UNA MATEMÁTICA MOTIVADORA: LA MATEMAGIA

José Muñoz Santonja[1]

Introducción.

Uno de los objetivos fundamentales que se persiguen cuando se realiza alguna actividad de divulgación de las matemáticas, es que el público sea consciente de la gran relación que hay entre esa materia y el mundo que nos rodea. Este objetivo también debería ser prioritario cuando nos referimos a la enseñanza de esta disciplina. Por otro lado, debemos tener como objetivo el hacer que nuestra materia sea atractiva y promueva el interés por investigar en aquellos a los que nos dirigimos.

Los profesores, sobre todo en los niveles no universitarios, nos encontramos hoy en día con una variedad de alumnado a los que tenemos que hacer la asignatura, al menos, interesante. Existen alumnos (aunque algunos compañeros piensen que es solo una leyenda urbana) con gran interés por el estudio, trabajadores y con gran deseo de ampliar sus conocimientos. Estos alumnos aprenden, no sólo gracias a sus profesores sino a veces a pesar de ellos. Existe otro tipo de alumnos en los que sus intereses vitales (en el que caso de que existan, ya que alguna vez hasta se duda de ello) no es que tengan poca relación con el mundo de la enseñanza y el aprendizaje, es que ni siquiera llegan a ser tangentes, más bien exteriores. Con estos alumnos es prácticamente imposible conseguir que muestren interés, quizás si el profesor pudiera dedicarse a ellos y a investigar en sus intereses (pero no vamos a ponernos en hipótesis propias del cine americano). Después existe un gran grupo de alumnos en los que la labor del profesor a la hora de motivarlos e ilusionarlos es fundamental. Dada las dificultades con la que se encuentra el profesorado, pienso que es en ese grupo donde debe volcar sus energías. Para ello, es imprescindible la utilización de recursos que permitan al alumno darse cuenta de que la matemática es importante en la realidad en la que vive, y que puede ser atractiva y entretenida. Uno de esos recursos que puede resultar muy motivante, es presentar resultados matemáticos como si fuesen trucos de magia.

Matemáticas y magia.

El mundo de la magia suele estar lleno de sorpresas e ilusión, mediante engaños suele hacerse posibles cosas imposibles. Pero a veces la sensación que tienen nuestros alumnos en clase de matemáticas es la misma. La misma impresión que queda en el público cuando uno de los grandes magos modernos hace desaparecer un elefante en pleno teatro, es la que queda en

[1] Taller desarrollado en las VI Jornadas de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana, celebradas los días 1, 2 y 3 de Octubre de 2004 en Valencia por la Sociedad Al-Khwarizmi. Este material se incluye en las actas de dichas jornadas.

nuestros alumnos cuando, al enfrentarse a un problema en el que un padre y dos hijos están peleándose porque cuando el hermano mayor tenía la edad del hermano menor, la suma de las tres edades era el portal de la casa donde vivían, y cuando el hermano menor tenga la edad del mayor, el padre ya se habrá jubilado. El alumno, decimos, observa como ante ese galimatías el profesor sin alterarse ni despeinarse (como James Bond) consigue resolver el problema de un tirón, y la sensación que tiene el alumno es que en la resolución de ese problema interviene la magia.

Bromas aparte, es cierto que al investigar la magia como recurso, puede encontrarse que muchos trucos utilizados por los magos tienen fundamento matemático. Hacer juegos matemáticos posee una gran fascinación para mucha gente. Lo interesante para nosotros como profesores es utilizar esos trucos, en primer lugar para atraer la atención de nuestros alumnos. No olvidemos que todo espectáculo de magia envuelve al espectador en un halo de misterio y sorpresa, que le hace estar receptivo ante lo que se encuentra. Por otro lado, podemos aprovechar el estudio matemático de la magia, para que nuestros alumnos ahonden en la asignatura. La ventaja de los trucos de magia matemática es que se fundamentan en aplicaciones muy simples, en general unos cálculos aritméticos, combinatorios y probabilísticos básicos, y unos desarrollos algebraicos al alcance de cualquier iniciado. También se utilizan elementos geométricos o topológicos muy elementales pero de gran atractivo para el espectador.

