

Es un hecho indudable que vivimos en una sociedad que nos requiere, cada vez más, interactuar con una serie de códigos numéricos. En este trabajo se pretende analizar las características de algunos de estos códigos -DNI-NIE, códigos de barras, códigos ISBN, códigos ISSN, códigos de tarjetas de crédito, de cuentas bancarias, de cheques bancarios- haciendo especial hincapié en los algoritmos que permiten calcular su carácter de control a partir de los demás elementos del código y en la forma que tienen estos códigos de hacer frente a los errores más frecuentes en la transmisión de los mismos. Además se estudian sus posibilidades didácticas y se ofrece una aplicación informática al aula de Secundaria a través de una WebQuest, creada por el autor, sobre el tema.

It is unquestionable that we all live in a society which increasingly requires us to cope with a whole range of numerical codes. This essay aims to analyze the main features of some of these codes, such as, national identity cards, social security cards, credit cards, current accounts, bank documents, etc., paying special attention to two aspects; on the one hand to the algorithms that allow to calculate their control feature starting from the other elements of the code itself. And on the other hand, to the way in which these codes face the most frequent mistakes concerning their transmission. Besides, their didactic possibilities are also dealt with, including a computer application to the curricula for secondary education by means of a webquest entirely created by the author of this essay.

Una sociedad codificada

¿Códigos de barras, ISBN, ISSN, cuentas bancarias, DNI-NIE, tarjetas de crédito, claves para todo...! ¿Quién no ha observado alguna vez con curiosidad los dígitos que acompañan a los códigos de barras y se ha preguntado por su significado? ¿Quién no ha tenido que anotar alguna vez los veinte dígitos de una cuenta bancaria? ¿Quién no se ha interrogado nunca sobre la letra que acompaña al DNI? ¿Hay alguien que no haya observado que las tarjetas de crédito tienen dieciséis dígitos taladrados en ellas?

SUMA.
REVISTA SOBRE LA
ENSEÑANZA Y EL
APRENDIZAJE DE
LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X



Sin duda estamos invadidos por una cantidad creciente de códigos numéricos que regulan nuestras interacciones con la sociedad. Pero... ¿qué hay detrás de estos códigos?

Como ya manifesté en otros trabajos léase (Beato, 2001) y (Beato, 2004)), mi campo de estudio en Didáctica de las Matemáticas lleva varios años dirigido a encontrar temas de interés para los alumnos, que acerquen su realidad cotidiana a las Matemáticas. Estoy convencido de que es el mejor camino para acercar las Matemáticas a su realidad cotidiana. Entiendo que en lugar de ejemplificar los contenidos con aplicaciones matemáticas, es mejor partir de situaciones atractivas de su entorno inmediato, que les motiven para el estudio y profundización posterior en los contenidos de Matemáticas propios de su nivel. Soy consciente de que entrar en el terre-

Jesús Beato Sirvent

IES Bahía de Cádiz.

Cádiz

Facultad de Ciencias de la Universidad de Cádiz.

Campus de Puerto Real.

no de la motivación del alumnado es pisar arenas movedizas, ya que hoy en día, como afirma el filósofo José Antonio Marina en (Marina, 2005), uno de los problemas de la juventud estudiante o de la juventud en general es que ha sustituido voluntad por motivación y eso le proporciona la coartada necesaria y suficiente para sus actos.

Dado que, sin duda, el bloque temático dedicado a la Aritmética es el de mayor peso en la Enseñanza Secundaria, es este bloque el que centra mi atención. Ya presenté en (Beato, 2003) un trabajo sobre relaciones numéricas en algunos conceptos musicales que fue muy bien acogido por los alumnos. Ahora con este trabajo pretendo:

- Analizar varios códigos numéricos. Para ello, estudiaremos el significado de sus dígitos, profundizaremos en sus diferencias y semejanzas. Como aspecto aritmético fundamental, constataremos que todos los códigos analizados tienen en común la existencia de un elemento de control alfanumérico, que depende de los demás dígitos del código.
- Explicar los algoritmos que permiten calcular el elemento de control de cada código a partir del resto de dígitos.
- Analizar cómo la existencia del elemento de control de cada código permite detectar ciertos errores cometidos en la transferencia de información. En este sentido estudiaremos los dos errores más frecuentes: un error en un sólo dígito y el intercambio de dos dígitos consecutivos.
- Presentar una WebQuest de elaboración propia sobre el tema, como forma de desarrollar estos contenidos en el aula de Secundaria.
- Hacer reflexionar tanto a alumnos como a profesores sobre un campo de trabajo matemático no docente: la codificación comercial.

Algunos ejemplos de códigos numéricos: algoritmos de cálculo del elemento de control

Cheques bancarios

El código numérico de un cheque bancario, se expresa N-c, siendo N un número natural cualquiera y $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Al dígito c se le denomina dígito de control.

Algoritmo para el cálculo del dígito de control

Para calcular el dígito de control c a partir de N basta con realizar la división entera $N \div 7$. Entonces c no es más que el resto de esta división. A este tipo de algoritmos se les denomina modular, en este caso de módulo 7, pues simplemente se trata

de expresar el número N módulo 7. El dígito de control es, pues, el elemento de Z_7 equivalente a N según la relación de congruencia.

Ejemplo: En el código 2481057-c, se tiene $2481057 = 7 \times 354436 + 5 \Rightarrow c = 5$. Luego el código completo es 2481057-5.

DNI-NIF

Es sin duda el código alfanumérico más conocido y usado. En este caso, el elemento de control es un carácter alfabético. La estructura es N-c, con N un número natural cualquiera y $c \in \{0, 1, 2, \dots, 22\}$.

