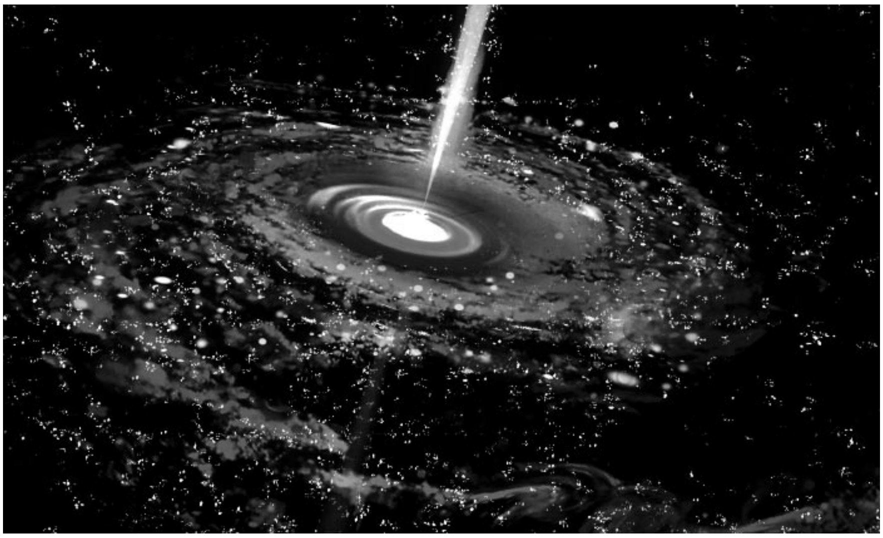
MAGIA Y AGUJEROS NEGROS

PEDRO ALEGRÍA (*)



"Dios no sólo juega a los dados. A veces también echa los dados donde no pueden ser vistos".

Stephen Hawking

INTRODUCCIÓN

El avance en la investigación científica a lo largo de los tiempos ha cambiado notablemente nuestro conocimiento sobre los fenómenos físicos. Incluso objetos físicos reales no han podido ser descubiertos hasta no haber sido deducidas sus propiedades. Tal es el caso de los agujeros negros, relacionados con las observaciones físicas sobre la gravedad de los cuerpos. Hagamos un rápido recorrido por los protagonistas de la historia.

- **Isaac Newton** (1687): comprobó que los objetos caen como resultado de la atracción de una fuerza (la gravedad).
- **John Michell** (1784): sugirió que algunas estrellas podrían ser tan grandes que la luz nunca escaparía de ellas.
- **Albert Einstein** (1915): no vio la gravedad como una fuerza sino como una distorsión del propio espacio.
- **Karl Schwarzschild:** las ecuaciones de la relatividad muestran la existencia de objetos densos en los que otros objetos pueden caer, pero no salir (llamados agujeros negros por **John Wheeler**).

(*) Dpto. Matemáticas, Universidad del País Vasco.

Fuera del campo de la Física, en Matemáticas algunos procesos repetitivos dan lugar a resultados que ya no varían en sucesivas iteraciones. Esto permite presentar dichos procesos como efectos de pseudomentalismo con números. Entran en acción entonces los juegos de magia que se basan en plantear operaciones matemáticas cuyo resultado es el mismo, independientemente del valor inicial. Un ejemplo trivial es el siguiente:

> Pedimos a una persona que escriba un número, lo multiplique por 6, sume 12 al resultado, divida por 3 el número obtenido y reste el doble del número inicial. Podemos asegurar que el resultado final de la operación será cuatro.

Una analogía con la Astronomía permite llamar al resultado final un agujero negro pues, sea cual sea el valor inicial que adoptemos, inexorablemente el resultado final será el mismo.

Es también bien conocido el juego siguiente:

> Una persona escribe cualquier número de tres cifras. Debajo de él escribe el mismo número pero con las cifras invertidas y realiza la resta de ambos números. Nuevamente escribe debajo el resultado obtenido pero con las cifras invertidas y suma los dos últimos números. El resultado final es el número 1.089, salvo algunos casos excepcionales (como aquellos en que el número inicial es capicúa).

