LEYENDO A LEONHARD EULER (1707-1783): CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN EL JUEGO DE RENCONTRE

Vicente Meavilla Seguí (*)

En su dilatada producción científica, el suizo Leonhard Euler escribió diversos trabajos sobre Estadística y Probabilidad. En este artículo ofrecemos la traducción y un resumen de la memoria *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre*, publicada en las *Memoires de l'Academie des Sciences de Berlin* (1753)[(1]. Con ello queremos rendir un modesto homenaje a Euler en el tricentésimo aniversario de su nacimiento.

CALCUL DE LA PROBABILITE'

DANS LE JEU DE RENCONTRE,

PAR M. EULER.

LA TRADUCCIÓN

I. El Juego de Rencontre es un juego de azar en el que dos personas, con un mazo completo de cartas cada una, sacan a la vez una carta detrás de otra hasta que gana una de ellas si sacan la misma carta. Si no tiene lugar dicha coincidencia, entonces gana la otra persona. Con estos supuestos, se pregunta la probabilidad de ganar que tiene cada persona.

II. Para fijar mejor las ideas, supongamos que las dos personas, a las que llamaremos *A* y *B*, tienen el mismo número de tarjetas marcadas con los números 1, 2, 3, 4, 5, etc., y que cada una saca una tarjeta detrás de otra hasta que sacan a la vez el mismo número. Si tiene lugar esta coincidencia, gana la persona *A*. Sin embargo, si se llega a que las dos personas sacan todas sus tarjetas sin obtener el mismo número, entonces gana la persona *B*.

(*) Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

III. Como es indiferente el número con que está marcada cada tarjeta, se puede suponer que *A* saca todas sus tarjetas según el orden 1, 2, 3, 4, 5, etc. Para poderlo aplicar a las cartas, se supondrá que las cartas de cada mazo están numeradas según el orden en que son echadas sucesivamente por *A*. De modo que la número 1 será la carta que *A* saca primero; la número 2, la que saca en segundo lugar; la número 3, la que saca en tercer lugar, y así sucesivamente.

IV. Así, la persona *A*, que busca la coincidencia, ganará cuando *B* saque la carta número 1 en la primera extracción, o la número 2 en la segunda extracción, o la número 3 en la tercera extracción, o la número 4 en la cuarta extracción, etc. Si el número de la carta sacada por *B* nunca se corresponde con el número de la carta sacada por *A* en la misma extracción, entonces será *B* quien ganará la postura. Por este medio parece que la investigación del juego se presta más fácilmente a la aplicación del cálculo.

V. Entonces, el problema consiste en calcular la probabilidad de ganar que tienen *A* y *B* cualquiera que sea el número de cartas o de tarjetas numeradas. Dado que, en primera instancia, este cálculo varía según el número de tarjetas y se hace más complicado cuanto mayor sea el número de ellas, convendrá empezar la investigación con números de tarjetas pequeños y, a partir de ellos, llegar sucesivamente a los más grandes.

VI. Supongamos, en primer lugar, que los dos jugadores sólo tienen una carta marcada con el 1. Resulta obvio que la coincidencia se producirá siempre, de modo que ganará *A* inevitablemente. Entonces, en este caso, la probabilidad de ganar de *A* se expresará por 1 y la de *B* por 0, dado que esta persona no tiene esperanza alguna de ganar.

VII. Supongamos ahora que los dos jugadores *A* y *B* tienen dos cartas cada uno, numeradas por 1 y 2, y que *A* saca sus cartas en el orden 1, 2. En esta situación, se podrán presentar dos casos dado que *B* sacará sus dos cartas o bien en el orden 1,2 o en el orden 2, 1. En el primer caso, al darse la coincidencia en la primera extracción, gana *A*. En el segundo, al no darse coincidencia alguna, gana *B*.

VIII. Dado que cada uno de los dos casos es igualmente probable, tanto *A* como *B* tienen una ocasión para ganar. Por consiguiente, la probabilidad de uno y otro se expresará por 1/2 y cada uno tendrá derecho a tomar la mitad de la postura.

IX. Admitamos que los dos jugadores tienen tres cartas cada uno, marcadas con los números 1, 2, 3 y que *A* saca la 1 en primer lugar, la 2 en segundo lugar y la 3 en tercer lugar. Entonces, *B* podrá echar sus cartas de 6 formas diferentes

	B					
A	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	2	3	3
2	2	3	1	3	2	1
3	3	2	3	1	1	2

y cada uno de estos 6 casos es igualmente probable.

X. De estos 6 casos habrá dos, el primero y el segundo, en los que gana *A* y el juego acaba en la primera extracción. De los cuatro casos restantes, sólo hay uno, el quinto, en el que gana *A* en la segunda extracción y se acaba el juego. Entre los otros tres casos todavía hay uno, el tercero, en el que gana *A* en la tercera extracción.

