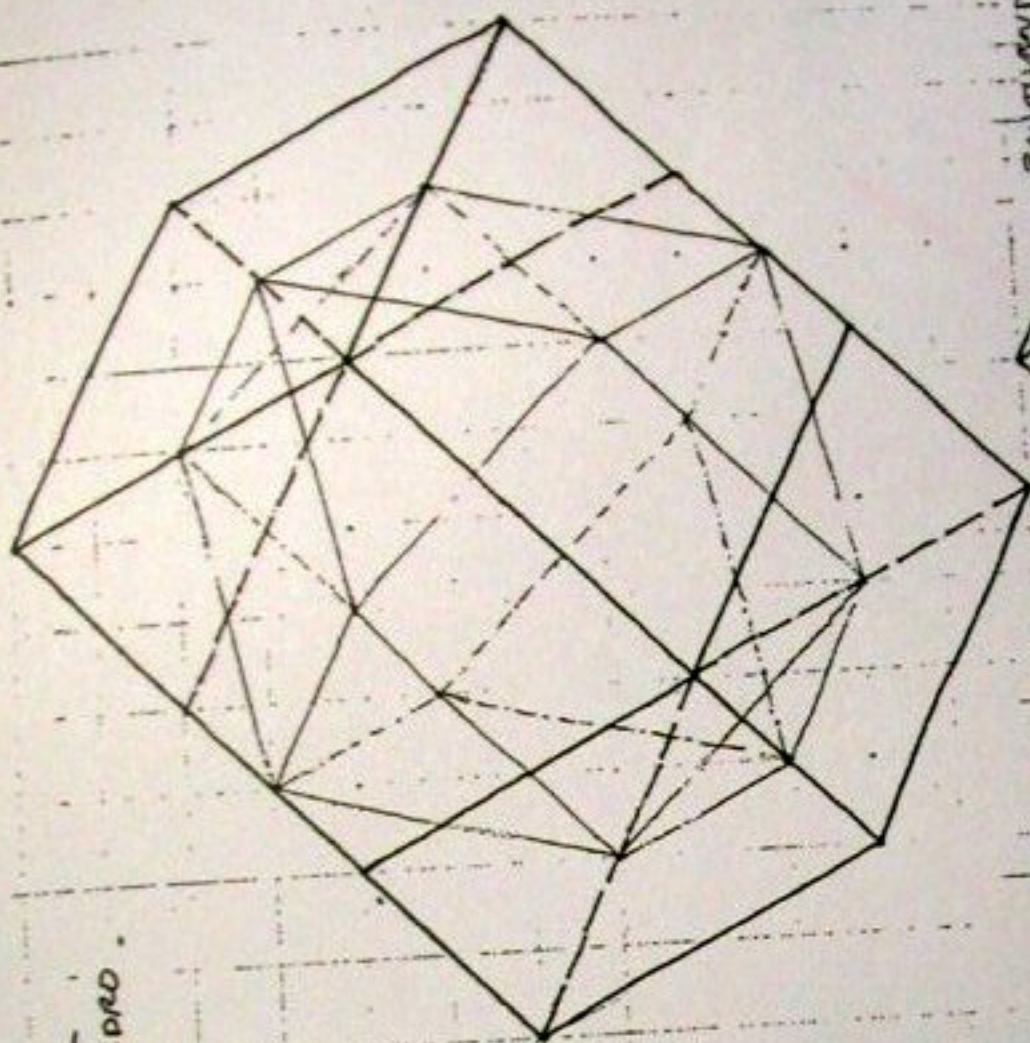


OTRERO - TERRECA
OTRERO - TERRECA
OTRERO - TERRECA
OTRERO - TERRECA

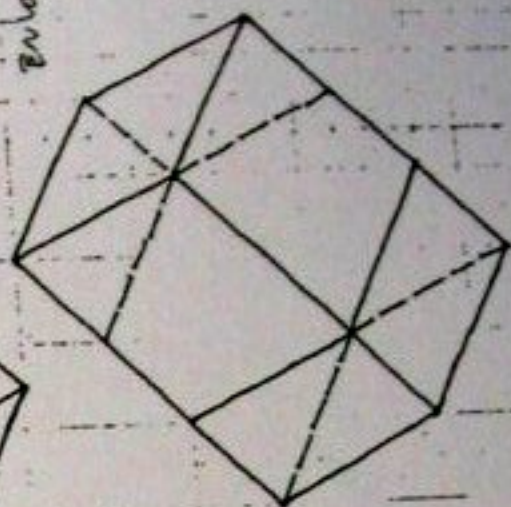
OTRERO - TERRECA
OTRERO - TERRECA
OTRERO - TERRECA
OTRERO - TERRECA

OTRERO - TERRECA
OTRERO - TERRECA
OTRERO - TERRECA
OTRERO - TERRECA

DUALIDAD
CUBO - OCTAEDRO

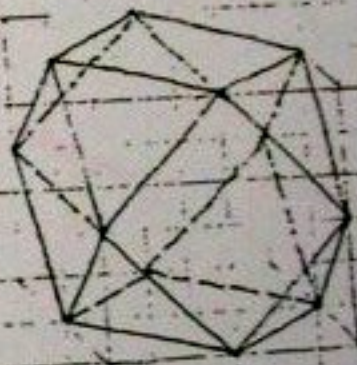


enlucido

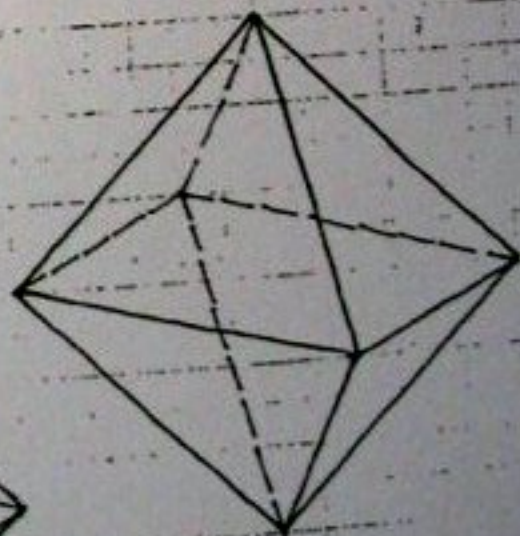


RHOMBICUBOCTAEDRO
(12 caras)

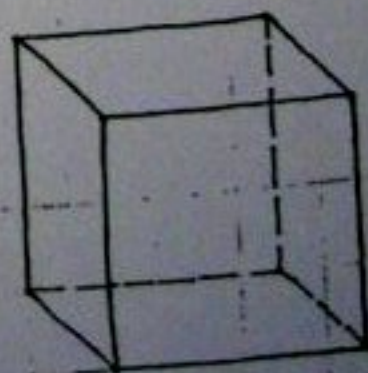
CONVEXO



CUBOCTAEDRO
(8 caras cuadradas)
(6 caras hexagonales)