Por todo ello, si según el diccionario de la lengua de la Real Academia Española, magia es la ciencia o arte que enseña a hacer cosas extraordinarias y admirables, podemos considerar que la matemagia es la ciencia que utiliza las matemáticas, para realizar cosas extraordinarias y asombrosas.

La pretensión de este taller es presentar una serie de trucos mágicos con un fundamento matemático detrás. La puesta en escena es fundamental, es conveniente crear el ambiente mágico adecuado para atraer la atención y motivar al alumno, pero no debemos quedarnos ahí. Debemos posteriormente hacer que el alumno estudie porqué resulta siempre el truco que proponemos, e investigue otras formas de presentar esos mismos trucos. Como veremos en los trucos, aparecerán unas operaciones aritméticas básicas, pero también reglas de divisibilidad, restos de división según distintos módulos, potencias, sistemas de numeración, etc.

Y sin más preámbulos, demos paso al mundo del ilusionismo.

Tarjetas mágicas.

Existe un truco matemático muy conocido, que consiste en adivinar un número pensado por un espectador, a partir de buscar dicho número en una serie de tarjetas. Este truco es corriente encontrarlo de forma interactiva en Internet, y es también común recibirlo como publicidad de alguna casa comercial. Es bastante antiguo y puede encontrarse en los libros del gran divulgador ruso de la matemática, Perelman.

Al espectador se le entregan las siguientes tarjetas:

Tarjeta 1

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

Tarjeta 2

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Tarjeta 3

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

Tarjeta 4

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

Tarjeta 5

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Tarjeta 6

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Se le pide que piense un número del 1 al 63 y que le devuelva al mago todas las tarjetas en las que se encuentre el número que ha pensado. Una vez en su poder, el mago sólo tiene que sumar el primer número que aparece en cada una de las tarjetas (que es el menor entre los que hay) para saber qué número había elegido el espectador.

Por ejemplo, si ha elegido el 46, encuentra ese número en las tarjetas 2, 3, 4 y 6 luego sumando los primeros números obtenemos 2+4+8+32=46.

Lo interesante, desde el punto de vista matemático, es cómo están construidas esas tarjetas. Los números se reparten en ellas atendiendo a su escritura en base binaria.

Para saber cómo repartir los números, basta con que escribamos el número en base 2. Para ello, dividimos el número entre 2, el cociente volvemos a dividirlo entre 2, y así sucesivamente hasta obtener de cociente la unidad. En el caso del 46 sería:

$$\begin{array}{llllll}
46 & \underline{|\,2} & & & & \\
0 & 23 & \underline{|\,2} & & & \\
 & 1 & 11 & \underline{|\,2} & & \\
 & & 1 & 5 & \underline{|\,2} & \\
 & & & 1 & 2 & \underline{|\,2} \\
 & & & & 0 & 1
\end{array}$$

Luego $46_{(10} = 101110_{(2}$ la cifra de la derecha corresponde a la primera tarjeta, la siguiente a la segunda tarjeta y así sucesivamente. Si la cifra correspondiente es un 1, el número que estamos trabajando (el 46 en nuestro caso) debe de aparecer en la tarjeta, si es un cero no hay que incluirlo en esa tarjeta. En el caso del 46 vemos que debe aparecer en las tarjetas 2, 3, 4 y 6.

