# Capítulo 3

# Sistemas de numeración.

## 3.1 Introducción histórica.

Todos entendemos frases como "tengo dos hermanos", "cuesta tres mil quinientas pesetas", "en el año doscientos catorce antes de Cristo", porque sabemos interpretar las cantidades y escribirlas con números: 2, 3500 y 214. Estos números están escritos usando ciertos símbolos (0, 1,. . .,9) de acuerdo a ciertas reglas.

Cuando los hombres comenzaron a contar usaron los dedos, guijarros, marcas en bastones y otras muchas formas. Pero cuando las medidas son grandes se hace necesario un sistema de representación práctico. ¿Cómo lo hacemos para expresar 1000 cabras con los dedos? En diferentes partes del mundo y en ciertas épocas se llegó a la misma solución, cuando se alcanza un número determinado se hace una marca distinta a las demás. Este número es la base (decenas). Se sigue añadiendo unidades hasta que se vuelve a alcanzar por segunda vez el número anterior y se añade otra marca de segundo orden (centenas).

La base que más se ha usado a lo largo de la Historia es 10, sistema decimal, y según todas las apariencias por ser ese el número de dedos de las manos. Todavía hoy vemos a muchas personas contar con los dedos de las manos. Los babilonios usaban los sistemas con base 10 y con base 60, sistema sexagesimal con el que todavía contamos el tiempo (1 hora tiene 60 minutos y un minuto 60 segundos). En el imperio maya se usaban las bases 20 y 5. Hay partidarios de usar el sistema con base 12 (duodecimal) por contar cada dedo con tres falanges y usar el pulgar para contarlas. Con la aparición de la informática se empieza a usar el sistema en base 2 (binario) y en base 16 (hexadecimal).

La forma de escribir los números sí que ha variado de una civilización a otra, muchos pueblos han visto impedido su avance científico por no contar con un sistema eficaz de cálculo, mientras que otros avanzaban considerablemente por disponer de un sistema de numeración sencillo. Todos tienen en común la facilidad para representar números enteros pequeños, pero a la hora de representar magnitudes grandes muchos fracasan. También surge el problema de las operaciones, requerían tales procedimientos que sólo estaban al alcance de unos pocos. De hecho cuando en Europa empieza a usarse el sistema decimal, los abaquistas (profesionales del cálculo) se oponían con la justificación de que un sistema tan sencillo para escribir números y operar debía estar inspirado por el diablo.

Los sistemas de numeración se dividen en dos grandes grupos: aditivos y posicionales. En los aditivos se acumulan tanto símbolos como sea necesario hasta completar el número, mientras que en los posicionales la posición de una cifra nos indica el valor: decenas, centenas, etc.

## 3.2 Sistema egipcio.

Desde el tercer milenio antes de Cristo los egipcios usan un sistema de escritura en base diez utilizando los símbolos de la figura para representar los distintos ordenes de unidades:

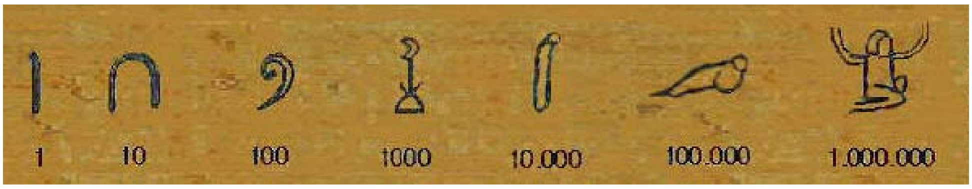


Figura 3.1: Sistema egipcio de numeración

Se usaban tantos símbolos como fuese necesario y se podían escribir indistíntamente de izquierda a derecha o de arriba a abajo. En el ejemplo de la figura 3.2 vemos como representar 276 y 3456.

Al ser indiferente el orden se escribía según criterios estéticos. El principal inconveniente que presentaba era que los números cercanos a decenas, centenas, miles, etc. son muy largos y por tanto se producen errores al contar. Así empezaron a introducir símbolos propios para 20, 30, 90, 2000, etc. Se usaron hasta la incorporación de Egipto al Imperio Romano.

**Ejercicio 3.2.1** *Escribe en el sistema egipcio 99 y 1579.*

## 3.3 El sistema griego.

El primer sistema de numeración griego, llamado ático, se desarrolló hacia el 600 a.C. Era un sistema de base decimal que usaba los símbolos de la figura 3.3, se utilizaban tantos símbolos como fuera necesario según el principio de las numeraciones aditivas.