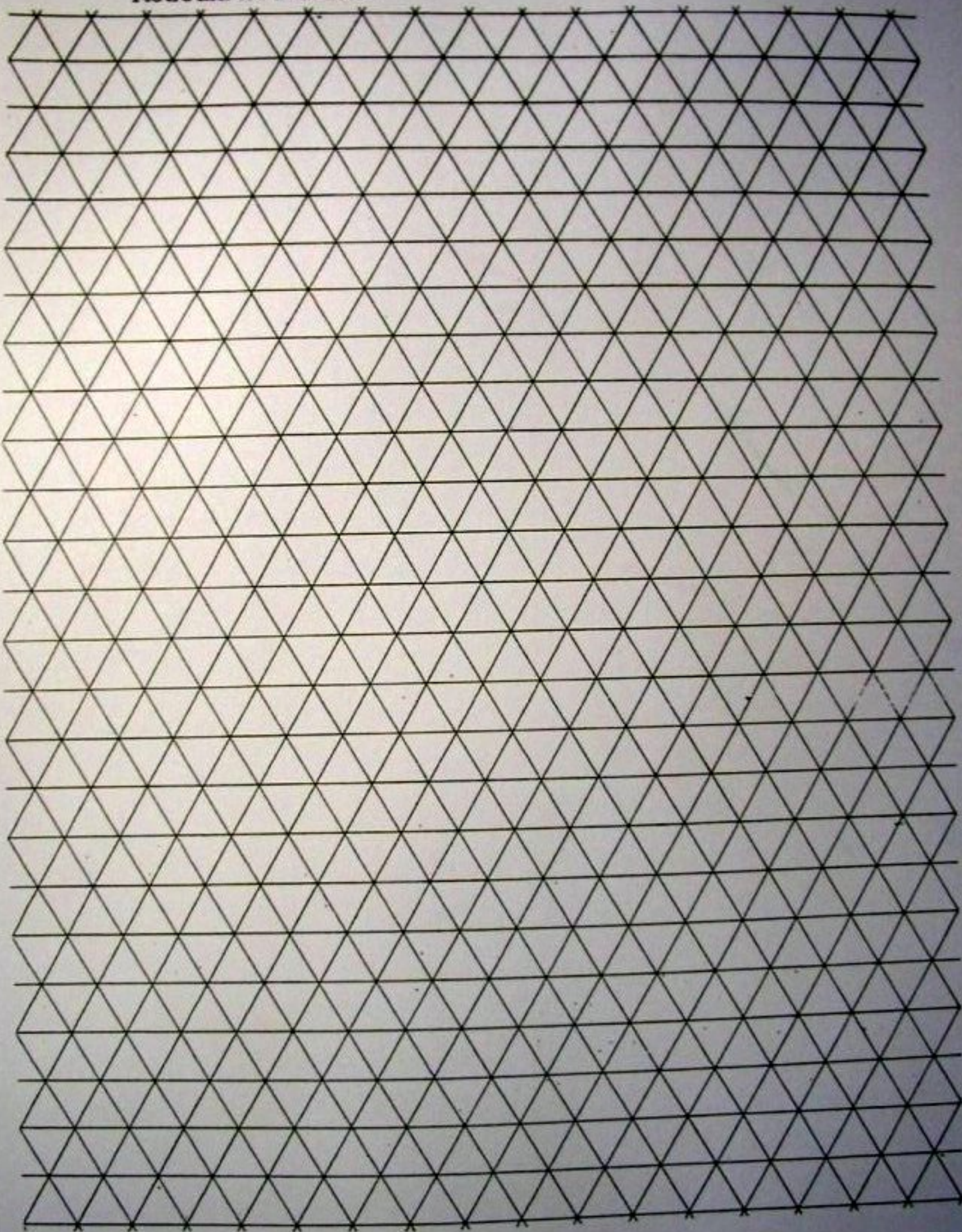


OCTAEDRO



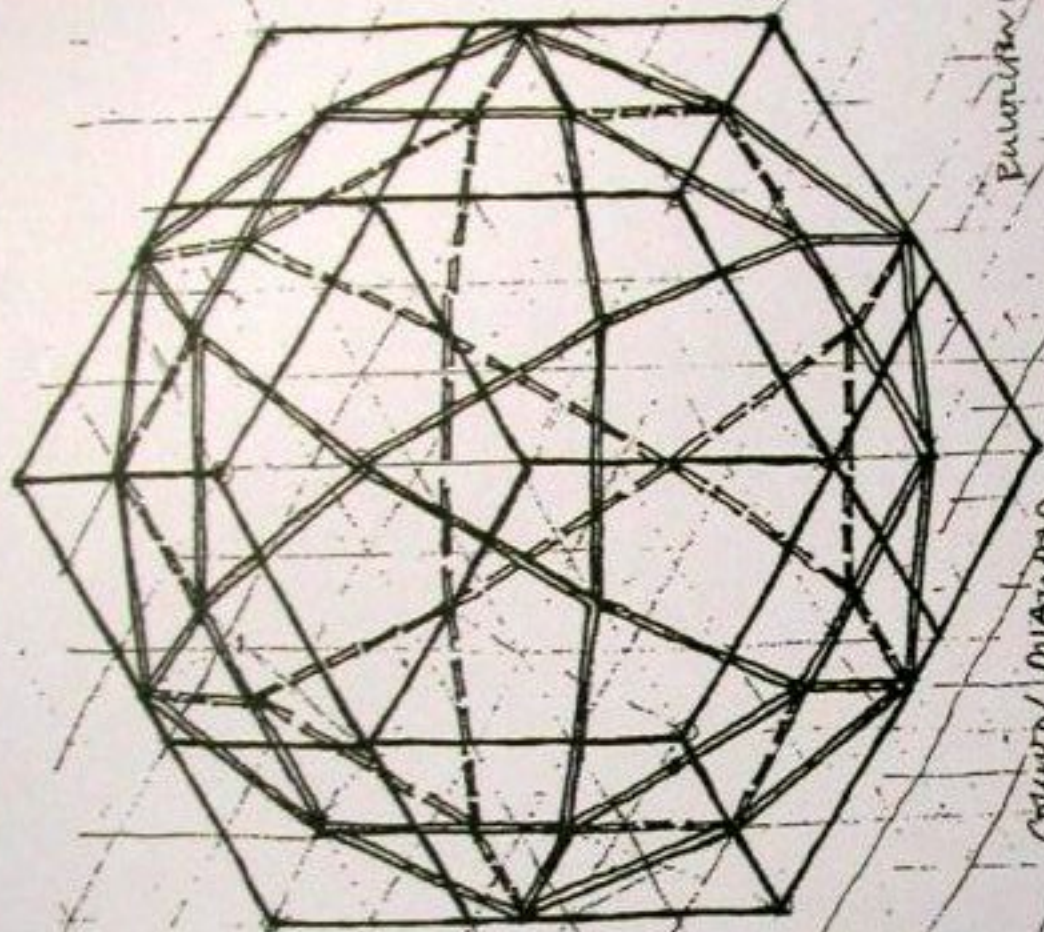
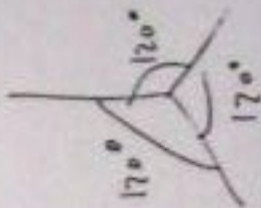
CUBO

Retícula isométrica .



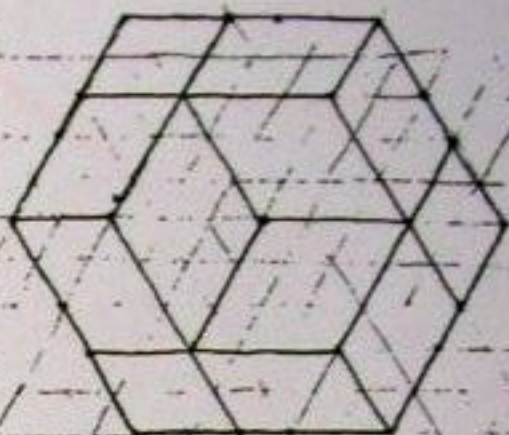
PERICULUS
TRIANGULAR

180 WETRICAS



PULCHER 112

COLONIA NUA 220



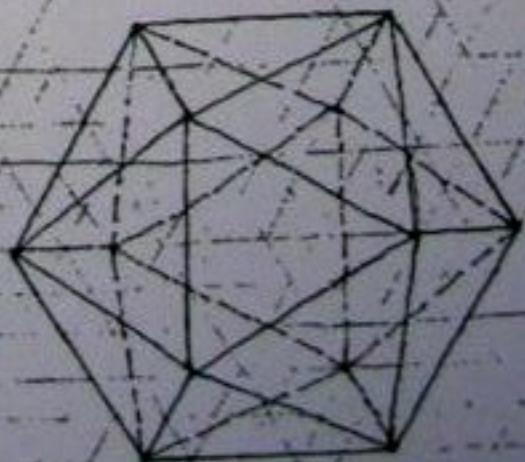
TRICOLON TRIANGULAR PULCHER
(130 ROWS AIGROS) (PULCHER)



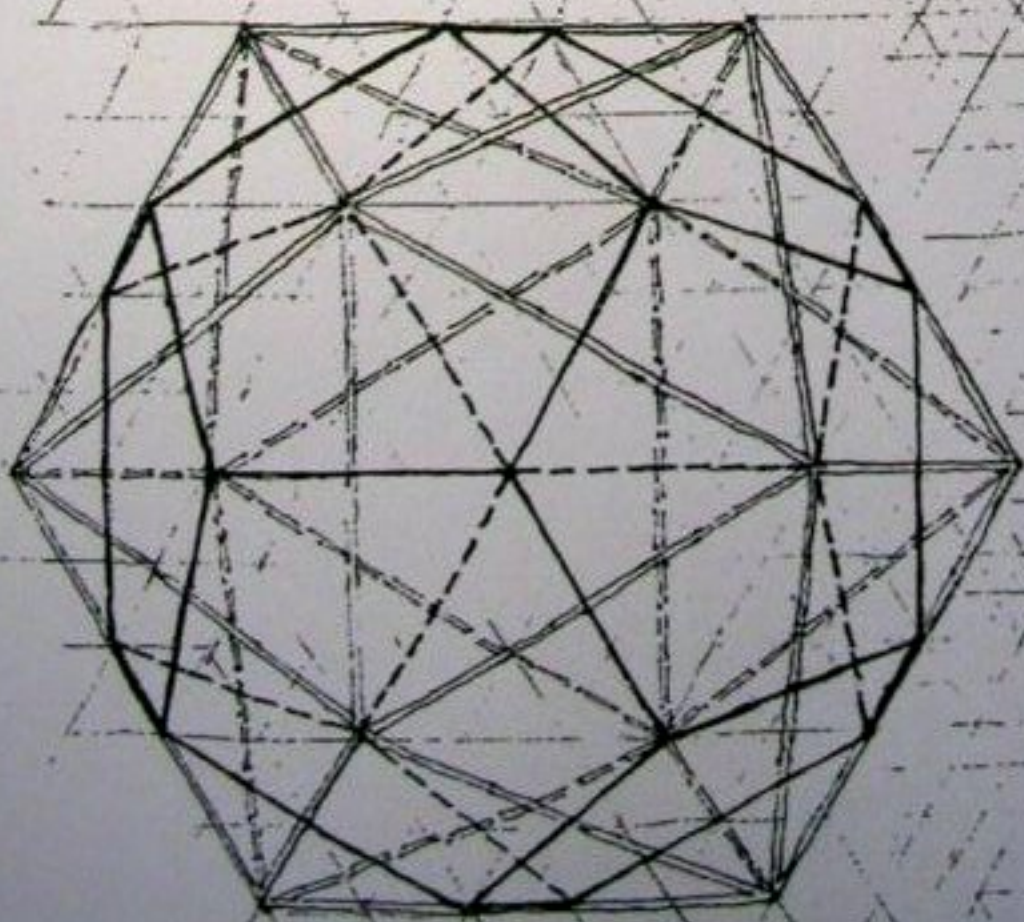
100% DO PULCHER
(12 PULCHER AIGROS)
(20 PULCHER AIGROS)