La forma de encontrar el número que nos piden se reduce (utilizando las tarjetas) a pasar el número de su forma binaria a la decimal. Pues

$101110_{(2} = 1{\cdot}2^5+0{\cdot}2^4+1{\cdot}2^3+1{\cdot}2^2+1{\cdot}2^1+0{\cdot}2^0 = 32+0+8+4+2+0 = 46_{(10}$

La notación binaria nos limita también los números que podemos colocar en las tarjetas. Si utilizamos seis tarjetas el número mayor que podemos situar en ellas es
$111111_{(2} = 1{\cdot}2^5+1{\cdot}2^4+1{\cdot}2^3+1{\cdot}2^2+1{\cdot}2^1+1{\cdot}2^0 = 32+16+8+4+2+1 = 63$

Si tuviésemos siete tarjetas podríamos llegar hasta

$1111111_{(2} = 1{\cdot}2^6+1{\cdot}2^5+1{\cdot}2^4+1{\cdot}2^3+1{\cdot}2^2+1{\cdot}2^1+1{\cdot}2^0 = 64+ 32+16+8+4+2+1 =127$

y en general con n tarjetas:

$111\ldots\ldots 111_{(2} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2^2+ 2^1 + 2^0 \quad = 2^n - 1$
N

Este truco de adivinar un número utilizando tarjetas, puede hacerse con otro tipo de tarjetas. Este año hemos encontrado en Internet una página donde utilizaban unas como las siguientes:

Tarjeta 1

1	2	4	5	7	8	10	11	13
14	16	17	19	20	22	23	25	26
28	29	31	32	34	35	37	38	40

Tarjeta 2

2	3	4	5	6	7	11	12	13
14	15	16	20	21	22	23	24	25
29	30	31	32	33	34	38	39	40

Tarjeta 3

5	6	7	8	9	10	22	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22
32	33	34	35	36	37	38	39	40

Tarjeta 4

14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	3	35	36	37	38	39	40

La forma de utilizarlas es la misma que antes. El espectador elige un número menor o igual que 40 e indica en qué tarjetas se encuentra y con cuál color, y el mago hace una fácil operación y lo adivina.

En este caso es más difícil que el espectador encuentre el truco, pues no consiste en sumar los números más pequeños que aparecen (como en el caso anterior). Las tarjetas están codificadas en base 3, a la primera le corresponde el $1=3^0$, a la segunda el $3=3^1$, a la tercera el $9=3^2$ y la última lleva asociado el $27=3^3$. Sólo hay que sumar el código si está en negro o restarlo si está en rojo. Así si nos dicen que el número pensado está en rojo en la tarjeta 1, en negro en la 2ª y en negro en la 4ª, el número será $-1+3+27 = 29$.

En este caso el número más grande con 4 tarjetas es 1+3+9+27 = 40. Con 5 tarjetas sería 1+3+9+27+81 = 121 y con n tarjetas sería $\frac{3^n - 1}{2}$.

Pero veamos como distribuir los números. Vamos a pasar a base 3 el número 29. Se verifica que $29_{(10} = 1002_{(3}$. Pero el problema es la cifra 2 de las unidades. La forma de arreglarlo es sumar y restar uno a la cifra 2. De esa manera se obtiene 3 y podemos añadir una unidad a la cifra siguiente. Veamos el proceso en las siguientes divisiones:

29	3		
2	9	3	
	0	3	3
		0	1

29	3		
3	9	3	
-1	0	3	3
		0	1

29	3		
0	10	3	
-1	1	3	3
		0	1

Luego $29_{(10} = 1002_{(3} = 1011_{(3} = 1\cdot 3^3+0\cdot 3^2+1\cdot 3^1-1\cdot 3^0 = 27 +3 -1 = 29$

Una memoria prodigiosa.

Aparte de sus capacidades adivinatorias, otro aspecto del que el mago debe vanagloriarse es el de tener una gran memoria. Para ello nada mejor que utilizar la siguiente tabla.

35	23	80	32	17	46	44	34
22	41	20	81	68	56	61	78
16	59	77	63	50	11	79	75
62	13	37	82	58	57	10	39
9	38	36	26	27	15	72	24
60	48	53	70	14	33	12	73
42	3	71	67	8	51	69	55
50	49	2	31	54	5	29	74
19	7	64	16	1	30	28	18
6	25	4	65	52	40	45	62

El mago llama la atención sobre la desorganización de números que aparecen en la tabla. Indica que hay en total 80 números, pero como aparecen el 81 y el 82 y números como el 50 están repetidos, por lo tanto no están todos los números.