Algoritmo para el cálculo de la letra de control

En este caso se trata de un algoritmo modular, con módulo 23, pues son 23 la letras del alfabeto usadas para hacer la identificación con el resto, una vez eliminadas aquellas que podrían presentar algún equívoco con un dígito (como por ejemplo I, O), las que no existen en el alfabeto internacional (como Ñ) o aquellas que ocupan más de una posición (como Ll o Ch). Se trata pues de hallar el resto de la división de N entre 23 y asignar al resto una letra, según la tabla:

Resto	0	1	2	3	4	5
Letra	T	R	W	A	G	M
Resto	6	7	8	9	10	11
Letra	Y	F	P	D	X	B
Resto	12	13	14	15	16	17
Letra	N	J	Z	S	Q	V
Resto	18	19	20	21	22	
Letra	H	L	C	K	E	

En (Yagüez, 1990) puede verse una primera introducción al tratamiento didáctico de este tipo de códigos.

Códigos de barras

El código de barras más usado en la actualidad es el EAN-13, ya que contiene 13 dígitos. (EAN=European Article Numbering). Este código se expresa:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} c$$

siendo $a_i, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \forall i = 1, 2, \dots, 12$



El significado de los dígitos es:

$a_1 a_2$ indican el país donde el productor ha solicitado este código. En España, este prefijo es 84. Este prefijo no indica, pues, la procedencia del producto ni el país de producción, ni el de la elaboración. Tan sólo indica el país donde el productor ha decidido solicitar el código.

$a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$ representan el código asignado a la empresa. $a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}$ representan el código asignado al producto. En España, el organismo encargado de asignar estos códigos es la AECOC (Agencia Española de Codificación Comercial).

c es el dígito de control.

Dado lo extendido del uso del código de barras, merece la pena hacer algunas anotaciones de carácter histórico:

- En 1948, el propietario de una tienda de comestibles acude a la Facultad de Tecnología de Drexel (Filadelfia) en busca de una solución automática que le ayudase a gestionar su almacén. Allí entra en contacto con Joseph Woodland y Bernard Silver, por aquel entonces estudiantes.

- El 7 de Octubre de 1952, Woodland y Silver patentan el primer código de barras.

- Mientras, en Europa, unos doce países y diversos organismos de numeración trabajan durante tres años aproximadamente para alumbrar el sistema de codificación europeo, hasta crear en 1997 EAN Internacional.

- En 1977 se funda en España la AECOC.

- El 3 de Octubre de 1977, en un supermercado de la cadena Mercadona en Valencia se pasaba por un escáner el primer producto identificado con un código de barras. Como curiosidad, se trataba de un estropajo de la marca 3M.

- El uso de los códigos de barras se estima que ha ahorrado a cada español unas 24 horas anuales de espera en cola de los supermercados.

Algoritmo para el cálculo del dígito de control

El algoritmo de cálculo del dígito de control c a partir de los doce dígitos anteriores es:

- Sea:

$$S = \sum_{k=1}^{k=6} a_{2k-1} + 3 \sum_{k=1}^{k=6} a_{2k}$$

- Llamemos R al resto de dividir S entre 10.

- Entonces:

$$c = \begin{cases} 0 & \text{si } R = 0 \\ 10 - R & \text{si } R \neq 0 \end{cases}$$

Llamaremos a estos coeficientes $\{1,3\}$ que multiplican a las cifras que ocupan un lugar impar o par respectivamente, pesos del algoritmo. Denominaremos también divisor al número por el que dividimos la cantidad S . De esta forma, podemos calificar a este algoritmo como un algoritmo de pesos y divisor. Como veremos, es el tipo de algoritmo más extendido para el cálculo del elemento de control de un código numérico. La diferencia entre un código y otro será pues, esencialmente, los pesos y los divisores utilizados. En la práctica, en una versión más didáctica, este tipo de algoritmos se puede desarrollar en forma de tabla, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Calculemos el dígito de control del código de barras de la imagen, cuyas primeras doce cifras son: 8 410090 83931. Se pueden disponer los datos así:

8	4	1	0	0	9	0	8	3	9	3	1	
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	
8	+12	+1	+0	+0	+27	+0	+24	+3	+27	+3	+3	=108
$S=108=10\times 10+8$							$R=8$					
$Dígito\ de\ control: c=10-8=2$												

Luego el código completo -se puede comprobar en la imagen- es: 8 410090 839312

En algunos productos, fundamentalmente motivado por problemas de espacio -es muy frecuente en las cajetillas de tabaco-, se suele usar una versión más breve del código de barras: el código EAN-8, llamado así porque sólo emplea 8 cifras, de las cuales la última es el dígito de control. Se expresa, por tanto:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 - a_5 a_6 a_7 c$$

y el algoritmo para el cálculo del dígito de control es el correspondiente al código EAN-13, truncando los cinco primeros dígitos, y sus pesos correspondientes.



Códigos ISBN

Los libros incluyen en la parte superior de su código de barras, otro código específico. Es el ISBN (*International Standard Book Number*; en español Número Internacional Estándar del Libro). Se trata de un código de diez dígitos, en los que el último actúa como dígito de control, en este caso alfanumérico. Su formato es:

$$a_1 a_2 - a_3 a_4 a_5 a_6 - a_7 a_8 a_9 - c$$

con $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $\forall i=1, 2, \dots, 9$; $c \in \{0, 1, 2, \dots, 9, X\}$



Algoritmo para el cálculo del dígito de control

Se trata de un algoritmo de pesos y divisores, que utiliza la secuencia decreciente de pesos $\{10, 9, \dots, 2\}$ y el 11 como divisor.