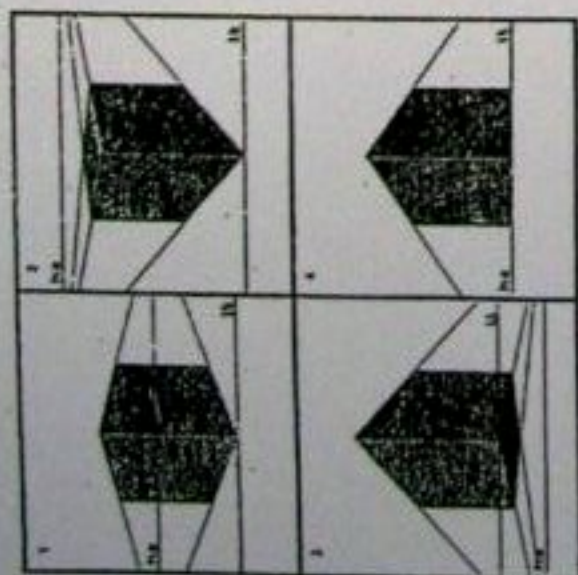
100% DO PULCHER
(12 PULCHER AIGROS)
(20 PULCHER AIGROS)



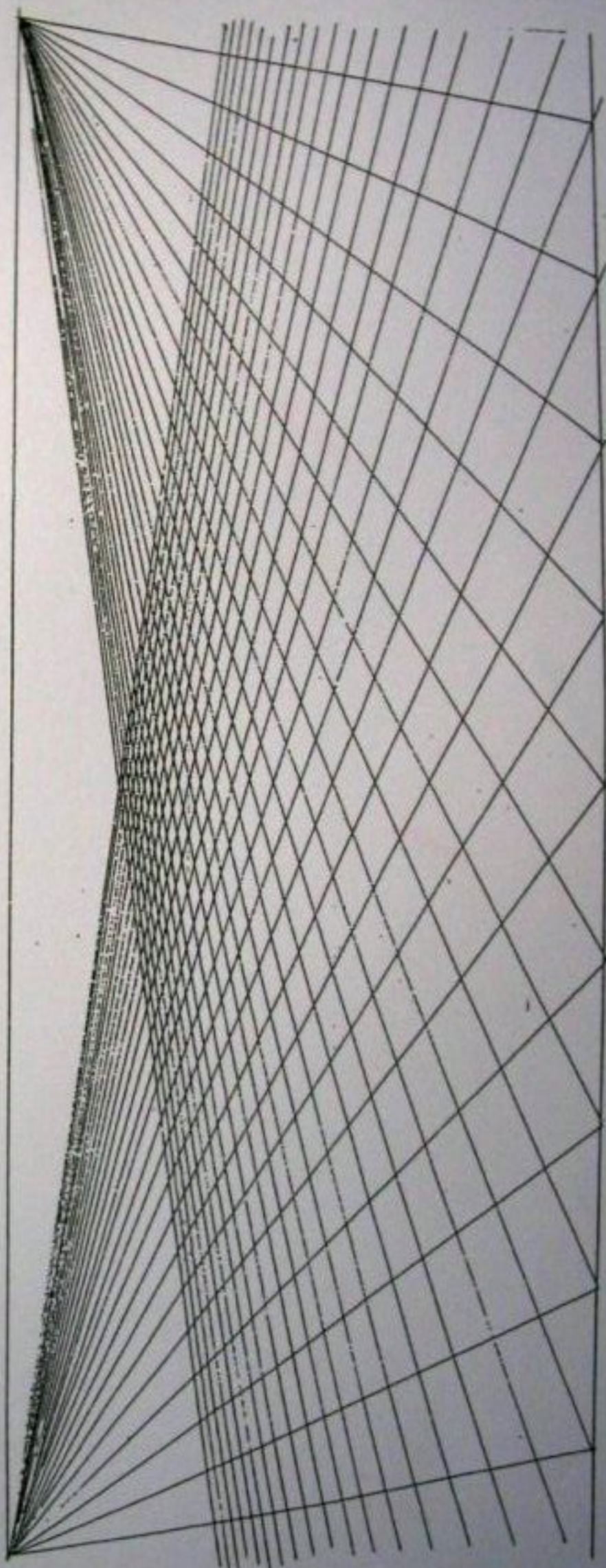
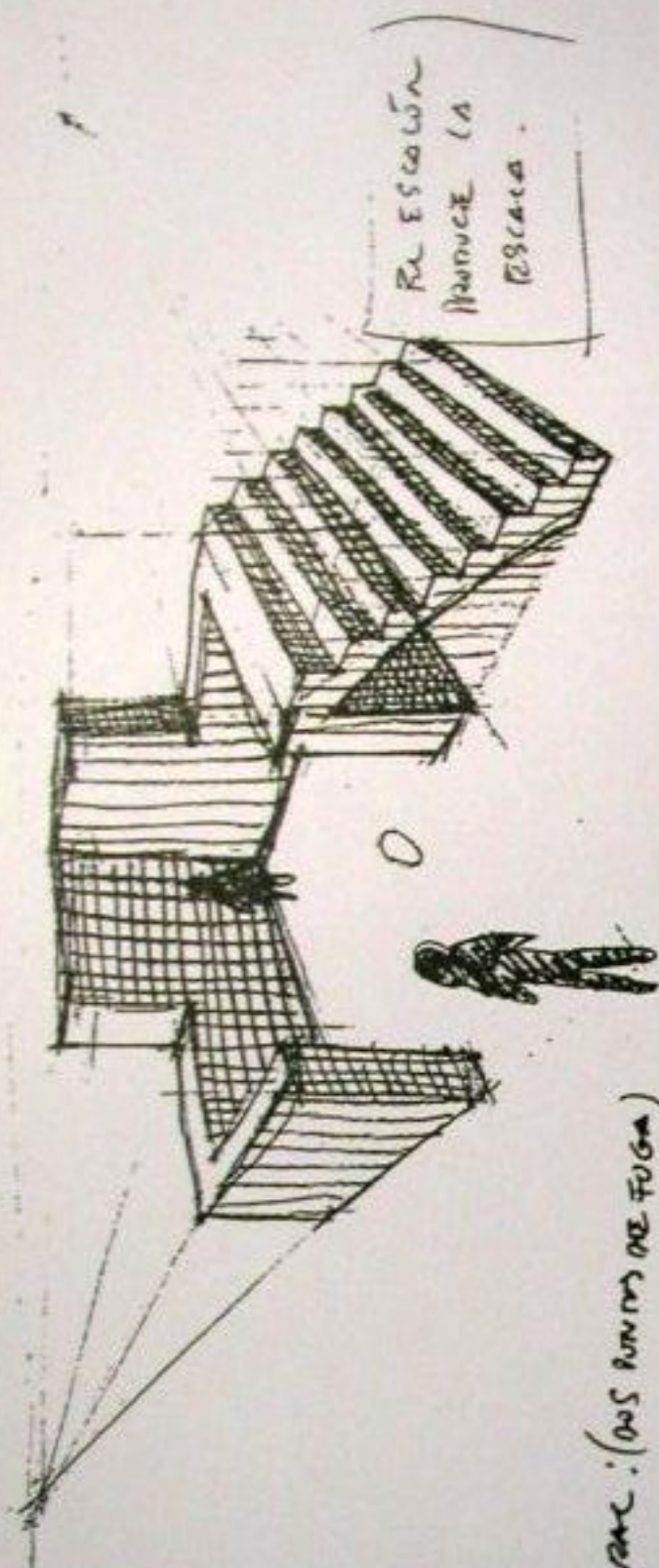
100% DO PULCHER
(12 PULCHER AIGROS)
(20 PULCHER AIGROS)