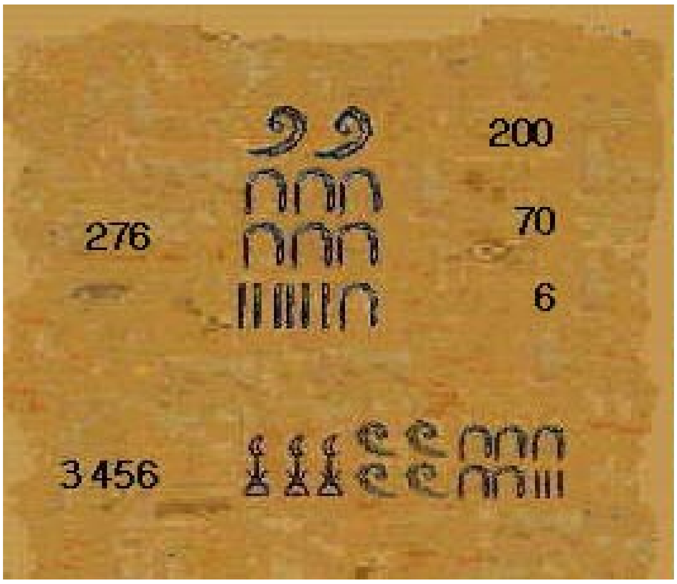


Figura 3.2: Ejemplo del sistema egipcio

Para representar la unidad y los números hasta el cuatro empleaban trazos verticales. Para el 5, 10 y 1000 las iniciales de pente (cinco), deka (diez) y khiloi (mil). Por este motivo también se le llama acrofónico. Los símbolos de 50, 500 y 5000 se obtienen añadiendo el signo de 10, 100 y 1000 al de 5, usando un principio multiplicativo.

Posteriormente este sistema ático fue reemplazado por el jónico, aparece en la figura 3.4, que empleaba las 24 letras del alfabeto griego junto con algunos símbolos.

De esta forma los números parecen palabras y las palabras tienen un valor numérico. Esta circunstancia propició la aparición de una disciplina mágica que estudiaba la relación entre los números y las palabras: la kábala. En algunas sociedades como la judía y la árabe el estudio de esta relación ha tenido una gran importancia, con fines místicos y adivinatorios.

**Ejercicio 3.3.1** *Escribir el número 4567 en los sistemas ático y jónico griegos.*

**Ejercicio 3.3.2** *Busca en un diccionario la palabra* ***cabalístico.***

## 3.4 Sistemas posicionales.

Mucho más efectivos que los sistemas anteriores son los posicionales. En ellos la posición de una cifra nos dice si son decenas, centenas, etc. Tres culturas, además de la india, logran desarrollar un sistema de este tipo:


Figura 3.3: Sistema ático de numeración

babilonios, chinos y mayas. Fueron los indios, antes del siglo VII, los que idean este sistema tal y como hoy lo conocemos. Aunque con frecuencia nos hemos referido a nuestro sistema de numeración como árabe, las pruebas arqueológicas y documentales demuestran que en la India ya trabajaban con el cero. Los árabes transmiten esta forma de representar los números aunque se tardan siglos en generalizar su uso.[8]

**Ejercicio 3.4.1** *¿Dónde se desarrolló la cultura babilónica?*

**Ejercicio 3.4.2** *Busca una biografía de Fibonacci (Leonardo de Pisa) y relacionalo con el sistema indio de numeración.*

## 3.5 Sistema romano.

La película Ben-Hur se desarrolla en Judea en la época de Jesucristo. Comienza con el cuadro:

**ANNO XXVI**

de esta manera se situa al espectador en el año 26.

El sistema romano de numeración [9], que todavía sigue usándose, consta de 7 símbolos:

| I | V | X | L | C | D | M |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 |

con las reglas de manejo siguientes:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | α | 10 | ι | 100 | ρ |
| 2 | β | 20 | κ | 200 | σ |
| 3 | γ | 30 | λ | 300 | τ |
| 4 | δ | 40 | μ | 400 | υ |
| 5 | ε | 50 | ν | 500 | φ |
| 6 | ϛ | 60 | ξ | 600 | χ |
| 7 | ζ | 70 | ο | 700 | ψ |
| 8 | η | 80 | π | 800 | ω |
| 9 | θ | 90 | ϙ | 900 | ϡ |

Figura 3.4: Sistema jónico de numeración

- Cada una de las letras asociadas con el 1 (I, X, C, M) puede repetirse y aparecer seguidas hasta tres veces, pero las asociadas con el 5 (V, L, D) no pueden repetirse e ir seguidas. Expresiones válidas serían XXX (30), CCCIII (303), LV (55) y DL (550). Expresiones no válidas son MMMM, IIII, LL, DD.

- Las letras se leen de izquierda a derecha. A la izquierda se ponen las de mayor valor y a la derecha las de menor valor. Se suman los valores de las letras. Por ejemplo: XXIII es 10+10+1+1+1=23, LXVI es 50+10+5+1=66

- Hay las siguientes excepciones a la regla anterior: IV=4, IX=9, XL=40, XC=90, CD=400, CM=900 y sus combinaciones. Es decir, si una letra de menor valor aparece antes que una de mayor valor se restan. No son válidas todas las combinaciones: 99 no se escribe IC sino XCIX.