No tan conocido es el siguiente:

> Escribe un número de tres cifras y, debajo de él, todas las permutaciones posibles de sus cifras (en total habrá seis números). Calcula la suma de los números. Puedo asegurar que el resultado final es múltiplo de 222. Pero también es múltiplo del número formado por la suma de las cifras del número original.

Algunos juegos de magia pueden presentarse bajo este prisma. Ilustraremos a continuación algunos de ellos. La mayoría de ellos están redactados mediante un conjunto de instrucciones que debe seguir el espectador para lograr el efecto deseado. El mago, por lo tanto, no necesita estar frente al espectador. En algunos casos, incluso, el juego puede hacerse por teléfono.

Para comprender la explicación de algunos de estos juegos será necesario realizar unos cálculos matemáticos elementales pero no siempre sencillos. Animamos al lector a investigar por sí mismo los fundamentos matemáticos de tales juegos.

1. AGUJEROS NEGROS GRÁFICOS

1.1 Los cuadros de Colores

A continuación verás un cuadrado dividido en cuadros de diferentes colores y números diferentes en cada cuadro. Sigue las instrucciones que te indico:

4	8	12	7
15	3	11	14
9	6	13	10
1	16	5	2

- Selecciona cualquier cuadro.
- Desplázate horizontal o verticalmente hasta el número par más próximo.
- Desplázate a izquierda o derecha hasta el número impar más próximo.
- Desplázate arriba o abajo hasta el número par más próximo.
- Desplázate diagonalmente hasta el número impar más próximo.
- Desplázate abajo o a la izquierda hasta el número par más próximo.

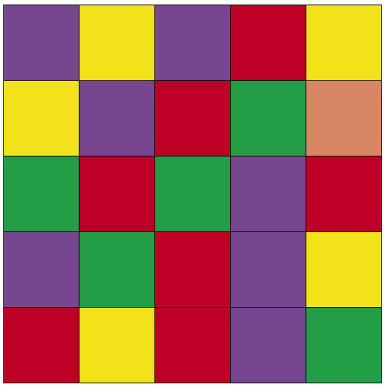
Irremediablemente has caído en un agujero negro (el único cuadro de color negro)

Es fácil entender la explicación: cada movimiento es más restrictivo de modo que, al final, sólo queda una opción y obliga a desplazarse al cuadro negro.

Se propone al lector construir otros cuadrados con disposiciones distintas pero con las mismas características del anterior.

La misma idea, aunque aparentemente el recorrido se haga con mayor libertad, se aplica al juego siguiente.

Observa el tapiz de la figura. Vas a recorrerlo de forma completamente libre pero, para asegurarnos de que disfrutas de todos los colores, obedece las siguientes indicaciones (en cada paso vas a empezar desde el lugar al que has llegado en el paso anterior):

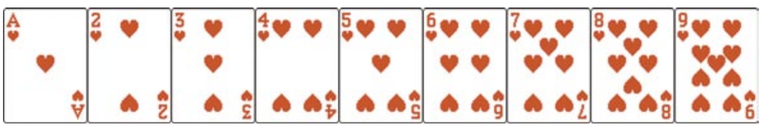


- Colócate en cualquier cuadro amarillo.
- Desplázate a izquierda o derecha hasta cualquier cuadro morado.
- Desplázate hacia arriba o hacia abajo hasta cualquier cuadro verde.
- Desplázate ahora diagonalmente hasta cualquier cuadro rojo.
- Desplázate por último a izquierda o derecha hasta cualquier cuadro amarillo.

¿Te ha parecido que actuabas con libertad? No es así, he estado influyendo en tu mente. *Sé dónde has terminado el recorrido. Se trata del cuadro amarillo de la fila inferior.*

1.2 La fila de nueve

- Coloca en una fila sobre la mesa, de izquierda a derecha, y en orden creciente, las cartas del as al nueve (o nueve tarjetas numeradas).