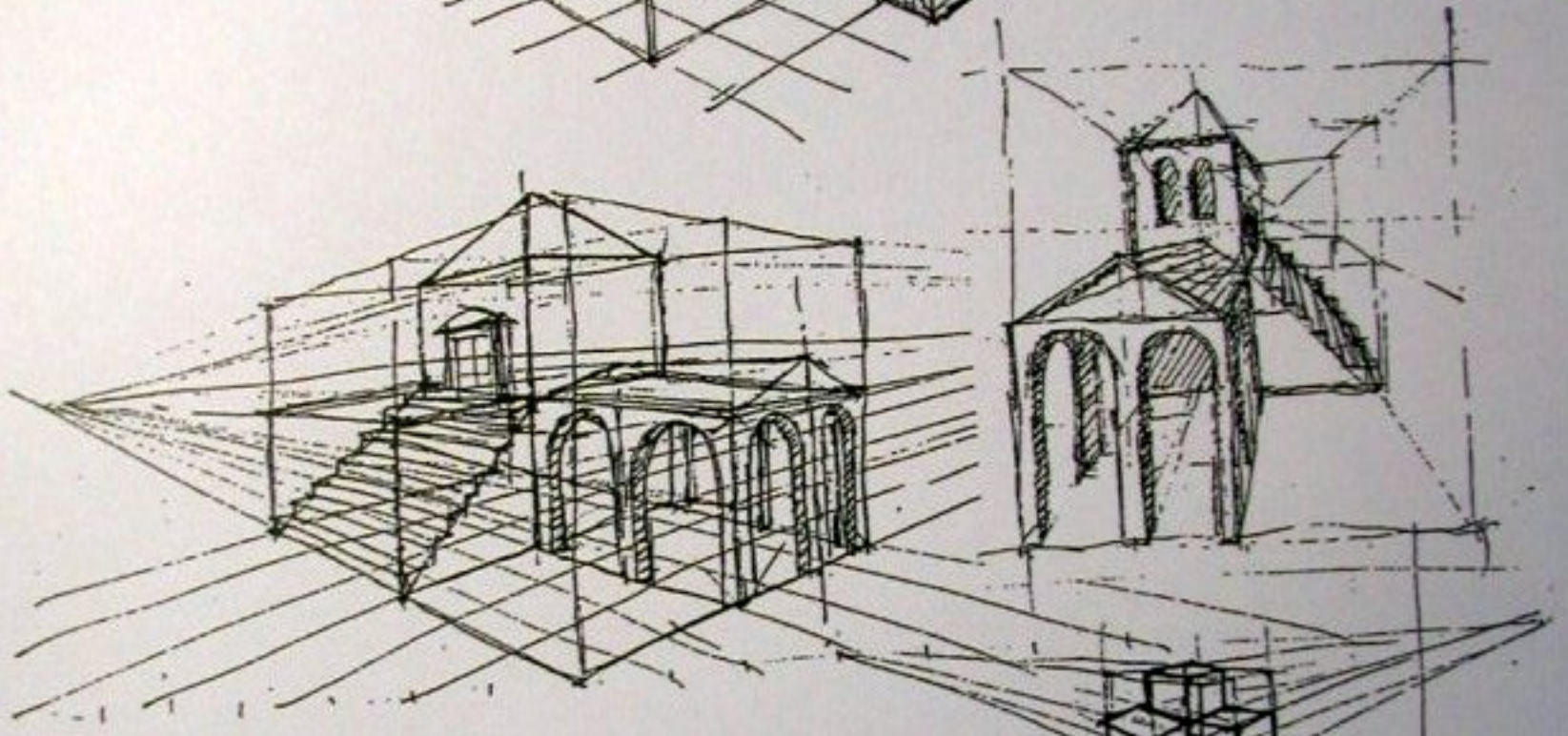
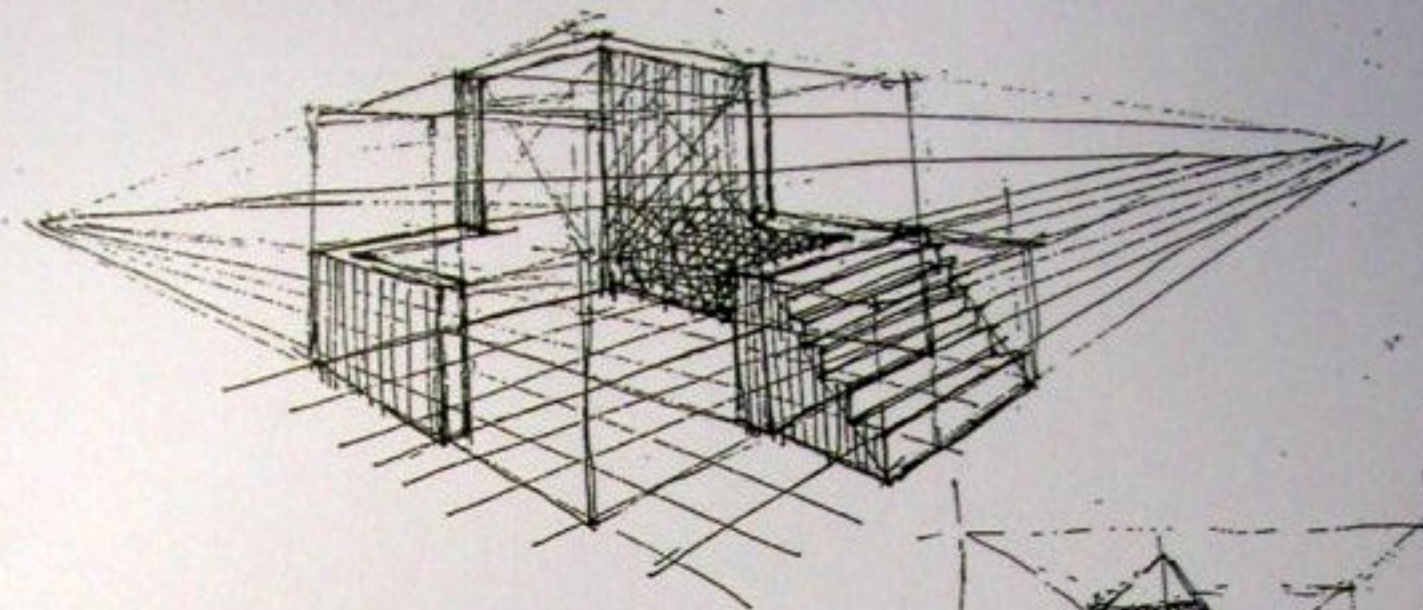


El espacio escénico : perspectiva cónica ..