XI. Entonces, de los 6 casos posibles hay cuatro que son favorables a *A* y dos, el cuarto y el sexto, que son favorables a *B*. Por tanto, al tener *A* cuatro ocasiones para ganar y *B* dos, la esperanza de *A* es igual a 4/6 = 2/3 y la de *B* = 2/6 = 1/3. Es decir: la ventaja de *A* es doble que la de *B*.

XII. Demos ahora cuatro cartas 1, 2, 3, 4 a cada uno de nuestros jugadores, y mientras *A* echa las suyas en el orden 1, 2, 3, 4, el orden de las cartas de *B* puede variar de 24 formas diferentes.

A	B																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
2	~~2~~	~~2~~	~~3~~	~~3~~	~~4~~	~~4~~	3	3	4	4	1	1	4	4	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3
3	~~3~~	~~4~~	~~4~~	~~2~~	~~2~~	~~3~~	4	1	1	3	4	3	1	2	2	4	~~1~~	~~4~~	2	3	~~3~~	~~1~~	1	2
4	~~4~~	~~3~~	~~2~~	~~4~~	~~3~~	~~2~~	1	4	3	1	3	~~4~~	2	3	4	2	~~4~~	~~1~~	3	~~2~~	~~1~~	~~3~~	2	1

y cada uno de estos 24 casos es igualmente posible.

XIII. Es evidente que en los seis primeros casos gana *A* en la primera extracción y, como se acaba el juego, he tachado los números siguientes en estas 6 columnas. De los 18 casos restantes hay 4, el 17, 18, 21 y 22, en los que gana *A* en la segunda extracción. Consecuentemente, estas columnas serán eliminadas. Por tanto, en catorce casos proseguirá el juego hasta la tercera extracción. Hay tres de ellos, el 10, 12 y 20 en los que gana *A*. Finalmente, de los once casos que quedan, sólo hay dos en los que la coincidencia se da en la cuarta extracción.

XIV. Entonces, hay 6 casos en los que gana *A* en la primera extracción, 4 en los que gana en la segunda, tres casos en los que gana en la tercera extracción y dos casos en los que gana en la cuarta. En total, hay 15 casos favorables a *A* y en los 9 restantes gana *B*. Por consiguiente, la probabilidad de ganar que tiene *A* es igual a 15/24 = 5/8 y la de *B* = 9/24 = 3/8. En otras palabras, la esperanza de *A* es a la de *B* como 5 es a 3.

XV. Si suponemos que el número de cartas igual a 5, obtendremos 120 casos diferentes para las variaciones que pueden darse en el orden de las cartas echadas por *B*, mientras *A* echa las suyas en el orden 1, 2, 3, 4, 5. Si quisiéramos representar todos estos casos para ver cuáles son favorables a *A* y cuáles a *B*, tardaríamos demasiado tiempo. Un número de cartas todavía mayor haría que esta representación fuese totalmente impracticable.

XVI. Además, una tal enumeración no sería, en general, muy útil para determinar las esperanzas de los dos jugadores *A* y *B* para cualquier número de cartas. A tal efecto es necesario hacer algunas observaciones generales que nos conduzcan al conocimiento de las probabilidades para números grandes de cartas, conociendo las probabilidades para números más pequeños.

XVII. En primer lugar hago notar que si el número de cartas es igual a *m*, entonces habrá tantos casos diferentes como unidades contiene el producto de los números 1, 2, 3, 4, 5, hasta el *m*. O bien, el número de casos es igual a $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$. Siempre supongo que *A* echa sus cartas en el orden de los números 1, 2, 3, 4, . . . *m* con los que ellas están marcadas, y el producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m$ nos dará el número de casos que se pueden dar en el orden de las cartas sacadas por *B*.

XVIII. Esto resulta claro en virtud de los primeros principios de las combinaciones, de donde sabemos que el orden de 2 cartas puede variar 2 veces; el de 3 cartas, 6 veces; el de 4 cartas, 24 veces; el de 5 cartas, 120 veces; el de 6 cartas, 720 veces; el de 7 cartas, 5040 veces; el de 8 cartas, 40320 veces, y, en general, el de *m* cartas, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m$ veces.

XIX. Para abreviar, el número de casos $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m$ se designará por *M*. En segundo lugar, hagamos notar que habrá M/m casos en los que la primera carta echada por *B* será 1, M/m casos en los que la primera carta extraída por *B* será 2, y también habrá M/m casos en los que la primera carta de *B* será 3, o 4, o 5, . . ., o *m*.

XX. Además, si dejamos de lado que el juego acaba cuando *B* tiene coincidencia con *A*, y suponemos que prosigue hasta que se han echado todas las cartas, cualquiera que fuese el número de coincidencias, resulta también claro que habrá M/m casos en los que la segunda carta de *B* será 2, y el mismo número de casos en los que la tercera carta será 3, o la cuarta será 4, o la quinta será 5, o la sexta será 6, y así sucesivamente.