- Retira una carta de cualquier esquina (tú eliges).
- Vuelve a retirar una carta de la esquina que prefieras (aumenta el número de posibilidades).
- Retira por última vez una carta de cualquier esquina.
- Suma los valores de las tres cartas retiradas.
- Divide el resultado por 6 –¡la división es exacta!– y busca la carta de la mesa que ocupa el lugar indicado por el cociente (contando de izquierda a derecha).

Parece imposible saber cuál es dicha carta. Sin embargo, apostaría a que se trata del cuatro.

Explicación:

Este juego se basa en algunas propiedades de la divisibilidad.

Una propiedad bastante conocida y fácil de demostrar establece que el producto de tres números consecutivos es múltiplo de seis. Basta considerar que, de tres números consecutivos, al menos uno de ellos es par, y uno de ellos es múltiplo de 3. Por lo tanto, el producto de los tres, tiene que ser múltiplo de 6.

Menos conocida, y por ello sorprendente, es la propiedad de que la suma de tres cualesquiera de los números escogidos en las esquinas de la disposición anterior es múltiplo de seis.

Más sorprendente aún es el hecho de que se llegue siempre al cuatro después de hacer la división por seis y contar dicha cantidad de cartas.

Variante:

Una vez entendido el principio, puede modificarse ligeramente utilizando las siguientes cartas (o tarjetas numeradas):

2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13,

Se pide nuevamente que se realicen las mismas operaciones anteriores (esta vez se dividirá por 9 en lugar de dividir por 6). Al final siempre se llega al cinco.

Animamos al lector para que busque otras combinaciones con propiedades similares.

Problema:

Con la explicación anterior, no debe ser difícil resolver el siguiente problema (propuesto por Martin Gardner en sus Juegos Matemáticos):

> Un fabricante de dados embala su producto en grandes cajas cúbicas. Para realizar el control de calidad, se retira del gran paquete cúbico una hilera de dados, los cuales se desechan al final. Los dados restantes se empaquetan en cajas pequeñas, formadas por seis dados en cada envase. ¿Cuántos dados sueltos sobrarán?

1.3. La fila de siete

¿Has oído hablar del juego de las tres cartas? Pues, desde ahora, hablarás del juego de las siete cartas. Perderemos una carta entre otras seis y, después de una serie de movimientos, la volveremos a encontrar.

1. Coloca en una fila sobre la mesa seis cartas caras abajo y una dama cara arriba. La dama puede estar en cualquier posición dentro del grupo de cartas. Una posible disposición es la siguiente (la dama se encuentra en tercer lugar):

2. Intercambia la posición de la dama con cualquiera de las cartas adyacentes tantas veces como el lugar que ocupa (en nuestro ejemplo, lo harás tres veces). En cada movimiento tienes dos posibilidades: cambiarla con la carta de su izquierda o con la de su derecha.
3. Mueve ahora la dama dos veces más (recuerda que cada movimiento consiste en cambiar la posición de la dama con cualquier carta adyacente).
4. Veo que no has colocado la dama en la esquina, así que retira las dos cartas de las esquinas.
5. Mueve ahora la dama tres veces más.
6. Parece mentira, pero la dama ha vuelto a huir de las esquinas. Retira las dos cartas de los extremos.
7. Mueve la dama una vez más.
8. Parece que ahora no está en el extremo izquierdo. Retira la carta de esta esquina.
9. Mueve, para terminar, la dama una vez.

Creo que lo has conseguido. Ahora la dama está en una esquina. Más concretamente, en la esquina derecha.

Explicación:

Ciertas propiedades de paridad hacen que los movimientos indicados conduzcan a la dama a posiciones que pueden controlarse. Para comprobarlo, realiza el juego colocando la dama en distintas posiciones iniciales y observa que las instrucciones conducen a una única posición final.

1.4. El juego de los montones

Para este juego utilizaremos diez cartas cualesquiera. Con ellas en la mano, obedece las siguientes indicaciones.

- Coloca diez cartas en un montón sobre la mesa.
- Divide ese paquete en tantos montones como desees. Cada montón tendrá las cartas que tú quieras.
- Coge una carta de cada uno de los montones y forma con todas ellas un nuevo montón.
- Realiza esta misma operación (coger una carta de cada montón y formar con todas ellas un nuevo montón) un total de doce veces.