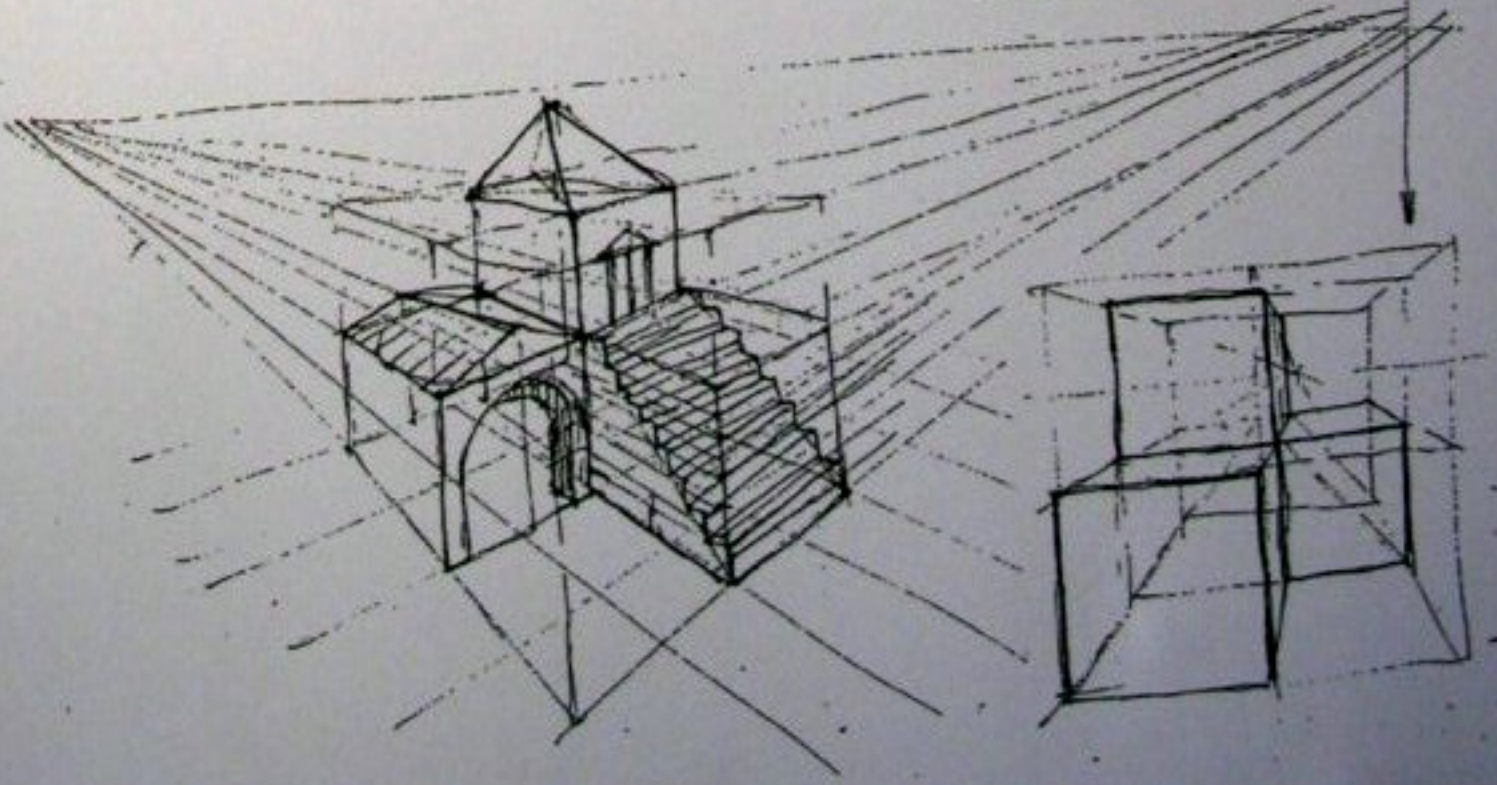


PERSPECTIVA CÔNICA : CATOPTRIC : (DOS PUNTOS DE FUGA)