Sea

$$S = \sum_{k=1}^{k=9} (11-k)a_k$$

Llamemos R al resto de dividir S entre 11.

Entonces:

$$c = \begin{cases} 0 & \text{si } R = 0 \\ X & \text{si } R = 1 \\ 11-R & \text{si } R \neq 0,1 \end{cases}$$

A diferencia con el código de barras usual, ahora la división se realiza entre 11. Esto ofrece ciertas garantías de unicidad, en un sentido que más tarde precisaremos, debido al carácter primo de 11, pero hace aparecer 11 restos posibles y con ello, la necesidad de incorporar una letra -X- para que la longitud del dígito de control no sobrepase a la unidad.

Este código de barras especial que presentan los libros, es en realidad un doble código numérico, ya que, a poco que observemos, notaremos que el código ISBN superior -salvo su dígito de control- aparece incrustado el código de barras usual inferior. Por tanto, deben verificarse simultáneamente los dos algoritmos de cálculo del dígito de control, para el código superior y para el inferior. Esto hace que en el caso de los libros, el significado de los dígitos del código de barras EAN-13 inferior sea diferente al usual. Su estructura para los libros es:

$$a_1 - a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 - a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} - c$$

con:

$a_1 - a_2 a_3 = 978$ fijo para España.

$a_4 a_5 a_6 a_7 - a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}$ es el código ISBN, sin su dígito de control.

c es el dígito de control, calculado con el algoritmo EAN-13.

Códigos ISSN

En las producciones seriadas, fundamentalmente revistas, aparece un doble código numérico como en los libros. En este caso, se trata del código ISSN (*International Standard Serial Number*; en español Número Internacional de Publicaciones Seriadas). Es un código de ocho dígitos en el que también el último actúa como dígito de control, también en este caso alfanumérico. Su estructura es:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 - a_5 a_6 a_7 c$$

con $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $\forall i=1, 2, \dots, 7$; $c \in \{0, 1, 2, \dots, 9, X\}$

**SUMA.
REVISTA SOBRE LA
ENSEÑANZA Y EL
APRENDIZAJE DE
LAS MATEMÁTICAS.**



Algoritmo para el cálculo del dígito de control

Se trata del algoritmo de pesos y divisores correspondiente al ISBN, truncado en sus dos primeros pesos. Los pesos son, por tanto, la secuencia decreciente $\{8,7,\dots,2\}$ y el divisor 11. En definitiva:

Sea

$$S = \sum_{k=1}^{k=7} (9-k)a_k$$

Llamemos R al resto de dividir S entre 11.

Entonces:

$$c = \begin{cases} 0 & \text{si } R = 0 \\ X & \text{si } R = 1 \\ 11-R & \text{si } R \neq 0,1 \end{cases}$$

Al igual que en el caso de los libros, las revistas también poseen un doble código numérico. En este caso, el código inferior que aparece en su código de barras tiene un significado diferente al usual, pues incrusta, de manera análoga al ISBN, en su interior al código ISSN. La estructura de este código inferior es, pues, para las revistas:

$$a_1-a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7-a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}-c$$

con:

$a_1-a_2 a_3=977$ fijo para España.

$a_4 a_5 a_6 a_7-a_8 a_9 a_{10}$ es el código ISSN, sin su dígito de control.

$a_{11} a_{12}$ es un código para el precio (00 para las revistas que, como en el caso de SUMA, no se comercializan, sólo se distribuyen).

c es el dígito de control, calculado con el algoritmo EAN-13.

Además de este doble código numérico, las producciones seriadas suelen presentar, a la derecha del doble código de barras que hemos descrito anteriormente, un código de barras de tamaño inferior que hace referencia el número de serie de la publicación.

Códigos de las tarjetas de crédito (CODABAR)

Las tarjetas de crédito contienen un código numérico, llamado CODABAR. Se trata de un código de 16 dígitos, distribuidos en cuatro grupos de cuatro, cuyo último dígito actúa también como dígito de control. Su estructura es:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 -a_5 a_6 a_7 a_8 -a_9 a_{10} a_{11} a_{12} -a_{13} a_{14} a_{15} c$$

con $a_i, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $\forall i=1, 2, \dots, 15$

Algoritmo para el cálculo del dígito de control

Esencialmente, se trata de un algoritmo de pesos y divisores, que utiliza como pesos la secuencia alternada $\{2,1\}$ para las cifras que ocupan un lugar impar o par respectivamente, y como divisor el 10. Sin embargo, para garantizar un mejor comportamiento antes los errores más frecuentes en la transmisión de datos, cuestión ésta que analizaremos más tarde, este código incorpora un suplemento antes de hallar la suma S. En definitiva, el algoritmo es:

Sea:

$$S = 2 \sum_{k=1}^{k=8} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{k=7} a_{2k} + (\text{n}^\circ \text{ de dígitos } > 4 \text{ en posición impar}).$$

R= resto de dividir S entre 10.

Entonces:

$$c = \begin{cases} 0 & \text{si } R = 0 \\ 10-R & \text{si } R \neq 0 \end{cases}$$

Estudiemos la disposición en forma de tabla del desarrollo de este algoritmo en el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Calculemos el dígito de control del código numérico de una tarjeta de crédito cuyas primeras quince cifras son: 5020 2400 0082 348. Se pueden disponer los dígitos así (en negrita y subrayadas, las cifras mayores que 4 que ocupan una posición impar):

<u>5</u>	0	2	0	2	4	0	0	0	0	<u>8</u>	2	3	4	<u>8</u>	
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	
10	+0	+4	+0	+4	+4	+0	+0	+0	+0	+16	+2	+6	+4	+16	=66
3 dígitos >4 en posición impar							S=66+3=69=10×6+9					R=9			
Dígito de control: c=10-9=1															

Luego el código completo de la tarjeta de crédito es: 5020 2400 0082 3481

Códigos de cuentas bancarias

Es un código de veinte dígitos con la peculiaridad de tener dos dígitos de control. Su estructura es:

$a_3 a_4 a_5 a_6 - a_7 a_8 a_9 a_{10} - a_0 b_0 - b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 b_{10}$

con: $a_i, b_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \forall i=0, 1, 2, \dots, 10$

El significado de estos dígitos es relevante:

$a_3 a_4 a_5 a_6$ representa el código de la entidad bancaria.