¿Se puede saber cuál es la disposición final de las cartas, es decir cuántos montones habrá y cuántas cartas tendrá cada montón?

¿Podrías deducir una situación más general, es decir saber la disposición final en el caso que se utilice una cantidad distinta de cartas?

Solución:

El problema fue propuesto en la sección "Rincón matemágico" de la página de divulgación matemático "Divulgamat" y la respuesta puede encontrarse en

www.divulgamat.net/weborriak/Cultura/matemagia/SolucionConcurso.html

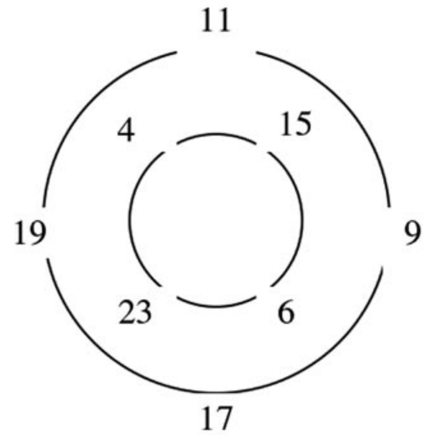
2. AGUJEROS NEGROS NUMÉRICOS

Muchos procesos iterativos realizados con números dan lugar a resultados que se comportan como agujeros negros. A continuación identificaremos algunos casos conocidos.

2.1 Cero cuádruple

1. Dibuja una circunferencia y escribe cuatro números enteros positivos alrededor de ella.

   En la figura adjunta, hemos colocado los números 4, 15, 6 y 23.
2. Dibuja otra circunferencia exterior y escribe las diferencias entre dos números consecutivos (el mayor menos el menor).
3. Repite el proceso con los nuevos números.



¿Puedes imaginar lo que sucederá al cabo de un número mayor de iteraciones?

¿Depende el resultado de los valores iniciales?

¿Cuál es el resultado final si el proceso comienza con una cantidad diferente de números?

Indicación:

Basta observar el comportamiento del valor máximo que toman los cuatro valores obtenidos en cada iteración. La sucesión formada por dichos valores máximos es no creciente.

Solución: (debida a Richard Sabey):

Llamemos a_i, b_i, c_i, d_i a los valores obtenidos en la i-ésima iteración.

Es fácil probar que:

(a) a_i, b_i, c_i, d_i son no negativos.

(b) Si llamamos m_i =máx $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$, entonces $m_i = 0$ si y sólo si

$$a_i = b_i = c_i = d_i = 0.$$

(c) La sucesión $\{m_i\}$ es decreciente (no estrictamente).

(d) Sea h_i = mcd $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$. Entonces $\{h_i\}$ es una sucesión no decreciente de i, mientras mi sea mayor que cero.

Además, $h_{i+4} > hi$, siempre que $m_{i+4} > 0$.

De lo anterior, se puede demostrar que existe algún i tal que

$$a_i = b_i = c_i = d_i = 0.$$

En la siguiente tabla se muestran los menores valores iniciales a_0, b_0, c_0, d_0 que necesitan exactamente n iteraciones para llegar al resultado final $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$:

(a_0, b_0, c_0, d_0)	n	(a_0, b_0, c_0, d_0)	n
(0, 0, 0, 1)	4	(0, 24, 68, 149)	16
(0, 1, 2, 3)	5	(0, 57, 162, 355)	17
(0, 1, 2, 4)	7	(0, 68, 193, 423)	18
(0, 1, 4, 9)	8	(0, 81, 230, 504)	19
(0, 2, 5, 11)	9	(0, 193, 548, 1.201)	20
(0, 2, 6, 13)	10	(0, 230, 653, 1.431)	21
(0, 5, 14, 31)	11	(0, 274, 778, 1.705)	22
(0, 6, 17, 37)	12	(0, 653, 1.854, 4.063)	23
(0, 7, 20, 44)	13	(0, 778, 2.209, 4.841)	24
(0, 17, 48, 105)	14	(0, 927, 2.632, 5.768)	25
(0, 20, 57, 125)	15		