XXI. Entonces, suponiendo que se siguen echando las cartas hasta el final, habrá M/m casos en los que gana *A* en la primera extracción, M/m casos en los que gana *A* en la segunda extracción, y el mismo número de casos en los que gana *A* en la tercera, cuarta, quinta, . . ., última extracción.

XXII. Pero, aunque haya M/m casos en los que gana *A* en la primera extracción, no habrá tantos casos en los que gane en la segunda, dado que de los M/m casos en los que, con la suposición anterior, habría ganado en la segunda extracción, deberemos quitar aquellos en los que ya ha ganado en la primera, dado que tan pronto como gana *A* el juego se acaba.

XXIII. Sucede lo mismo para el número M/m de veces en las que *B* saca la carta número 3 [en la tercera extracción], puesto que deberemos quitar aquellos casos en los que se da la coincidencia en la primera y la segunda extracción. Y para que gane *A* en la cuarta extracción, deberemos quitar del número de todos los casos posibles = M/m aquellos en los que se ha producido la coincidencia en la primera, segunda y tercera extracción.

XXIV. Entonces, con carácter general, del número de casos M/m en que, con la hipótesis precedente, ganaría *A* en una extracción cualquiera, deberemos suprimir todos aquellos en los que se ha producido la coincidencia en alguna de las extracciones anteriores. Así, el número de casos disminuye más y más a medida que la extracción se aleja del comienzo del juego.

XXV. Para decidir cuánto se debe disminuir el número de casos favorables M/m en cada extracción, o para saber el número de aquellos en los que ya se ha producido la coincidencia en alguna extracción anterior, he aquí mi método. Supongo que la carta que da lugar a una coincidencia en una determinada extracción se suprime de los dos mazos. El orden de las cartas y el número de casos será el mismo que cuando el número de cartas disminuye en una unidad.

XXVI. Para hacer esto más inteligible consideremos, en el caso de 4 cartas y 24 casos, aquellos donde *B* saca la carta número 3 en la tercera extracción, que son los marcados con 1, 6, 10, 12, 20, 21. De estos, suprimamos la carta marcada con el 3 y tendremos:

A	B					
1	1	1	2	2	4	4
2	2	4	4	1	1	2
4	4	2	1	4	2	1

que son precisamente los casos que se tendrían para tres cartas marcadas con 1, 2 y 4.

XXVII. Puesto que estos son los casos en los que *B* saca la carta número 3 en la tercera extracción, y dado que es necesario quitar aquellos en los que se ha producido la coincidencia en la primera extracción y en la segunda, resulta claro que este número que debe restarse se encuentra en los casos que se tendrían para tres cartas, sumando aquellos en los que gana *A* en la primera o segunda extracción.

XXVIII. Entonces, en general, si el número de cartas es igual a m y se quiere saber en cuánto se debe disminuir el número de casos M/m en los que se produce la coincidencia en una extracción cualquiera, deberemos recurrir al número de cartas = $m - 1$ y buscar los casos en los que gana *A* en alguna de las extracciones precedentes. La suma de todos estos casos será el número que deberemos restar de M/m, para obtener el números de veces en las que gana *A* en una extracción dada.

XXIX. Supongamos entonces el número de cartas igual a m y el número de todos los casos posibles $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m = M$. Sea:

a el número de veces en las que gana *A* en la primera extracción
b el número de veces en las que gana *A* en la segunda extracción
c el número de veces en las que gana *A* en la tercera extracción
d el número de veces en las que gana *A* en la cuarta extracción
e el número de veces en las que gana *A* en la quinta extracción
etc.,

Sabemos que $a = M/m$. Para los otros números b, c, d, e, etc., pronto veremos su progresión.

XXX. Sea ahora el número de cartas una unidad mayor, o = m + 1, y el número de todos los casos posibles igual a $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (m + 1) = M(m + 1)$, que es M'.

Sea:

a' el número de veces en las que gana *A* en la primera extracción
b' el número de veces en las que gana *A* en la segunda extracción
c' el número de veces en las que gana *A* en la tercera extracción
d' el número de veces en las que gana *A* en la cuarta extracción
e' el número de veces en las que gana *A* en la quinta extracción
etc.,

XXXI. Con esto, se tiene que $a' = \dfrac{M'}{m+1} = M$; y continuando el juego, a pesar de las coincidencias obtenidas, también habrá M casos en los que se llegará a la coincidencia en la segunda extracción. De estos deberemos quitar aquellos en los que se ha dado la coincidencia en la extracción anterior. Dado que este número es = *a*, como ya hemos visto (29), tendremos que $b' = M - a$ es el número de veces en las que gana *A* en la segunda extracción.