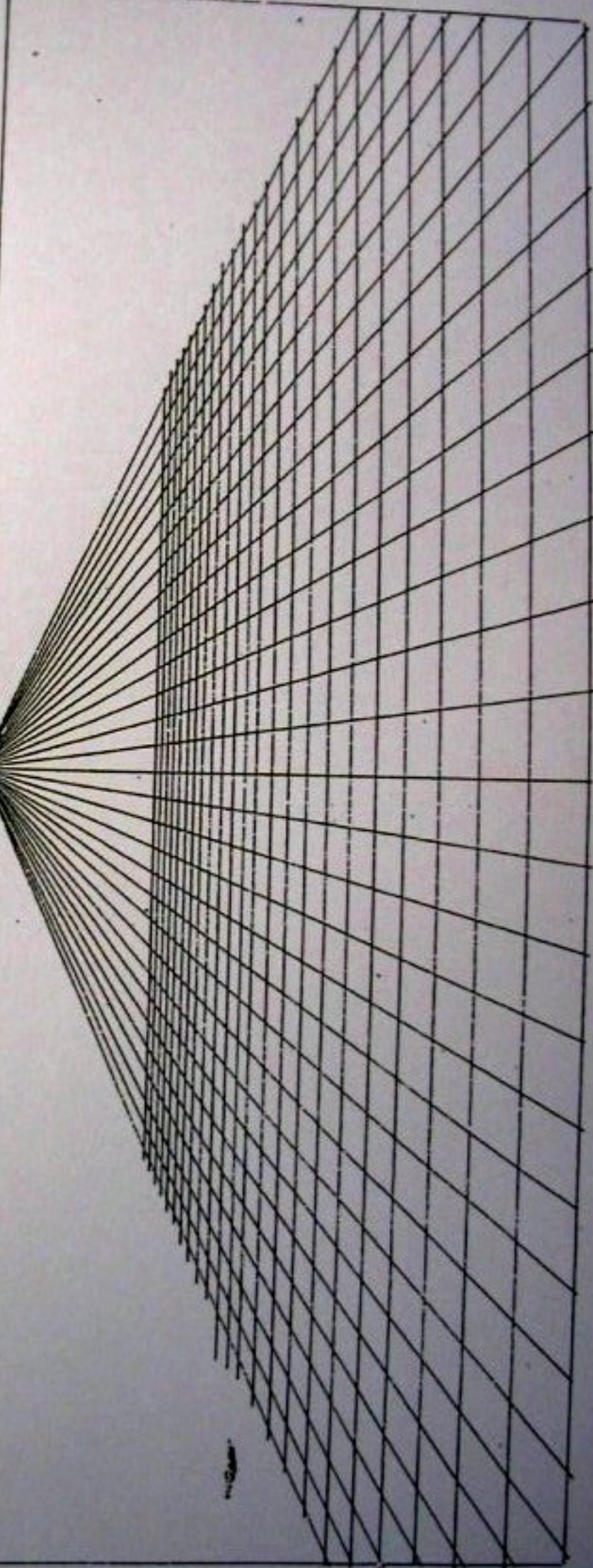
WISNKA ME WBO



Cônica Frontal

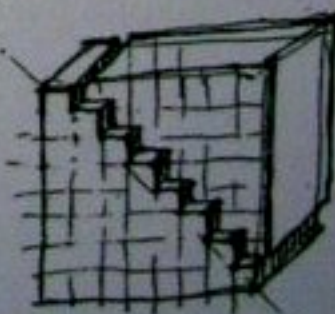
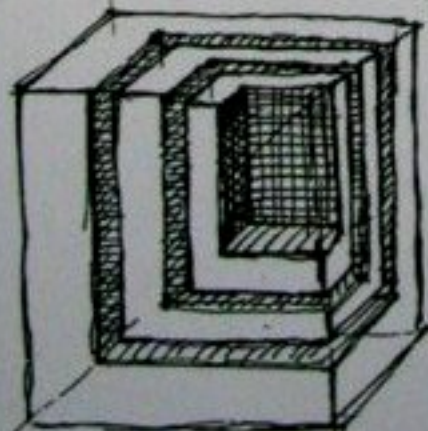
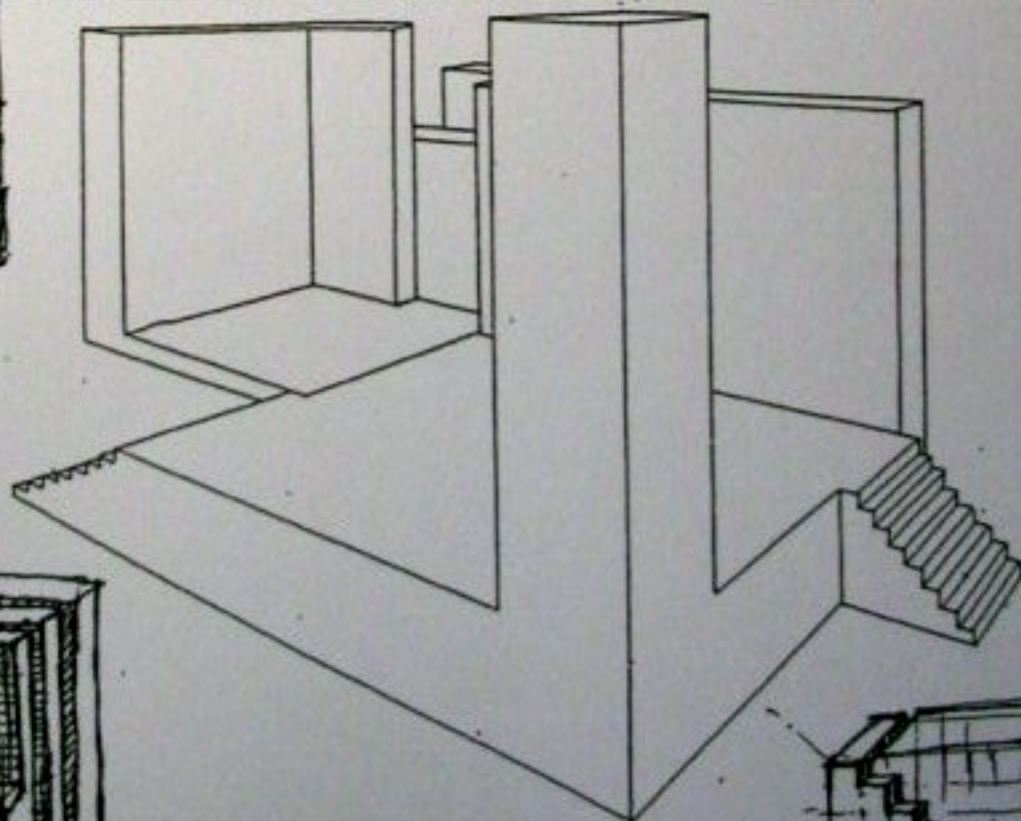
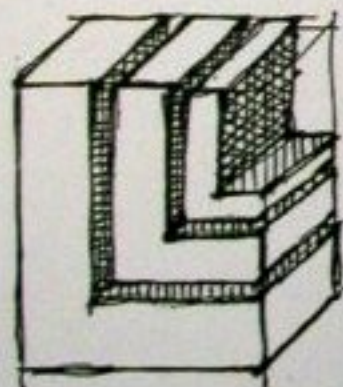
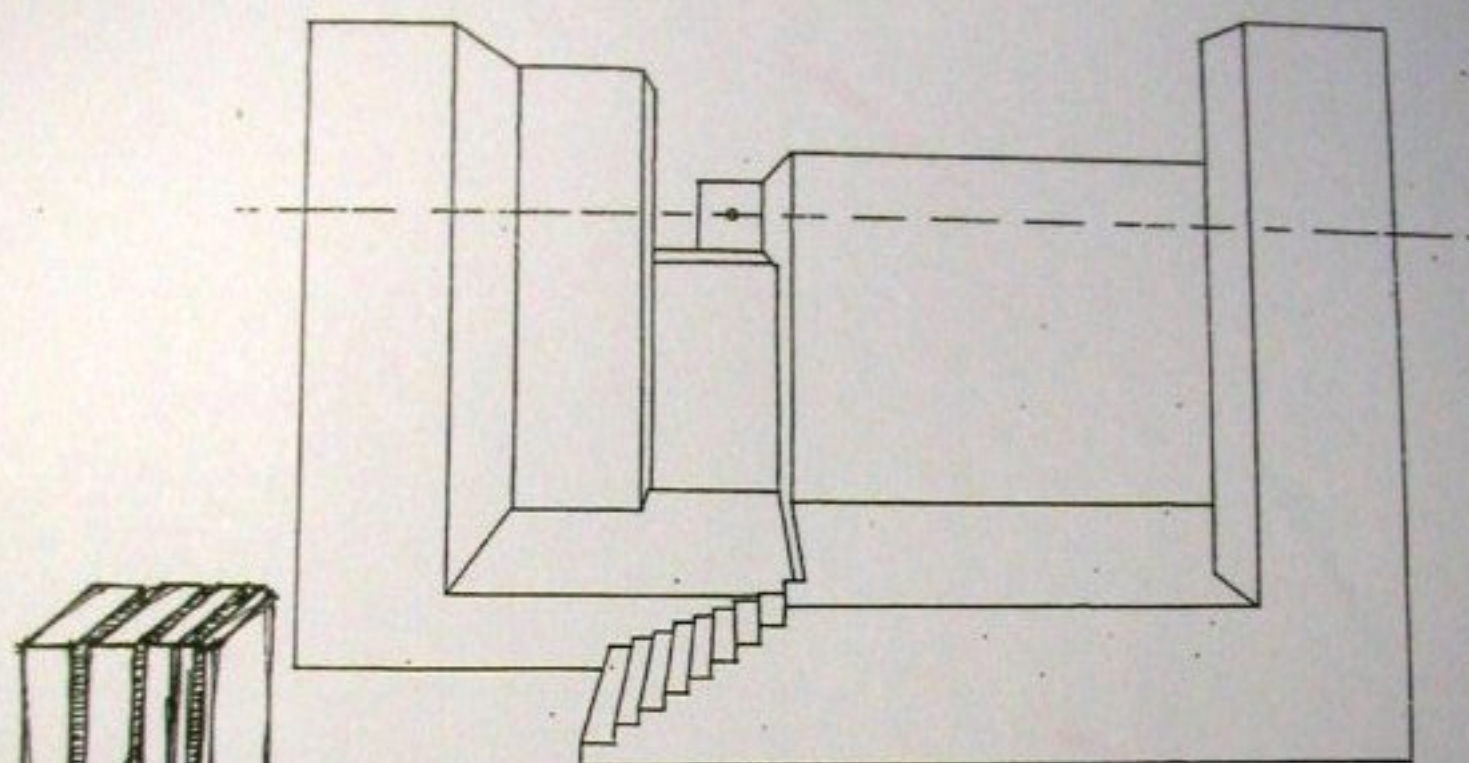
(Bastar o "Itálica" :)
impressões

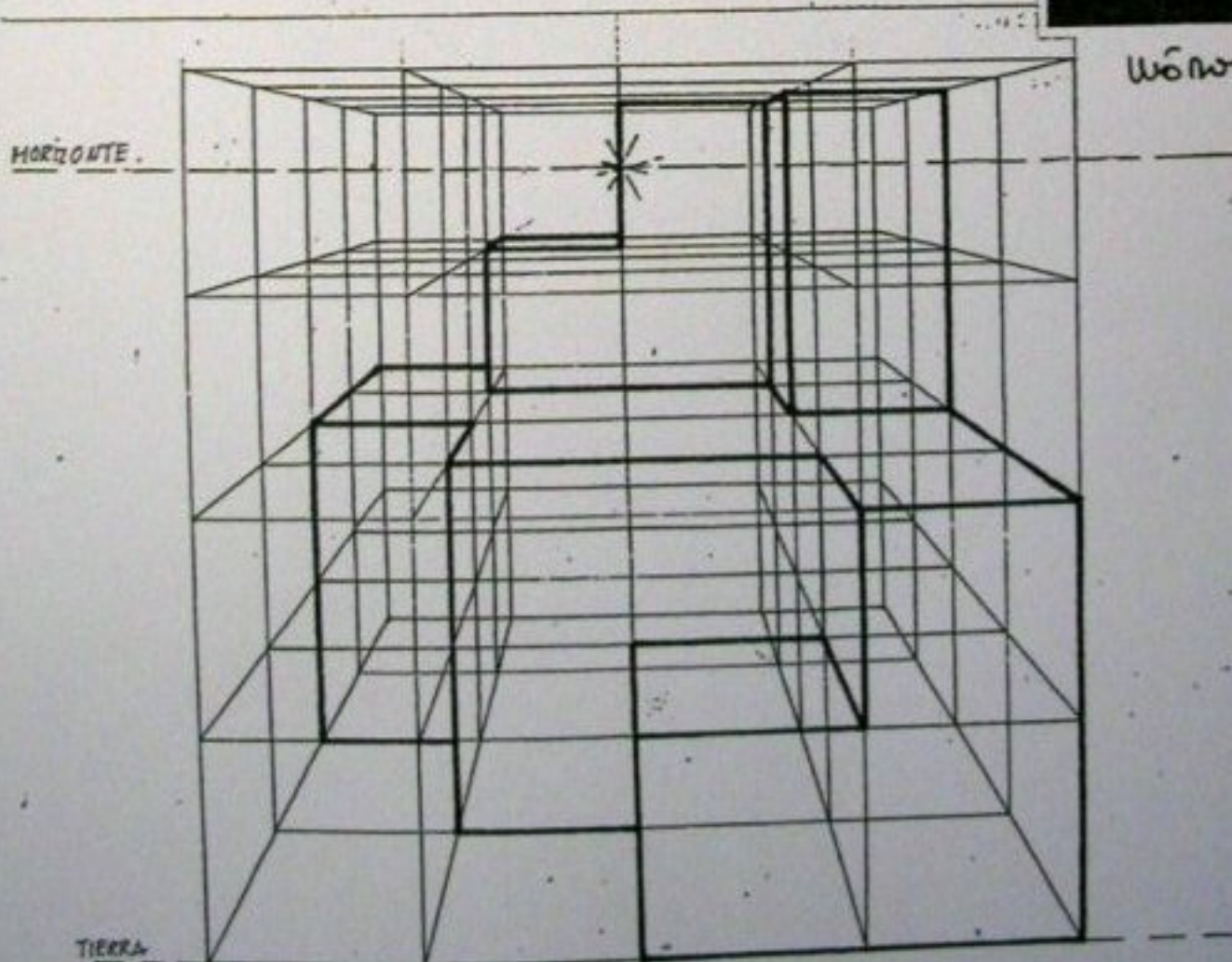
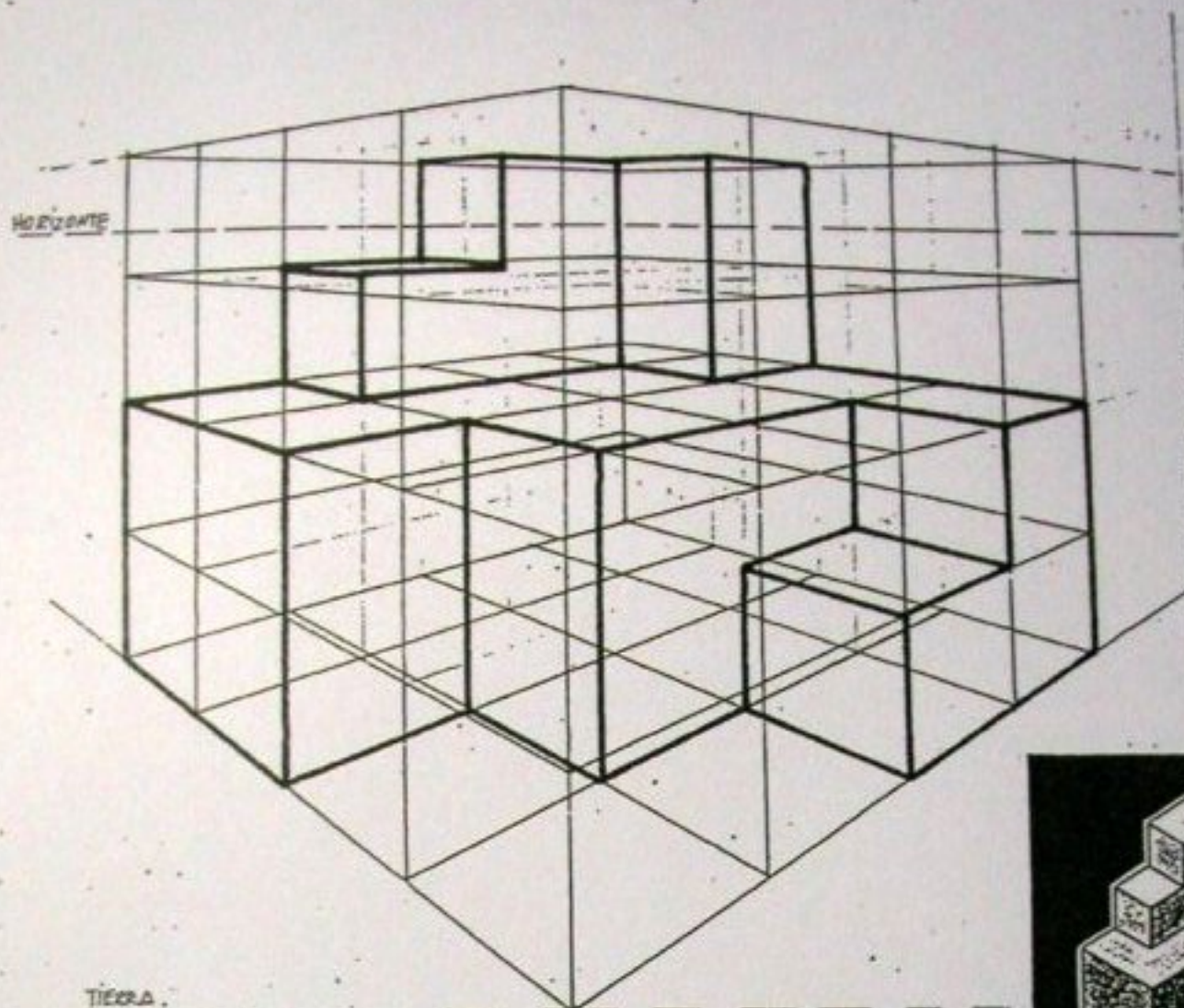
Fig. 102