$a_7 a_8 a_9 a_{10}$ representa el código asignado a la sucursal donde se gestiona la cuenta.

$a_0 b_0$ son dos dígitos de control. Como veremos al desarrollar el algoritmo de cálculo, el primero $-a_0-$ controla la primera parte del código, dedicada a la entidad y a la sucursal, mientras que el segundo $-b_0-$ controla la segunda parte del código, la dedicada a la cuenta.

$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 b_{10}$ es el código de la cuenta bancaria en cuestión.

Algoritmo para el cálculo de los dígitos de control

Se trata de un algoritmo doble porque calcula dos dígitos de control. Son dos algoritmos de pesos y divisores. En realidad los dos algoritmos son el mismo, a diferencia de que los pesos para el primer algoritmo son el resultado de truncar la cadena de pesos del segundo sus dos primeros elementos. En ambos casos el divisor es 11. En definitiva:

$$S_a = 4a_3 + 8a_4 + 5a_5 + 10a_6 + 9a_7 + 7a_8 + 3a_9 + 6a_{10}$$

$R_a =$ resto de dividir S_a entre 11.

Entonces:

$$a_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } R_a = 0 \\ 1 & \text{si } R_a = 1 \\ 11 - R_a & \text{si } R_a \neq 0, 1 \end{cases}$$

Análogamente:

$$S_b = b_1 + 2b_2 + 4b_3 + 8b_4 + 5b_5 + 10b_6 + 9b_7 + 7b_8 + 3b_9 + 6b_{10}$$

$R_b =$ resto de dividir S_b entre 11.

Entonces:

$$b_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } R_b = 0 \\ 1 & \text{si } R_b = 1 \\ 11 - R_b & \text{si } R_b \neq 0, 1 \end{cases}$$

Es necesario observar que en el cálculo de los dígitos de control se produce una ambigüedad. Tanto si R_a y R_b son 1 como si son 10, se utiliza como dígito de control el 1. Esto viene motivado por el hecho que ya pusimos de manifiesto al calcular el elemento del control de los códigos ISBN e ISSN, que al usar también como divisor el 11 producían 11 restos posibles. Por tanto no es suficiente con los diez dígitos de nuestro sistema decimal. En el caso de aquellos códigos se resolvía asignando la letra X en caso de resto 1. En este caso, al no poder utilizar caracteres alfabéticos se opta por admitir la duplicidad del dígito.

Comportamiento de los códigos numéricos frente a los errores más frecuentes en la transferencia de datos.

Los dos errores más frecuentes al transmitir códigos numéricos o al introducir códigos numéricos en un ordenador son:

Errores tipo I: Errores en un sólo dígito. Estudiar este tipo de errores es equivalente a plantearse la siguiente pregunta: ¿Pueden existir dos códigos que tengan todas las cifras (previas al elemento de control) iguales, salvo una de ellas y compartan el mismo dígito de control?

Errores tipo II: Errores de intercambio de dos dígitos consecutivos. Se trata ahora de estudiar la respuesta a la cuestión: ¿Pueden existir dos códigos que tengan todas las cifras (previas al elemento de control de control) iguales, salvo dos de ellas que están intercambiadas y compartan el mismo dígito de control?

No se pretende en este artículo hacer un análisis exhaustivo de los comportamientos ante estos dos tipos de errores de

todos los códigos descritos en el mismo. Al respecto, hay un estudio interesante en (Escudero, 1990). Aunque centrado en el algoritmo de obtención de la letra de control en el NIF, presentan unas tablas y gráficos comparativos muy ilustrativos de cómo soporta este algoritmo los distintos tipos de errores. Además introducen de manera somera algunos otros ejemplos de códigos.

Vamos analizar aquí, a modo de ejemplo, el comportamiento de un código modular -el de los cheques bancarios- y de un código de pesos y divisores -el de las tarjetas de crédito- para poder comparar.

Gestión de errores en el código de los cheques bancarios

Errores tipo I

Sean:

$$N = \sum_{k=1}^{k=r} a_k 10^k \text{ y } N' = \sum_{k=1}^{k=r} b_k 10^k$$

dos números iguales en todos sus dígitos salvo 1, que ocupa el lugar i -ésimo, para algún $i=0, 1, 2, \dots, r$. Entonces, $a_k = b_k, \forall k \neq i$ y $a_i \neq b_i$. En estas condiciones:

$$N - N' = (a_i - b_i) 10^i = (a_i - b_i) 2^{i5}$$

Como 2, 5, 7 son números primos, se tiene:

$$N - N' \text{ es múltiplo de } 7 \Rightarrow (a_i - b_i) \text{ es múltiplo de } 7$$

En definitiva:

$$N \equiv N' \pmod{7} \Rightarrow a_i \equiv b_i \pmod{7}$$

de donde se obtiene que la condición necesaria y suficiente para que N y N' compartan el mismo dígito de control es que a_i y b_i sean congruentes módulo 7. Ahora bien, los únicos pares de dígitos congruentes módulo 7 son: $\{0,7\}$, $\{1,8\}$, $\{2,9\}$, quedando los restantes dígitos $\{3,4,5,6\}$ sin pareja congruente módulo 7.