XXXII. El número de casos en los que se da la coincidencia en la tercera extracción también será = *M*, y como de estos debemos excluir aquellos en los que se da la coincidencia en la primera y segunda extracción, es decir: aquellos en los que gana *A* en la primera y segunda extracción cuando el número de cartas es una unidad menor, tendremos que el número de casos en los que gana *A* en la tercera extracción es $c' = M - a - b$.

XXXIII. Ocurre lo mismo con los casos en los que gana *A* en cualquiera de las extracciones siguientes. Por tanto, conociendo los números *a*, *b*, *c*, *d*, etc., para el número de cartas igual a *m*, podemos deducir fácilmente los números *a´*, *b´*, *c´*, *d´*, etc., cuando el número de cartas es igual a $m + 1$. Tendremos que:

$$a' = M$$
$$b' = M - a$$
$$c' = M - a - b$$
$$d' = M - a - b - c$$
$$e' = M - a - b - c - d$$
etc.,

XXXIV. Por tanto, sabiendo que cuando el número de cartas es $m = 1$ y $M = 1$, entonces $a = 1$, para dos cartas tendremos $a' = 1$ y $b' = 1 - 1 = 0$. Sea $m = 2$, y siendo $M = 2$, $a = 1$, $b = 0$, para tres cartas tendremos que:

$$a' = 2 \;,\; b' = 2 - 1 = 1 \;,\; c' = 2 - 1 - 0 = 1$$

Supongamos que $m = 3$, entonces $M = 6$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$. Entonces, para cuatro cartas tendremos que:

$$a' = 6 \;,\; b' = 6 - 2 = 4 \;,\; c' = 6 - 2 - 1 = 3 \;,\; d' = 6 - 2 - 1 - 1 = 2$$

XXXV. De esta forma podremos calcular estos números para un número de cartas tan grande como queramos. Para ver mejor la progresión, los representaremos de la forma siguiente:

NOMBRE DES CARTES

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
a	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880
b	-	0	1	4	18	96	600	4320	35280	322560
c	-	-	1	3	14	78	504	3720	30960	387280
d	-	-	-	2	11	64	426	3216	27240	256320
e	-	-	-	-	9	53	362	2790	24024	229080
f	-	-	-	-	-	44	309	2428	21234	205056
g	-	-	-	-	-	-	265	2119	18806	183822
h	-	-	-	-	-	-	-	1854	16687	165016
i	-	-	-	-	-	-	-	- -	14833	148329
k	-	-	-	-	-	-	-	- -	- -	133496

XXXVI. Si dividimos estos números por el número de todos los casos posibles correspondientes a cada número de cartas, obtendremos, en primer lugar, las esperanzas de A para ganar en la primera extracción:

Número de cartas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	etc.
Esperanza de *A*	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	etc.

Por tanto, concluimos que si el número de cartas es igual a n, entonces la esperanza de que gane A en la primera extracción será igual a $1/n$.

XXXVII. Si consideramos los números de la tabla §. 35, vemos, en primer lugar, que cada número es la diferencia del que tiene encima y del que le precede. Así, si para un número m de cartas, el número de veces en que gana A en una cierta extracción es p, y el número de veces en las que gana A en la misma extracción , si el número de cartas es $m + 1$, es igual a q, y el número de veces en las que gana A en la siguiente extracción es igual a r, siendo el número de cartas igual a $m + 1$, entonces $r = q – p$.

XXXVIII. Entonces, para un número de cartas = m, siendo el número de todos los casos posibles $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m = M$, la esperanza de que gane A en una cierta extracción será $= p/M$, que designaré por P. Para un número de cartas igual a $m + 1$, el número de todos los casos será igual a $M(m + 1)$ y la esperanza de que gane A en la misma extracción será $= \dfrac{q}{M(m+1)}$, que designaré por Q, y la esperanza de que gane A en la extracción siguiente será $= \dfrac{r}{M(m+1)}$, que designaré por R. Con

esto, se tiene que $R = \dfrac{q-p}{M(m+1)}$ o bien $R = Q - \dfrac{P}{m+1}$.

XXXIX. Si el número de cartas es igual a $n – 1$, la esperanza de que gane A en la primera extracción

es igual a $\dfrac{1}{n-1}$. Entonces, para un número de cartas igual a n, la esperanza de que gane A en la segunda extracción será igual a $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{(n-1)\,n} = \dfrac{n-2}{(n-1)\,n}$.