2.2. La atracción del nueve

INSTRUCCIONES	EJEMPLO
• Piensa una fecha cualquiera.	13-oct-1955
• Escríbela como si fuera un número.	13.101.955
• Ordena las cifras de mayor a menor.	95531.110
• Ordena las cifras de menor a mayor.	01.113.559
• Resta estas dos cantidades.	94.417.551
• Suma las cifras del resultado.	36
• Suma de nuevo las cifras obtenidas.	9

El resultado final será siempre nueve.

Para entenderlo es preciso tener en cuenta las siguientes dos propiedades, bien conocidas y que es sencillo comprobar:

1. La resta de dos números cuyas cifras están invertidas siempre es múltiplo de nueve.
2. La suma de las cifras de un múltiplo de nueve es también múltiplo de nueve.

2.3. El ciento veintitrés

INSTRUCCIONES	EJEMPLO
• Escribimos un número arbitrario.	233.5839.304.304
• Contamos el número de cifras pares.	6
• De cifras impares y	7
• El total de cifras.	13
• Formamos un nuevo número con estos valores.	6.713
• Repetimos las operaciones anteriores con el número obtenido.	134
• Sucesivas veces.	123
• Hasta que no haya variación en el resultado.	123

Observamos que no hay forma de escapar a la atracción del número 123.

Un argumento sencillo que prueba el resultado es el siguiente:

En primer lugar, es evidente que, si el número inicial es n > 999, una iteración conduce a un número menor que n. Repitiendo el proceso, obtenemos en un número finito de pasos un número menor que 1.000.

En esta situación es fácil tener en cuenta todos los casos posibles: 3 cifras pares y 0 impares, 2 cifras pares y 1 impar, 1 cifra par y 2 impares, 0 cifras pares y 3 impares. En todos los casos basta una iteración para llegar al número 123.

2.4. El ciento cincuenta y tres

INSTRUCCIONES	EJEMPLO
• Escribimos cualquier número múltiplo de tres.	111.111
• Calculamos la suma de los cubos de sus cifras.	6
• Repetimos el proceso anterior.	216
• Sucesivas veces.	225
• …	141
• …	66
• …	432
• …	99
• …	1.458
• …	702
• …	351
• Hasta que no haya variación en el resultado.	153

Si el número inicial no es múltiplo de tres, el final del proceso presenta algunas peculiaridades: nos podemos encontrar con más de un agujero negro, como por ejemplo los números 153, 370, 371, 407, o llegar a un bucle sin fin, como los siguientes:

136 – 244
919 – 1.459
55 – 250 – 133 – 55
160 – 217 – 352.

Escribimos a continuación el código en MATHEMATICA para obtener el agujero negro correspondiente a cualquier número de cuatro cifras.

```
agujero[fun_,numero_]:=
  Module[{a=numero},While[fun[a]_a,Print[a];
      {a=fun[a]}
      ];
    Print["RESULTADO FINAL = ",f[a]]]
f[x_]:=Floor[x/1000]^3 + (Floor[x/100]-10 Floor[x/1000])^3+(Floor[x/10]-10  (Floor[x/100]-
10 Floor[x/1000])-100(Floor[x/1000]))^3 + (x-1000 Floor[x/1000]-100(Floor[x/100]-10
Floor[x/1000])-10 (Floor[x/10]- 10  (Floor[x/100]-10 Floor[x/1000])-100(Floor[x/1000])))^3
NUMERO="escribir aquí el número"
agujero[f,NUMERO];
```

Un buen ejercicio consiste en establecer algunas reglas generales que permitan conocer de antemano el final del proceso.

En su libro *Apología de un matemático*, G.H. Hardy afirma que no hay nada en los números 153, 370, 371, 407 que atraiga a un matemático debido a la singularidad tanto de sus enunciados como de sus demostraciones, que no son generalizables de forma significativa. Veamos, sin embargo, que no es así y diversas generalizaciones son posibles.