El código de los cheques bancarios detecta el error tipo I si y sólo si la cifra equivocada es 3,4,5,6. En otro caso, se produce una ambigüedad por duplicación..

Errores tipo II

Sean:

$$N = \sum_{k=1}^{k=r} a_k 10^k \text{ y } N' = \sum_{k=1}^{k=r} b_k 10^k$$

dos números iguales en todos sus dígitos salvo en dos cifras consecutivas, que aparecen intercambiadas entre sí, y ocupan los lugares $i, i+1$ para algún $i=0, 1, 2, \dots, r-1$. Esto es:

$$\begin{cases} a_k = b_k & \text{si } k \neq i \\ a_i = b_{i+1} \\ a_{i+1} = b_i \end{cases}$$

además supongamos, sin que ésto suponga ninguna pérdida de generalidad, que $a_{i+1} > a_i$. Con estas notaciones, se tiene:

$$\begin{aligned} N - N' &= (a_i - b_i) 10^i + (a_{i+1} - b_{i+1}) 10^{i+1} = \\ &= (a_i - a_{i+1}) 10^i + (a_{i+1} - a_i) 10^{i+1} = (a_{i+1} - a_i) 3 \cdot 2^{i5} \end{aligned}$$

Como 3,2,5,7 son números primos, se tiene:

$$N - N' \text{ es múltiplo de } 7 \Rightarrow (a_{i+1} - a_i) \text{ es múltiplo de } 7$$

En definitiva:

$$N \equiv N' \pmod{7} \Rightarrow a_{i+1} \equiv a_i \pmod{7}$$

de donde se obtiene que la condición necesaria y suficiente para que N y N' compartan el mismo dígito de control es que a_{i+1} y a_i sean congruentes módulo 7. En resumen:

El código de los cheques bancarios sólo detecta los errores tipo II si las cifras intercambiadas no son congruentes entre sí módulo 7.

Gestión de errores en el código CODABAR

Errores tipo I

Sean $N = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_{15})$; $a_i \in \{0,1,\dots,9\} \forall i=1, 2, \dots, 15$ y $N' = (a_1, \dots, b_k, \dots, a_{15})$; $a_i, b_k \in \{0, 1, \dots, 9\} \forall i=1, 2, \dots, 15$ los vectores que recogen las primeras quince cifras de dos códigos CODABAR que comparten el mismo dígito de control. Llamemos n, n' al número de dígitos mayores que 4 en posición impar de N y N' respectivamente.

Distinguimos los dos siguientes casos:

- Caso k par: Como en este caso la diferencia está en un dígito que ocupa un lugar par, se tiene $n=n'$. Utilizando las mismas notaciones que en el apartado anterior:

$$\left. \begin{array}{l} S = \tilde{S} + a_k + n \\ S' = \tilde{S} + b_k + n \end{array} \right\} \Rightarrow S - S' = a_k - b_k$$

Ahora bien como ambos códigos comparten el mismo dígito de control, $S-S'$ debe ser un múltiplo de 10. Pero como todos los números que forman N y N' son dígitos, sólo es posible si $a_k - b_k = 0$, es decir, si $a_k = b_k$, luego en este caso el código detectaría todos los errores de una sola cifra.

- Caso k impar: Como en este tipo de códigos juegan un papel especial las cifras que ocupan un lugar impar, nos vemos obligados a distinguir ahora, a su vez, los siguientes subcasos:

◦ Caso $a_k, b_k > 4$ ó $a_k - b_k \leq 4$: En este caso, $n=n'$. Se cumple entonces:

$$\left. \begin{array}{l} S = \tilde{S} + 2a_k + n \\ S' = \tilde{S} + 2b_k + n \end{array} \right\} \Rightarrow S - S' = 2(a_k - b_k)$$

Como ambos códigos tienen el mismo dígito de control, se tiene que $S-S'$ ha de ser un múltiplo de 10. Pero eso sólo es posible si $a_k - b_k = 0$ o si $|a_k - b_k| = 5$. Pero esta última posibilidad no se puede dar ya que la elección de los dígitos a_k, b_k en este caso, hace descartar una diferencia de 5 unidades entre ellos.

◦ Caso ($a_k > 4$ y $b_k \leq 4$) ó ($a_k \leq 4$ y $b_k > 4$): Sin pérdida de generalidad y por fijar ideas, supondremos que se verifica la primera situación. Eso supone que $n'=n-1$. Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} S = \tilde{S} + 2a_k + n \\ S' = \tilde{S} + 2b_k + n - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow S - S' = 2(a_k - b_k) + 1$$

pero en este caso $|S-S'|$ no puede ser múltiplo de 10 porque es un impar, luego detectaría también todos los errores de tipo I posibles.

El código CODABAR detecta todos los errores tipo I

Errores tipo II

Sean $N=(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{15})$ y $N'=(a_1, \dots, a_{k+1}, a_k, \dots, a_{15})$ con $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\} \forall i=1, 2, \dots, 15$. El intercambio es tal si $a_k \neq a_{k+1}$. Evidentemente, ahora no tenemos que distinguir entre casos k par y k impar ya que k y k+1 siempre tienen distinta paridad y la situación entre N y N' sería totalmente simétrica. Por tanto, sin pérdida de generalidad, supondremos k par y por tanto k+1 impar. Tenemos necesidad de distinguir casos según los valores de a_k y a_{k+1} .