XL. Entonces, como la esperanza de que gane A en la segunda extracción cuando el número de cartas es igual a $n – 1$ es $\dfrac{n-3}{(n-2)\,(n-1)}$, concluimos que cuando el número de cartas sea igual a n, su esperanza de ganar en la tercera extracción será

$$\frac{n-2}{(n-1)\,n} - \frac{n-3}{(n-2)\,(n-1)\,n} = \frac{nn-5n+7}{(n-2)\,(n-1)\,n} = \frac{(n-2)^2-(n-3)}{n\,(n-1)\,(n-2)}\ ^{(3)} .$$

XLI. A partir de aquí, de modo similar, deducimos que para un número de cartas igual a n, la esperanza de que gane A en la cuarta extracción será =

$$\frac{(n-2)^2-(n-3)}{n\,(n-1)\,(n-2)} - \frac{(n-3)^2-(n-4)}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)} = \frac{(n-2)^2\,(n-3)-2\,(n-3)^2+(n-4)}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)},$$

y la esperanza de que gane A en la quinta extracción será:

$$\frac{(n-2)^2\,(n-3) - 2\,(n-3)^2 + (n-4)}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)} - \frac{(n-3)^2\,(n-4) - 2\,(n-4)^2 + (n-5)}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)} =$$

$$\frac{(n-2)^2\,(n-3)\,(n-4) - 3\,(n-3)^2\,(n-4) + 3\,(n-4)^2 - (n-5)}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}$$

XLII. A poco que se reflexione sobre la formación de estas fórmulas, se encontrará que, si el número de cartas es = *n*, la esperanza de que gane *A* será:

– en la primera extracción igual a $\frac{1}{n}$

– en la segunda extracción igual a $\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)}$

– en la tercera extracción igual a $\frac{1}{n} - \frac{2}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)\,(n-2)}$

– en la cuarta extracción igual a

$$\frac{1}{n} - \frac{3}{n(n-1)} + \frac{3}{n(n-1)\,(n-2)} - \frac{1}{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}$$

– en la quinta extracción igual a

$$\frac{1}{n} - \frac{4}{n(n-1)} + \frac{6}{n(n-1)\,(n-2)} - \frac{4}{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)} + \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-4)}$$

– en la sexta extracción igual a

$$\frac{1}{n} - \frac{5}{n(n-1)} + \frac{10}{n(n-1)\,(n-2)} - \frac{10}{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)} + \frac{5}{n\ldots(n-4)} - \frac{1}{n\ldots(n-5)}$$

etc.

XLIII. Por tanto, la esperanza de que gane *A* en cualquier movimiento será igual a la suma de todas estas fórmulas. Entonces, como el número de fórmulas coincide con el número *n* de cartas, la suma de todos los primeros términos será igual a n · = 1. Después, como la suma de los numeradores de los segundos términos es =igual a 1 + 2 + 3 + 4 + . . . + (n – 1) = $\frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2}$, la suma de todos los segundos términos será igual a $\frac{1}{1 \cdot 2}$.

Después, como la suma 1 + 3 + 6 + 10 + . . .+ $\frac{(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, la suma de los terceros términos es igual a $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, y la suma de los cuartos términos es igual a $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, la de los quintos términos es igual a $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$, etc.

XLIV. De aquí se sigue que si

el número de cartas es	**la esperanza de que gane A será**
1	1
2	$1 - \dfrac{1}{1 \cdot 2}$
3	$1 - \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
4	$1 - \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$
5	$1 - \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$
6	$1 - \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$

En esta sucesión siempre se tomarán tantos términos como cartas.

XLV. Por tanto, el mayor valor para la esperanza de que gane *A* se obtiene para el juego con una carta y el menor para el juego con dos cartas. Además, cuando el número de cartas es impar, la esperanza de que gane *A* siempre es mayor que para cualquier número par de cartas. Entonces, cuando el número de cartas es par, la esperanza de que gane *A* es menor que para cualquier número impar de cartas.

XLVI. Una vez que se ha determinado la esperanza de *A*, sólo se tiene que restar de la unidad para obtener la esperanza de *B*, dado que la esperanza de cada uno indica la parte de la postura que cada uno puede reclamar en virtud de la probabilidad que tiene de ganar el juego. Así, si la esperanza de *A* es igual a x, entonces la de *B* es igual a 1 – x.

XLVII. Las fórmulas que acabamos de encontrar para la esperanza de *A* se reducen fácilmente a números decimales que permiten juzgar mejor su verdadero valor. Efectuando dichos cálculos, tenemos que:

nombre des cartes.	l'espérance de A	l'espérance de B
1	1, 000000000	0, 000000000
2	0, 500000000	0, 500000000
3	0, 666666666	0, 333333333
4	0, 625000000	0, 375000000
5	0, 633333333	0, 366666666
6	0, 631944444	0, 368055555
7	0, 632142857	0, 367857143
8	0, 632118055	0, 367881945
9	0, 632120811	0, 367879189
10	0, 632120536	0, 367879464
11	0, 632120561	0, 367879439
12	0, 632120558	0, 367879442
13	0, 632120559	0, 367879441
14	0, 632120558	0, 357879442
15	0, 632120558	0, 367879442
	&c.	&c.