Si intentamos buscar agujeros negros utilizando potencias distintas de tres, vemos fácilmente que no es posible el caso de potencia dos pues ningún número (a excepción de los triviales 0 y 1) coincide con la suma de los cuadrados de sus cifras (el resultado de la iteración termina siempre en el ciclo 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, 145).

El caso general nos lleva a los llamados números narcisistas, definidos por Joseph Madachy (quien fue editor de la revista *Journal of Recreational Mathematics*) en su libro *Mathematics on Vacation*, por analogía con la leyenda de Narciso, quien, según la mitología griega, quedó enamorado de su propia imagen.

Según la definición de Madachy, un número de n cifras es n-narcisista si coincide con la suma de las potencias n-ésimas de sus cifras.

La siguiente tabla muestra los primeros números narcisistas (los correspondientes a n > 5 fueron encontrados por Harry Nelson):

n	Números n-narcisistas
1	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
2	Ninguno
3	153, 370, 371, 407

…/…

…/…

n	Números n-narcisistas
4	1.634, 8.208, 9.474
5	54.748, 92.727, 93.084
6	548.834
7	1.741.725, 4.210.818, 9.800.817, 9.926.315
8	24.678.050, 24.678.051, 88.593.477
9	146.511.208, 472.335.975, 534.494.836, 912.985.153
10	4.679.307.774

En la página

mathworld.wolfram.com/NarcissisticNumber.html

se encuentra una lista con todos los números narcisistas. Hay un total de 88 como probó D. Winter en 1985. El mayor de ellos tiene 39 cifras.

Se puede probar fácilmente que sólo puede haber números n-narcisistas para valores de n no mayores que 60, pues $n \cdot 9^n < 10^{n-1}$ si $n > 60$.

Un buen ejercicio consiste en encontrar los ciclos correspondientes a las distintas potencias. Por ejemplo, para n = 4, obtenemos el ciclo

1.138 – 4.179 – 9.219 – 13.139 – 6.725 – 4.338 - 4.514

También se han buscado números narcisistas en base distinta de 10. Una lista de dichos números en bases 2 a 10 fue obtenida por Lionel Deimel y Michael Jones, en el artículo “Finding Pluperfect Digital Invariants”, publicado en J. Recreational Math. vol. 14:2, 1981-82, p. 87-107 (ver también www.deimel.org/rec_math/DI_3.htm).

Otras variantes relacionadas con estos números las describe ampliamente H. Heinz en la página

www.geocities.com/CapeCanaveral/Launchpad/4057/narciss.htm.

2.5. Seis mil ciento setenta y cuatro

INSTRUCCIONES	EJEMPLO
• Seleccionar un número de cuatro cifras.	**8.082**
• Ordenar sus cifras de mayor a menor.	8.820
• Ordenar sus cifras de menor a mayor.	0.288
• Restar las dos últimas cantidades.	**8.532**
• Repetir el proceso anterior con el nuevo número obtenido.	8.532
	2.358
	6.174
• Las veces necesarias.	7.641
	1.467
• Hasta que el número obtenido se repita.	**6.174**

El agujero negro que se obtiene con este proceso (a lo largo de siete iteraciones como máximo) es el número 6.174, llamado *constante de Kaprekar* debido a su descubrimiento en 1949 por el matemático hindú D. R. Kaprekar (personaje de la foto).

En relación a esta curiosa propiedad pueden plantearse en una clase elemental de matemáticas una gran variedad de problemas:

1. ¿Cuál es el número máximo de iteraciones necesarias para alcanzar un agujero negro siguiendo este proceso?
2. ¿Todos los números de cuatro cifras poseen la propiedad anterior?
3. Encontrar un número que requiera la mayor cantidad de iteraciones antes de alcanzar el 6.174.
4. Tratar de encontrar constantes similares para números con mayor número de cifras.
5. ¿Se puede realizar el mismo proceso anterior con números expresados en bases distintas de diez?