- Caso $a_k, a_{k+1} > 4$ ó $a_k - a_{k+1} \leq 4$. Se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} S = \tilde{S} + a_k + 2a_{k+1} + n \\ S' = \tilde{S} + a_{k+1} + 2a_k + n - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow S - S' = (a_{k+1} - a_k)$$

por tanto, $S-S'$ no podrá ser nunca un múltiplo de 10 ya que en cualquier caso

$$0 < |a_{k+1} - a_k| \leq 5 < 10$$

y por tanto, el código siempre detectará el error.

- Caso ($a_k > 4$ y $a_{k+1} \leq 4$) ó ($a_k \leq 4$ y $a_{k+1} > 4$): Sin pérdida de generalidad y por fijar ideas, supondremos que se verifica la primera situación. Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} S = \tilde{S} + a_k + 2a_{k+1} + n \\ S' = \tilde{S} + a_{k+1} + 2a_k + n + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow S - S' = (a_{k+1} - a_k) - 1$$

Por tanto, $S-S'$ es múltiplo de 10 si y sólo si $a_k = 9$ y $a_{k+1} = 0$, que es una posibilidad factible con el rango que estamos considerando en esta opción. En este caso, el código no detectaría el error.

El código CODABAR detecta todos los errores tipo II salvo que las cifras intercambiadas sean 9 y 0

Aplicación al aula: una WebQuest sobre códigos numéricos.

La aplicación al aula de los códigos numéricos es, en principio inmediata, ya que la carga matemática es elemental, fundamentalmente teoría de la divisibilidad. Hay una línea editorial (consúltese (Pérez, 1996)) que incluye en su desarrollo algunas prácticas con el algoritmo de cálculo del dígito de control de un código de barras.

Algunas actividades recomendables podrían ser:

- En un primer nivel de dificultad se pueden proponer ejercicios de verificación del cálculo de elementos de control correspondientes a diversos códigos numéricos. Como ocurre siempre, son más interesantes los más cercanos al alumno, a saber: el DNI, los códigos de barras o el ISBN. Este tipo de ejercicios es muy útil para reflexionar sobre el algoritmo de la división entera, en particular, sobre cómo calcular el resto con una calculadora.

Ejemplo: Halla los dígitos de control de las códigos de barras siguientes:

1. Leche Lauki entera: 8-414700-01101c
2. Leche Lauki semidesnatada: 8-414700-01102c
3. Nestea: 5-449000-02086c

Ejemplo: ¿Es correcto el código de barras 9-788748-290208?

- En un nivel un poco superior son adecuados, porque permiten profundizar en conceptos propios de divisibilidad, los ejercicios que suponen calcular una cifra escondida en un código, conocido el código completo -incluido su elemento de control-.

Ejemplo: Halla el número borrado en los siguientes códigos de barras.

1. Vichy catalán: 8-410?49-001107
2. Zumo Minute Made: 5-449000-033?95

- Por último, se puede profundizar en la creación, invención y manipulación de códigos por parte de los alumnos.

Ejemplo: Un código de identificación tiene tres dígitos *abc* y un dígito de control *d*; se forma por tanto el número *abc-d*. El dígito de control se elige de tal manera que la suma de los dígitos que ocupan los lugares pares, más el doble de la suma de los que ocupan los lugares impares, más el número de dígitos mayores que 4 que están en lugares impares sea múltiplo de 10.

1. Calcula el dígito de control para el número de identificación 834.
2. Se sabe que hay un error en el segundo dígito de 486-4. ¿Puedes corregirlo?

3. Estudia si este código detecta todos los errores de un sólo dígito.

Ejemplo: El ISBN 0-669-03925-4 es el producto de la transposición de dos dígitos adyacentes que no son ni el primero ni el último. Determina el ISBN correcto.

Al margen de esta forma de incorporar el tema al currículo, basada en el trabajo con lápiz, papel y a lo sumo calculadora - nada desdeñable desde mi punto de vista-, propongo otra forma de abordar el tema. Se trata de trabajar con una WebQuest sobre códigos numéricos que he elaborado pensando en alumnos de Secundaria. Una WebQuest es una unidad didáctica interactiva que mediante una metodología dirigida de trabajo escolar con Internet, y basándose en un protocolo definido -introducción, tarea, proceso, recursos, evaluación, conclusión y guía didáctica- pretende conjugar el aprendizaje de nuevas tecnologías en contextos de uso real, con una forma de búsqueda eficiente de información curricular en la red. De esta forma, se minimizan los posibles defectos que podría tener una búsqueda libre en Internet sobre un tema prefijado:

- Exceso de información.
- Errores conceptuales, posibles manipulaciones intencionadas de los contenidos.
- Fines espurios de muchas páginas.
- Falta de adecuación de la mayoría de las páginas a los niveles de escolarización primaria y secundaria.
- Falta de interactividad.
- Distracción en la búsqueda.

En esencia, hay dos formas de usar una WebQuest en el aula: hacer uso de una WebQuest ya elaborada que se ajuste a nuestras necesidades o fabricar una propia.

Para manejar una WebQuest ya existente, existen en la red bibliotecas sobre WebQuest de Matemáticas. Algunas direcciones interesantes son:

<http://platea.pntic.mec.es/~erodri1/BIBLIOTECA.htm>

<http://roble.cnice.mecd.es/jarran2/enlaces/webquest.htm>

http://www.estadisticaparatodos.es/webquest/w_matematicas.html

La dirección donde está alojada la WebQuest que he construido sobre el tema que nos ocupa es:

www.iesbahiacadiz.net/departamentos/matematicas/jesus-beato



Si se opta por fabricar una WebQuest, fundamentalmente, el trabajo del profesor incluye dos tareas:

- Por un lado, realizar él la búsqueda previa de información en la red, seleccionando las páginas que el alumno tendrá que visitar de manera obligatoria. Esta selección ha de estar basada en criterios que midan tanto la calidad de la información contenida en la página, como la adecuación al nivel del alumno y al tema a tratar, así como la estabilidad de la página (algunas veces ocurre que varios links se han perdido cuando el alumno va a realizar la actividad pues la página con la que enlazaban ya no existe).
- Una vez realizada la tarea anterior, el profesor debe confeccionar la página web que constituye el material con el que el alumno debe trabajar. Esto no debe ser un obstáculo para ningún profesor, pensando en tener que aprender a manejar programas de edición de páginas web. Con un procesador de textos como Word se puede realizar la página (así está hecha la que presento), teniendo la precaución de guardar el archivo como Página web.