- Con los símbolos citados se puede llegar a 3999. Para conseguir números mayores se coloca una raya encima de una letra o de una combinación de letras y eso significa multiplicar por 1000. Asi $\overline{\text{V}}$=5000.

**Ejercicio 3.5.1** *Escribe en decimal los números romanos: MMCLXXXVII, DCCXCIV, CXCCXC, CDXCIX.*

**Ejercicio 3.5.2** *Escribe en el sistema romano los números 325, 1252, 3999, 954321, 123456, 1000000, tu número de teléfono, tu número del DNI.*

**Ejercicio 3.5.3** *En el Ayuntamiento de Cartagena aparece una inscripción con el año de la construcción del edificio, ¿cuál es este año?. También en la calle Mayor hay unas placas para informar sobre el siglo en que se construyeron ciertos edificios, ¿cuáles son estos edificios y en que siglo se construyeron?.*

## 3.6 Sistema decimal.

Es el sistema que usamos en la vida diaria. Utiliza diez dígitos:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

y con ellos podemos expresar cualquier número por grande que sea. Es posicional pues influye el orden en el que están colocados los números, no es lo mismo 23 que 32.

Si contamos hasta 24 con los dedos usamos los 10 dedos una vez, luego los 10 dedos otra vez y por último usamos 4 dedos. Esta es una de las reglas del sistema posicional: algo se repite cuando llegamos a diez. Como hemos contado el 10 dos veces tenemos dos decenas y lo expresamos escribiendo el 4 en las unidades y a su izquierda un 2 de las decenas.

$$24 = 2 \cdot 10 + 4$$

El número 132 quiere decir 1 centena, 3 decenas y 2 unidades, pudiéndolo escribir

$$132 = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2$$

Esta forma de escribir el número se llama expresión polinómica. [9]

## 3.7 Reglas de divisibilidad.

Sin necesidad de hacer la división podemos saber si un número es divisible por $2, 3, 4, 5, \ldots$.

- Regla del 2: un número es divisible por 2 si lo es la cifra de las unidades.
- Regla del 3: un número es divisible por 3 si lo es la suma de las cifras.
- Regla del 4: un número es divisible por 4 si lo es la suma de la cifra de sus unidades con el duplo de las decenas.
- Regla del 5: un número es divisible por 5 si lo es la cifra de las unidades.
- Regla del 8: un número es divisible por 8 si lo es la suma de la cifra de las unidades con el duplo de las decenas y el cuadruplo de las centenas
- Regla del 9: un número es divisible por 9 si lo es la suma de las cifras.

- Regla del 11: un número es divisible por 11 si lo es la diferencia entre las sumas de las cifras que ocupan la posición par y las de posición impar.

- Regla del 7: es un poco más complicada que las anteriores. El número $\dots a_7 a_6 a_5 a_5 a_3 a_2 a_1$ es divisible por 7 si lo es la expresión

$$(a_1 + 3a_2 + 2a_3) - (a_4 + 3a_5 + 2a_6) + (a_7 + 3a_8 + 2a_9) + \dots$$

**Ejercicio 3.7.1** *Demostrar las reglas del 2,3,5,9.*

**Ejercicio 3.7.2** *Comprueba, sin dividir, que 1.107.421 es divisible por 7.*

**Ejercicio 3.7.3** *Elige un número de tres cifras abc y escríbelo dos veces seguidas abcabc. Divídelo entre 7 y resultará exacto, divide el resultado entre 11 y resultará exacto, divide de nuevo el resultado entre 13 y resultará también exacto. Esto ocurre para cualquier elección de abc, ¿podrías explicar por qué?.*

**Ejercicio 3.7.4** *Halla un número de tres cifras divisible por 11, tal que su suma sea 10 y la diferencia entre dicho número y el que resulta invirtiendo el orden de sus cifras sea 297.*

**Ejercicio 3.7.5** *Hemos multiplicado todos los números primos conocidos hasta hoy (el último es* $2^{6972593} - 1$ *que tiene* 2.098.960 *cifras) pero hemos perdido las dos últimas cifras. ¿Cuáles son si la penúltima es un 9 ó un 6?*

## 3.8 Sistema binario.

El sistema binario es usado por los ordenadores para procesar la información. No sólo los cálculos, sino cualquier texto que escribimos es automáticamente traducido a lenguaje binario. Bastan dos dígitos 0 y 1 para expresar todos los números, las expresiones se hacen larguísimas pero eso no es problema para el ordenador.

Si en el sistema decimal se usaban las potencias de 10, en el sistema binario se usan las potencias de 2. Por ejemplo:
10 en binario quiere decir: $1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$
101 en binario quiere decir: $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5$

¿Cómo expresar 9 en binario? Sólo se pueden usar las potencias de 2 y cada potencia sólo la puedo usar una vez. La mayor potencia de 2 inferior a 9 es $8 = 2^3$ y como de 8 a 9 va 1 no podemos usar el 4 y el 2, hay que usar $2^0 = 1$.

$$9_{10} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1001_2$$