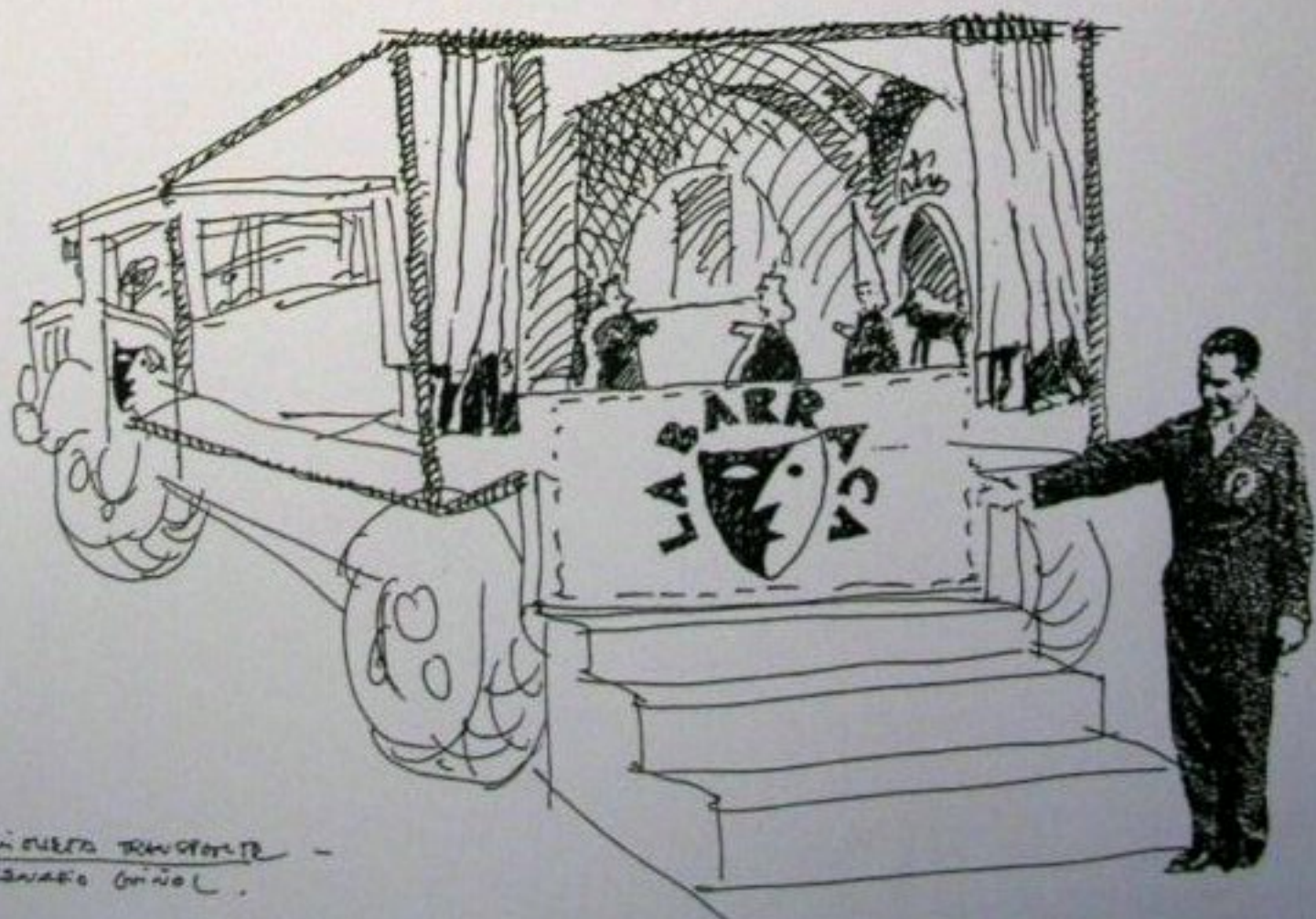
Composições m2 - Planos
 - Diédros
 - Triédros
 - Escadas