Ya sólo queda el último paso: subirla a Internet. Tampoco hay que asustarse. Siempre está la opción de pedir ayuda al webmaster de la página web del instituto (que es lo que hago yo) para que la aloje en ella.

Como ya comenté anteriormente, una WebQuest tiene una estructura definida. A continuación explicitaré el contenido de cada una de las partes que la forman

Introducción

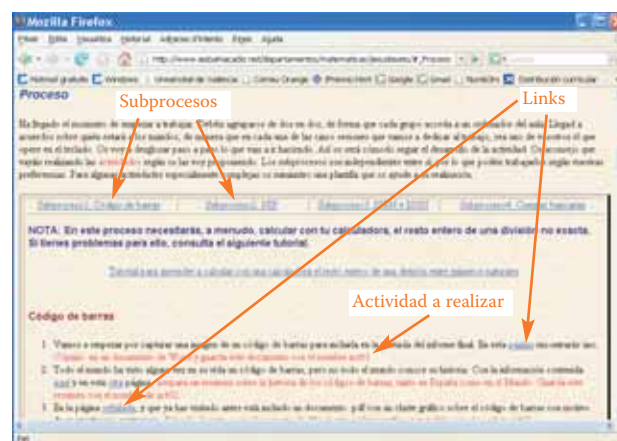
En este apartado se motiva, en pocas líneas, a la realización de las actividades que después se propondrán.

Tarea

Se pretende que quede muy claro en este apartado en qué va a consistir el trabajo que se les va a pedir. El esquema más simple de trabajo consiste en realizar una serie de visitas a ciertas páginas, realizar actividades relacionadas con la información contenida en las páginas visitadas y elaborar un informe final. Además, se debe especificar en este apartado que vías y que formato de entrega al profesor va a tener el trabajo (en papel, en disco, por e-mail...)

Proceso

Es la parte donde se especifican, a través de links las páginas a visitar y lo que tienen que ir haciendo en cada visita. Como se trata de una actividad muy dirigida, la forma de interactuar con el alumno debe ser muy directa, concisa, sencilla y clara. Se puede a su vez dividir en subprocesos si el tema lo requiere. Se pueden, asimismo, incluir en este apartado tutoriales para realizar algunas de las misiones encomendadas, tanto propias del tema como informáticas (por ejemplo, en la que propongo para este tema, se incluye un tutorial para aprender a calcular el resto de una división entera con una calculadora, o se puede incluir un tutorial para aprender a comprimir archivos).



Recursos

En este apartado, se proporcionan al alumno algunos sitios donde poder consultar, al margen de las páginas webs visitadas, informaciones concretas. Se pueden dar recursos tanto de otras páginas como bibliográficos.

Evaluación

Como casi siempre ocurre, este apartado es el más interesante (o al menos a mí me lo parece). Para evaluar WebQuest se suelen usar matrices de evaluación como la siguiente, acompañada de una tabla de estimación.

	Escasa consolidación 1	Aprendizaje medio 2	Buen aprendizaje 3	Excelencia en el aprendizaje 4	Notación Numérica
Utilización de las TICs (Procesado de textos, escaneado de imágenes, inserción de documentos y captación de imágenes)	No ha utilizado alguna de las tecnologías requeridas. Algún fallo técnico por parte del grupo impide que el informe llegue completo al profesor	Usa todas las tecnologías requeridas. El informe llega al profesor por correo electrónico. El aspecto del informe final no es agradable: faltan las sangrías oportunas, los centrados, la diferenciación entre títulos y subtítulos, las partes del mismo no se distinguen, los tipos de letra elegidos y sus tamaños no son atractivos, las tablas no están bien confeccionadas	Usa todas las tecnologías requeridas. El informe llega al profesor por correo electrónico. El aspecto del informe final es correcto. Se puede leer.	Usa todas las tecnologías requeridas. El informe llega al profesor por correo electrónico. El aspecto del informe final es correcto. Se puede leer. El informe final es técnicamente de gran calidad: El tipo de letra y su tamaño es coherente con la partición del documento. Los gráficos son de calidad y están insertados en su correspondiente lugar, las tablas son atractivas.	
Cálculos aritméticos	No ha incluido en el trabajo los cálculos aritméticos.	Ha incluido los cálculos aritméticos. Ha necesitado aclaraciones del profesor para comprender las explicaciones de los algoritmos que se exponían en las páginas correspondientes. Ha tenido algunos errores aritméticos	Ha incluido los cálculos aritméticos. Se ha mostrado independiente en la comprensión de los algoritmos de cálculo correspondientes a cada subproceso. Ha tenido algunos errores aritméticos	Ha incluido los cálculos aritméticos. Se ha mostrado independiente en la comprensión de los algoritmos de cálculo correspondientes a cada subproceso. No ha tenido errores aritméticos.	
Informe final	No ha comprendido bien las informaciones suministradas en las páginas visitadas. El informe es inconexo entre secciones.	Ha comprendido las informaciones suministradas por las páginas. El informe es inconexo entre secciones. Los resúmenes no son correctos: contienen datos superfluos e irrelevantes, son demasiado extenso	Ha comprendido las informaciones suministradas por las páginas. El informe mantiene una adecuada conexión entre secciones. Los resúmenes son correctos: breves y con los datos fundamentales. Los esquemas y las tablas no están bien planteados, ni se han usado con la asiduidad requerida	Ha comprendido las informaciones suministradas por las páginas. El informe mantiene una adecuada conexión entre secciones. Los resúmenes son correctos: breves y con los datos fundamentales. Los esquemas y las tablas están bien planteados y se han usado en cantidad adecuada.	
Expresión oral	No realiza una verdadera exposición oral, sino necesita constantemente leer las conclusiones	Realiza una expresión oral, sin necesidad de leer todo lo que expresa, aunque manteniendo un guión de lo que va a decir. La expresión es poco fluida, muy automática. Pareciera que lo ha aprendido todo de memoria.	Realiza una expresión oral, sin necesidad de leer todo lo que expresa, aunque manteniendo un guión de lo que va a decir. La expresión poco fluida. No hay capacidad de debate y argumentación.	Realiza una expresión oral, sin necesidad de leer todo lo que expresa, aunque manteniendo un guión de lo que va a decir. La expresión poco fluida. En el debate se expresa claramente sus argumentos y muestra flexibilidad y rigor.	