XLVIII. Por tanto, si despreciamos las cifras decimales, a partir de la novena, podemos decir que cuando el número de cartas es mayor que 12, las esperanzas de *A* y *B* no varían por muy grande que sea el número de cartas. Entonces, cuando el número de cartas no es menor que 12 se podrá decir que la esperanza de *A* es igual a 0,632120558 y la de *B* igual a 0,367879442.

XLIX. Entonces, cuando el número de cartas no sea inferior a 12, la esperanza de que gane *A* estará a la de *B* como, aproximadamente, 12 es a 7; o más exactamente, como 122 es a 71; o más exactamente, como 1720 es a 1001. En otras palabras, de 19 juegos que se jueguen, *A* ganará probablemente 12 y *B* ganará 7.

L. Si el número de cartas fuese infinito, la esperanza de *A* se expresaría por la serie infinita

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} + \text{etc.}$$

y la esperanza de *B* por

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \text{etc.}$$

Escribiendo *e* para designar el número cuyo logaritmo es igual a 1, se ve que $1/e$ es la suma de esta última serie. Entonces, para el caso n = •, la esperanza de que gane *A* será igual a $1 - 1/e$ y la de *B* será igual a $1/e$. Pero sabemos que

$$e = 2{,}718281828459045235360$$

LI. Sustituyendo este valor de e obtendremos que la esperanza de *A* es a la de *B* como 1,718281828459045235360 es a 1, y esta proporción será correcta si el número de cartas es mayor que 20. Consecuentemente, será muy exacta para el caso de este juego que ordinariamente se juega con 52 cartas.

EL RESUMEN

Aunque la claridad de Euler en toda su exposición es incuestionable, nos parece conveniente presentar un resumen de su discurso utilizando un lenguaje más actual.

1. El juego de las coincidencias

Dos jugadores *A* y *B* disponen cada uno de dos mazos de cartas idénticos. Simultáneamente echan una carta hasta que se produce la coincidencia (las dos cartas coinciden). En esta situación gana, por ejemplo, el jugador *A* y se acaba el juego. Si después de echar todas las cartas no se produce coincidencia alguna, entonces gana *B*.

2. El problema

En la memoria *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre*, Euler se plantea el problema siguiente: calcular las probabilidades de ganar de cada uno de los dos jugadores en función del número de cartas de cada mazo.

3. El código

Para dar respuesta a la cuestión precedente el científico suizo asigna a las cartas que el jugador A va echando sucesivamente los números 1, 2, 3, . . . , n.

4. La estrategia: primeros pasos

Acto seguido, Euler analiza los juegos en que cada jugador dispone de 1, 2, 3 y 4 cartas, respectivamente.

- Si el número de cartas es n = 1, resulta obvio que siempre gana el jugador *A* en la primera y única extracción. Por tanto, si designamos por $A^{(n)}$ el suceso "gana el jugador *A*, cuando el número de cartas es *n*" resulta que $p(A^{(1)}) = 1$.
- Si el número de cartas es $n = 2$, entonces las posibles situaciones que se pueden presentar se contemplan en la tabla siguiente:

A	B	
1	**1**	2
2	2	1

Dado que sólo se produce la coincidencia cuando el jugador *B* extrae las cartas en el orden 1, 2, resulta que $p(A^{(2)}) = \frac{1}{2}$.

- Si el número de cartas es n = 3, entonces se pueden dar los casos siguientes:

A	B					
1	**1**	**1**	2	2	3	3
2	2	3	1	3	1	**2**
3	3	2	**3**	1	2	1

La coincidencia se produce en 4 ocasiones (dos en la primera extracción; una en la segunda extracción; una en la tercera extracción). Por tanto $p(A^{(3)}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

- Si el número de cartas es $n = 4$, las diversas situaciones que pueden presentarse se muestran en la siguiente tabla:

A	B																							
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
2	2	2	3	3	4	4	1	1	3	3	4	4	1	1	**2**	**2**	4	4	1	1	**2**	**2**	3	3
3	3	4	2	4	2	3	**3**	4	1	4	1	**3**	2	4	1	4	1	2	2	**3**	1	3	1	2
4	4	3	4	2	3	2	4	3	**4**	1	3	1	**4**	2	4	1	2	1	3	2	3	1	2	1

La coincidencia se produce en 15 ocasiones (seis en la primera extracción; cuatro en la segunda; tres en la tercera; dos en la cuarta). Entonces:

$$p(A^{(4)}) = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}.$$

Dado que el número de posibles extracciones del jugador *B* es igual a 5! = 120, cuando el número de cartas de cada mazo es cinco, resulta claro que, a partir de *n* = 4, un tratamiento similar a los anteriores resulta muy pesado o impracticable.

Conviene, pues, afinar nuestro análisis.