Unidades são cubos

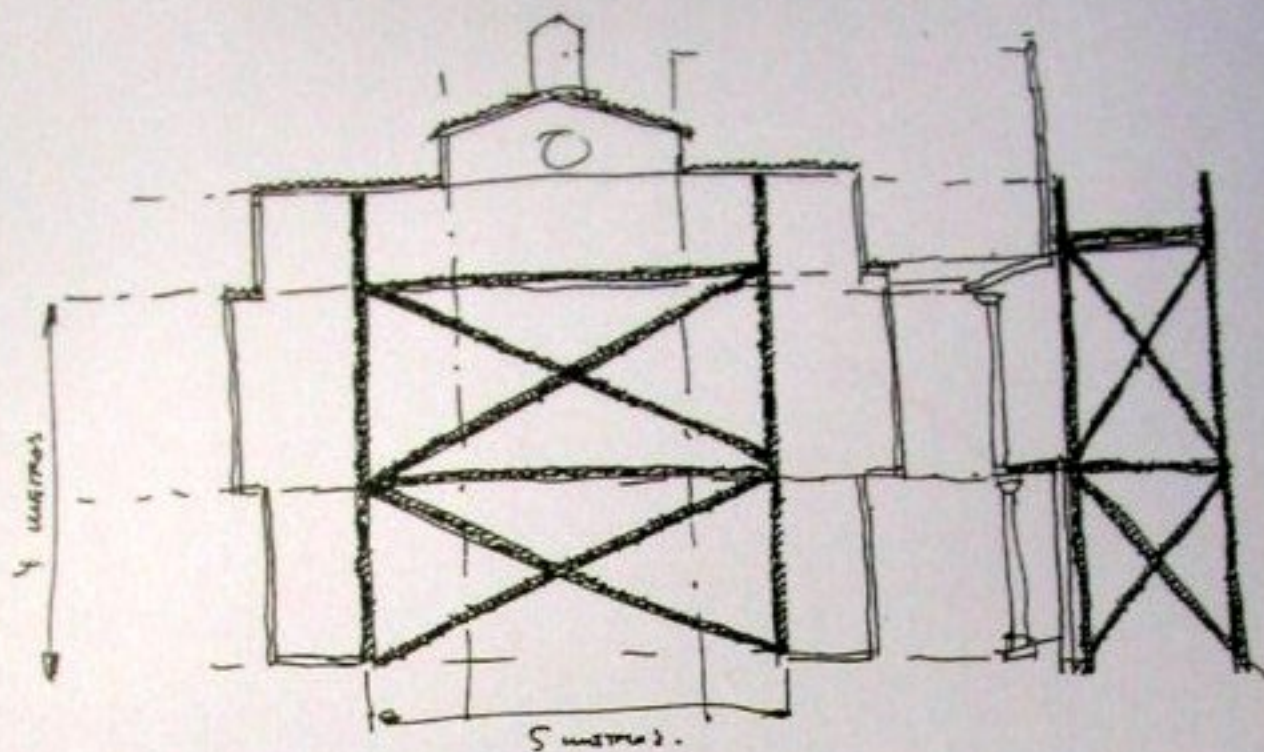




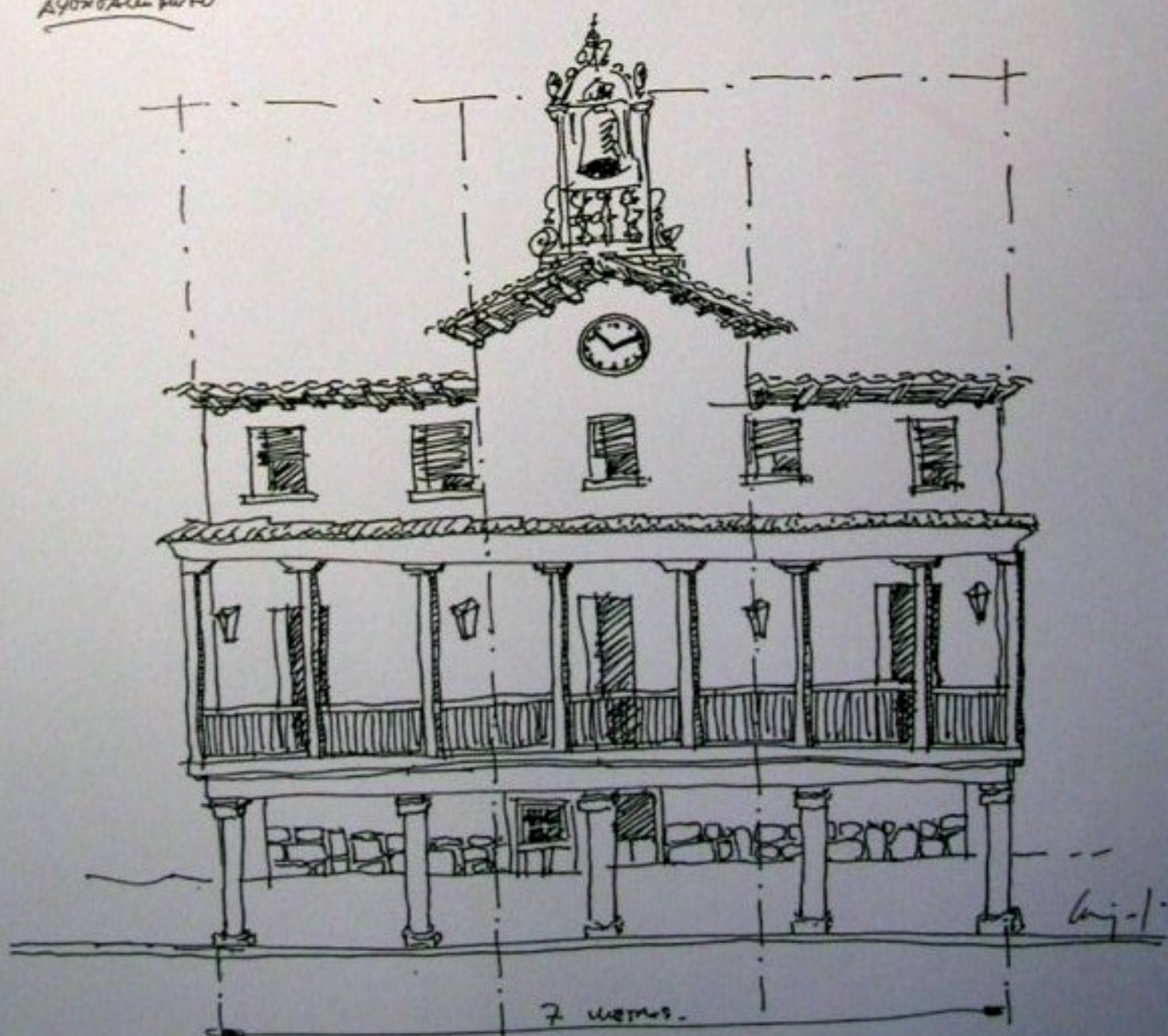
WÓMO DEL
WBO



LA BARRACA -
ESTRUCTURA PRINCIPAL



AYUNTAMIENTO





Casa Amar



Casa Amar

ESCUENARIO PARA 'LA BARRACA'

CON CREAR
DE
CARTÓN
(FRIGORÍFICOS...)

DE DESARROLLO



- CONTRATO DE OVS DE ALUMINIO
- CONTRATO PARA CACERÍA O PARA...

Color:
- ALUMINIO Y
TODOS
LOS DIVERSOS

EL INTERIOR DE LA CASA
(LO COMEADO)
EL EXTERIOR: LA CACERÍA
(LO COMEADO)

USANDO
S.P.O.

Color:
ALUMINIO Y
OCAS.

ESTRUTURA "CRISTO"

- PINTURA A BASE DE "FACETAS"
- CLAS DE IDENTIFICACIÓN. ESCRITO...

PARA
'EL RETABLO DE LAS MARAVILLAS'

RETRATOS "COMENTARIOS"

CAP. XII

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

- *El cubo de los colores* : Alfred Hickethier. Ed. Bouret
- *Las formas del color* : Karl Gerstner. Ed. Blume
- *Diseño y comunicación visual* : Bruno Munari. Ed. Gustavo Gili
- *El arte como oficio* : Bruno Munari. Ed. Labor
- *¿Cómo nacen los objetos?* : Bruno Munari. Ed. Gustavo Gili
- *Arte e industria* : Herbert Read. Ed. Infinito
- *Sobre el crecimiento y la forma* : D'Arcy Thomson. Ed. Blume
- *Teoría del campo* : A. Marcolli. Ed. Xarait
- *Potencias de diez* : Morrison. Ed. Biblioteca Scientific American
- *Pedagogía de la Bauhaus* : Rainer Wick. Ed. Alianza Forma
- *The world of M. C. Escher* : J. L. Locher. Ed. Abrams
- *El espejo mágico de Escher* : Bruno Ernst. Ed. Taco
- *M. C. Escher kaleidoscycles* : Schatzschneider y Walker. Ed. Tarquin
- *Unmöglichen Figuren* : Bruno Ernst. Ed. Taco
- *Fundamentos del diseño bi y tridimensional* : Wucius Wong. Ed. Gustavo Gili
- *La geometría en el arte* : Dan Pedoe. Ed. Gustavo Gili
- *Patrones y pautas en la naturaleza* : Peter Stevens. Ed. Ciencia Salvat
- *La estética de las proporciones en la naturaleza y el arte* : Matila Gila. Ed. Poseidon
- *Anatomía de la naturaleza* : Andreas Feininger. Ed. Jano
- *Fotografías* : Karl Blossfeldt. Ed. Taschen
- *La divina proporción* : Luca Pacioli. Ed. Akal
- *La Alhambra* : Revista Epsilon. Ed. Junta de Andalucía
- *Temas geométricos de la Alhambra* : Sordo Nestares. Ed. Universidad de Granada
- *Mathematical models* : H. M. Cundy. Ed. Tarquin
- *Gödel, Escher, Bach* : D. R. Hofstadter. Ed. Tusquets
- *Revistas*
 - Cuadernos de pedagogía. Barcelona
 - Acción Educativa. Madrid
 - Guix. Barcelona
 - L'escaire. Barcelona
 - Suma. Zaragoza
- *Videos*
 - *Del plano al espacio* : Javier Carvajal, Francisco Hernan, Ángel Salar. Ministerio E. y C.
 - *Forma y número* : Javier Carvajal. Fundación Bancaixa.

UNIVERSIDAD DE
SANTIAGO DE COMPOSTELA



GEOMETRIA CREATIVA



Javier Carvajal



Master Internacional

“CREATIVIDAD APLICADA”