Escala de estimación:

	Escasa consolidación	Aprendizaje medio	Buen aprendizaje	Excelencia en el aprendizaje
PUNTUACIÓN	4-7	8-11	12-15	16

Conclusiones

Se plantean al alumno algunas cuestiones que le puedan ayudar a elaborar el informe final pedido o a debatir en clase sobre el uso de la herramienta. En resumen, a que reflexione sobre el trabajo realizado.

Guía didáctica

En el último apartado de la WebQuest aparece una pequeña guía didáctica que incluye:

- Autor
- Correo electrónico
- Nivel académico y curso al que va dirigida
- Materia en la que se puede encuadrar
- Duración prevista (en sesiones de 1 hora)
- Observaciones
- Fecha

Mi experiencia con el trabajo en esta WebQuest es claramente satisfactoria y ha tenido entre los alumnos una gran acogida. Los resultados han sido excelentes y los trabajos finales, fruto de su trabajo con la página, han merecido una alta calificación por mi parte. Creo que en el momento educativo en que nos encontramos, cada vez más tendente a que los centros utilicen las tecnologías de la información y la comunicación en todas sus aulas, estas herramientas WebQuest van a jugar, o están jugando ya un papel fundamental.

Sólo me queda animar a todos al uso de esta herramienta. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BEATO SIRVENT, JESÚS (2003) "Sonidos, fracciones, medias, potencias y funciones exponenciales". Revista SUMA, de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, nº 44, 39-44.
- BEATO SIRVENT, JESÚS (2001) "¿Está justificada la Enseñanza de los algoritmos de cálculo?". Revista Sema. Boletín de la Sociedad Española de Matemática aplicada, nº 18, 115-138.
- ESCUADERO BAYLIN, MÓNICA ET AL (1990) "Algunas consideraciones sobre la letra de control del NIF". Revista Epsilon, de la SAEM Thales, nº 18, 31-42.
- MARINA, JOSÉ ANTONIO (2005) "Aprender a vivir". 4ª edición. Barcelona. Ariel.
- MATERIALES DEL CURSO: WEBQUEST (2005-2006) Organizado por el Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa.
- PÉREZ, RAFAEL (Coordinador) (1996) "Construir las Matemáticas (1º ESO)". 1ª edición. Granada. Proyecto Sur.
- PRINTSOFT PRODUCTS PTY LTD (ED) (1995) "Printsoft Barcode Toolkit Software"
- YAGÜEZ CASTILLO, JAIME (1990) "El NIF". Revista Epsilon, de la SAEM Thales, nº 17, 35-38.

Referencias en Internet

- <http://www.belt.es/noticias/2005/marzo/15/tags.htm>.
- <http://www.el-mundo.es/sudinero/99/SD160/SD160-06.html>

- <http://ciberconta.unizar.es/LECCION/INTRODUC/435.HTM>
- <http://www.monografias.com/trabajos11/yantucod/yantucod.shtml>
- http://www.udem.mx/paso/academico/profesorado/m_avalos/fd_codigodebarras.jpg
- <http://empresadigital.bitacorras.com/archivos/2005/07/01/iniciacion-a-los-codigos-de-barras>
- http://www.iese.edu/es/files/5_11041.pdf
- http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ehernan/Talento/EugenioHernandez/Codigos.doc
- <http://www.ondasalud.com/edicion/noticia/0,2458,5276,00.html>
- http://www.proamazonia.gob.pe/bpa/codigo_de_barras.htm
- <http://www.el-mundo.es/sudinero/noticias/act-79-3.html>
- <http://www.bne.es/esp/labiesissninf01.htm>.
- http://es.wikipedia.org/wiki/ISO_2108
- http://descartes.cnice.mecd.es/m_Numeros/NIF2/NIF.htm.
- <http://club.telepolis.com/jagar1/Cnif.htm>.
- <http://www.fiscal-impuestos.com/El-numero-de-identificacion-fiscal—NIF—P126.htm>
- http://www.usolab.com/articulos/septiembre2_03.php
- <http://www.antoniburgos.com/antologia/40sevilla/40jose/40n.html>
- <http://www.abcdatos.com/programas/programa/l497.html>
- <http://www.cajaespana.com/corporativo/empresas/pyme/serviciosonline/informacioniban/index.jsp>
- <http://platea.pntic.mec.es/~jescuder/excel-1.htm>