Algunos resultados adicionales han sido obtenidos por Manick Srinivasan y Ramkumar Ramamoorthy. En particular, si se permiten números que empiecen por uno o varios ceros, se sigue llegando a la constante de Kaprekar salvo para los números 1.111, 2.222, 3.333, 4.444, 5.555, 6.666, 7.777, 8.888, 9.999. Ellos han contado también la cantidad de números que necesitan el mismo número de iteraciones.

Escribimos a continuación una tabla con los agujeros negros correspondientes a números con distinta cantidad de cifras:

n	Constante
2	Ninguno
3	495
4	6.174
5	ninguno
6	549.945, 631.764
7	ninguno
8	63.317.664, 97.508.421
9	554.999.445, 864.197.532
10	6.333.176.664, 9.753.086.421, 9.975.084.201

2.6. El ciclo 42-20-4-16-37-58-89-145

INSTRUCCIONES	EJEMPLO
• Selecciona un número de cuatro cifras.	**8.082**
• Suma los cuadrados de sus cifras.	132
• Repite el proceso anterior con el nuevo número obtenido.	14
• Sucesivas veces.	17
• Las veces necesarias.	50
• …	25
• …	29
• …	85
• …	89
• Hasta encontrar alguno del ciclo 42-20-4-16-37-58-89-145.	145

Los únicos posibles resultados finales son el 1 o el ciclo formado por los números 42-20-4-16-37-58-89-145, como probó Steinhaus en 1968.

3. OTROS AGUJEROS NEGROS

Todo lo anterior sugiere definir los agujeros negros como puntos fijos. En matemáticas, un elemento z de un conjunto arbitrario *A* es un punto fijo de una función f : *A* ---> *A* si

1) para cada *x* de *A*, existe un número natural n tal que

$$f\,(f\,(\ldots f\,(f\,(x))\ldots)) = z$$

(la composición de *f* consigo mismo *n* veces en el punto *x* es igual a *z*).

2) $f\,(z) = z$.

Algunos ejemplos característicos son los considerados a continuación.

3.1. El problema 3N + 1

Es conocido como problema de Collatz una conjetura (aún no probada) que consiste en lo siguiente:

Dado un número natural a_0, construimos la sucesión $\{a_n\}$ como

$$a_n = a_{n-1}/2 \qquad \text{si } a_{n-1} \text{ es par}$$

$$a_n = 3\,a_{n-1} + 1 \qquad \text{si } a_{n-1} \text{ es impar.}$$

Se trata de demostrar que existe un valor de n tal que $a_n = 1$.

Sólo ha podido comprobarse la veracidad de la conjetura para números menores que $1{,}2 \times 10^{12}$ pero no se tiene la demostración completa.

Un extenso artículo de Jeffrey Lagarias "The 3x + 1 Problem and its Generalizations" (que puede leerse en

www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/html/paper.html) expone el problema y plantea diversas generalizaciones y conexiones con otros problemas.

Un sorprendente *preprint* de Craig Alan Feinstein titulado "The Collatz 3n+1 Conjecture is Unprovable" puede encontrarse en

arxiv.org/pdf/math.GM/0312309.

3.2. La constante áurea

La famosa constante áurea también puede obtenerse como agujero negro mediante un proceso iterativo que involucra la sucesión de Fibonacci (definida por la relación de recurrencia F(n+1) = F(n) + F(n-1)), pues el cociente entre un término de la sucesión y el anterior tiene como límite la constante

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$$

En este caso, el agujero negro no se obtiene en un número finito de pasos sino como límite de la sucesión. En la práctica se llega a una aproximación aceptable con un número reducido de iteraciones.

Una cuestión interesante es preguntarse si cualquier valor inicial de la sucesión permite llegar al mismo resultado final.