5. La estrategia: seguimos avanzando

Teniendo en cuenta algunos resultados obtenidos en la fase anterior podemos construir la tabla siguiente:

	Número de cartas			
	1	**2**	**3**	**4**
Nº de veces que gana A en la 1ª extracción	1	1	2	6
Nº de veces que gana A en la 2ª extracción		0	1	4
Nº de veces que gana A en la 3ª extracción			1	3
Nº de veces que gana A en la 4ª extracción				2

Notemos que, a partir de la segunda fila, cada uno de los elementos de la tabla se obtiene como diferencia entre el inmediatamente superior y su precedente.

1	1	2	6
	0 = 1 – 1	1 = 2 – 1	4 = 6 – 2
		1 = 1 – 0	3 = 4 – 1
			2 = 3 – 1

Advirtamos también, que el número de veces que gana *A* en la primera extracción viene dado por (n – 1)!, siendo n el número de cartas.

Con estos supuestos, consideremos la tabla siguiente:

	Número de cartas	
	n – 1	**n**
Nº de veces que gana A en la i-ésima extracción	p	q
Nº de veces que gana A en la (i + 1)-ésima extracción		r = q – p

Si designamos por $A^{(n,i)}$ el suceso "gana el jugador A en la i-ésima extracción, cuando el número de cartas es n" se tiene que:

$$p(A^{(n-1,i)}) = \frac{p}{(n-1)!}$$

$$p(A^{(n,i)}) = \frac{q}{n!}$$

$$p(A^{(n,i+1)}) = \frac{r}{n!} = \frac{q-p}{n!} = \frac{q}{n!} - \frac{p}{n!} = \frac{q}{n!} - \frac{p}{n \cdot (n-1)!} = p(A^{(n,i)}) - \frac{p(A^{(n-1,i)})}{n} \qquad [1]$$

6. La solución

Sabemos que:

$p(A^{(n,i)}) = p(A^{(n,1)}) + p(A^{(n,2)}) + p(A^{(n,3)}) + \ldots + p(A^{(n,n)})$

Por tanto, para resolver el problema que nos ocupa deberemos ser capaces de determinar el valor de cada uno de los n sumandos anteriores.

$$p(A^{(n,1)}) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \qquad [2] \quad , \qquad p(A^{(n-1,1)}) = \frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n-1}$$

A partir de aquí, teniendo en cuenta la fórmula [1], obtenida en la sección anterior, resulta que:

$$p(A^{(n,2)}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)} \qquad [3]$$

Además, atendiendo a la tabla siguiente, se puede calcular $p(A^{(n-1,2)})$

	Número de cartas	
	n – 2	**n – 1**
Nº de veces que gana A en la 1ª extracción	(n – 3)!	(n – 2)!
Nº de veces que gana A en la 2ª extracción		(n – 2)! – (n – 3)!

En efecto:

$$p(A^{(n-1,2)}) = \frac{(n-2)! - (n-3)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)(n-2)}$$

Notemos que la expresión anterior se hubiese podido obtener a partir de la [3] sustituyendo n por $n - 1$.

Entonces:

$$p(A^{(n,3)}) = p(A^{(n,2)}) - \frac{p(A^{(n-1,2)})}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{2}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \qquad [4]$$

De aquí, sustituyendo n por $n - 1$ resulta que:

$$\frac{p(A^{(n-1,2)})}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{2}{(n-1)(n-2)} + \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

Luego:

$$p(A^{(n,4)}) = p(A^{(n,3)}) - \frac{p(A^{(n-1,3)})}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{2}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n(n-1)} + \frac{2}{n(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{3}{n(n-1)} + \frac{3}{n(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \qquad [5]$$

Resumiendo:

$$p(A^{(n,1)}) = \frac{1}{n}$$

$$p(A^{(n,2)}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)}$$

$$p(A^{(n,3)}) = \frac{1}{n} - \frac{2}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$p(A^{(n,4)}) = \frac{1}{n} - \frac{3}{n(n-1)} + \frac{3}{n(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

. . . .

. . . .

Notemos que los numeradores de las fracciones anteriores son las filas del triángulo de Pascal.

Para resolver el problema, sólo nos falta "calcular" la suma:

$$p(A^{(n,1)}) + p(A^{(n,2)}) + p(A^{(n,3)}) + \ldots + p(A^{(n,n)})$$

Euler, lo hace sumando las columnas de los segundos miembros de las n expresiones anteriores.

La suma de la primera columna es igual a $n \cdot \frac{1}{n} = 1$

La suma de la segunda columna es:

$$\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n(n-1)} = \frac{\frac{1+(n-1)}{2} \cdot (n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}$$

La suma de la tercera columna es igual a

$$\frac{1+3+6+10+\ldots+\frac{(n-2)(n-1)}{2}}{n(n-1)(n-2)},$$

donde el numerador es la suma de los $n - 2$ primeros números triangulares.

Teniendo en cuenta que la suma de los n primeros números triangulares viene dada por

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

resulta que:

$$\frac{1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{(n-2)(n-1)}{2}}{n(n-1)(n-2)} = \frac{\frac{(n-2)(n-1)n}{6}}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$$

De forma similar se podría comprobar que la suma de la cuarta columna es $\frac{1}{4!}$, que la suma de la quinta columna es $\frac{1}{5!}$, . . ., que la suma de la enésima columna es $\frac{1}{n!}$.

Por tanto:

$$p(A^{(n)}) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots \pm \frac{1}{n!}$$

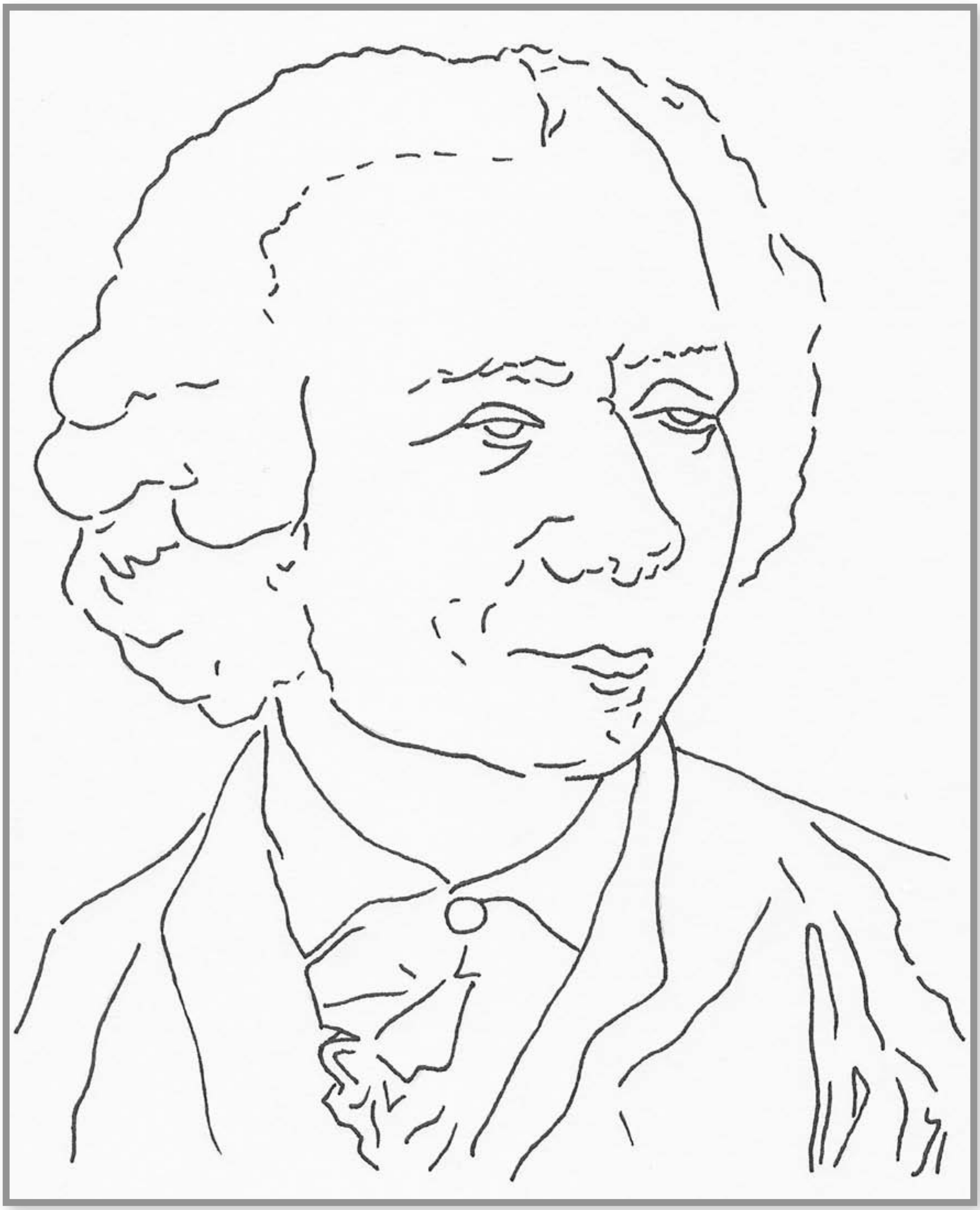
REFERENCIAS ON LINE

The Euler Archive
http://www.math.dartmouth.edu/~euler/

Sandifer, E. How Euler Dit It.
http://www.maa.org/editorial/euler/How%20Euler%20Did%20It%2011%20Derangements.pdf

NOTAS

(!) Tomo VII, pp. 255-270.



LEOHHARD EULER (1707-1783)
Dibujo de Vicente Meavilla