4. PARA SABER MÁS

Michael Ecker, *Mathemagical Black Holes*, en http://members.aol.com/DrMWEcker/mathhole.html

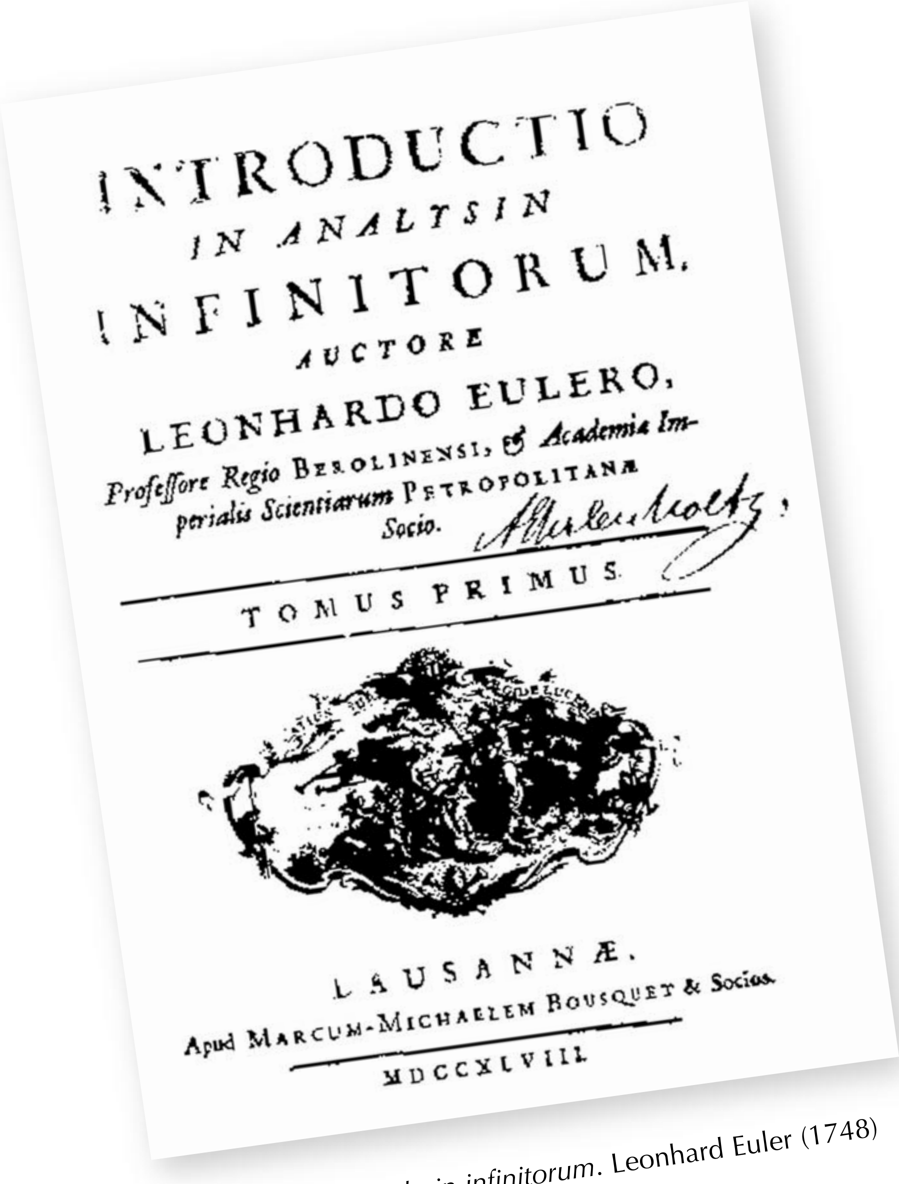
D.R. Kaprekar, D.R.: *An Interesting Property of the Number 6174*, Scripta Mathematica 15. (1955) pp. 244-245.

Jürgen Köller, *The Kaprekar Number*, en http://www.mathematische-basteleien.de/kaprekar.htm

Joseph S. Madachy, 1966: *Mathematics on Vacation*. Thomas Nelson & Sons Ltd.

Yutaka Nishiyama, *Misterious number 6174*, en http://plus.maths.org/issue38/features/nishiyama

Walter Schneider, *Kaprekar process*, en http://www.wschnei.de/digit-related-numbers/kaprekar-process.html



INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ.
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

Introductio in analysin infinitorum. Leonhard Euler (1748)