El mago explica que se ha aprendido de memoria la tabla y que puede demostrarlo.
La tabla estará proyectada y se pide a un espectador que salga y tape con una moneda uno cualquiera de los números, mientras el mago se encuentra de espaldas. Una vez hecho, el mago se vuelve e inmediatamente indica cuál es el número tapado.

El truco consiste en cómo están distribuidos los números. Nos colocamos en la casilla tachada y contamos en diagonal cuatro casillas y nos fijamos en el número que ocupa la última casilla. Si nos hemos movido hacia arriba de la tabla, al número obtenido hay que restarle 8 unidades. Si nos hemos movido hacia abajo, al último número hay que sumarle 8.

Por ejemplo, si nos han tapado el número 60 (6ª fila, 1ª columna) contamos 4 lugares en diagonal hacia abajo y obtenemos el 52, basta sumarle 8. Si nos movemos hacia arriba obtenemos el 68 al que hay que restarle 8.

				68
60				
				52

Este truco es muy interesante para trabajar con los alumnos pues después de trabajarlo (potenciando la rapidez en el cálculo mental) se puede proponer que los propios alumnos creen sus cuadros de números inventándose la regla que quieren aplicar. Para ello eligen si se mueven en diagonal o en vertical u horizontal, cuántas casillas y qué operación se aplica (suelen salir hasta complicaciones del tipo 2·número+3).

Cuando yo realizo algún espectáculo de magia en un centro educativo, me gusta completar el truco anterior con otro más complicado. Indico que para un mago de mis capacidades aprenderse una serie de números enteros de dos cifras no es un reto importante, y por ello les proyecto la siguiente tabla tomada del maestro Perelman.

34212	46223	58234	610245	712256
44404	56416	68428	7104310	8124412
54616	66609	786112	8106215	9126318
64828	768112	888016	9108120	10128224
750310	870215	990120	1011025	11130130
852412	972318	1092224	11112130	12132036
954514	1074421	1194328	12114235	13134142
1056616	1176524	1296432	13116340	14136248
1158718	1278627	1398536	14118445	15138354

Estando de espaldas a la tabla, se le pide a un espectador que elija un número y que indique la columna y la fila en que se encuentra. Con esos datos el mago puede saber el número.

El truco se basa en que cada casilla está codificada. A la primera columna le corresponde el 20, a la 2ª el 30 y así sucesivamente. A cada fila le corresponde su lugar. De esa manera la casilla de la 3ª fila y 4ª columna tiene como código el 53. Para encontrar el número se realizan las siguientes operaciones:

- se suman las cifras 5+3=8
- se duplica el número 53·2=106
- se restan las cifras 5–3=2
- se multiplican las cifras 5·3=15

luego, el número de esa casilla es 8106215.

Aquí también pueden crearse los alumnos su propio código y, por tanto, números tan grandes como se quiera.

Localizar un número por su columna.

Hay una forma de adivinar un número elegido por un espectador, utilizando unas tablas más simples. Incluso puede tenerse como tarjeta con los cuadros por ambos lados y llevarlo en el bolsillo.

En general, se le presenta al espectador el primer cuadro, y se le pide que elija un número e indique en qué columna se encuentra. Posteriormente se le enseña el segundo cuadro y se le pide que busque el número elegido y vuelva a indicar en qué columna se encuentra ahora. Inmediatamente el mago dice cuál era el número pensado.

Los cuadros que se presentan son los siguientes:

Cuadro 1º

6	15	39	17	23	35	11
21	42	2	28	31	8	46
37	5	30	49	12	25	34
10	26	13	38	1	43	16
33	45	22	7	47	19	29
27	9	48	36	20	40	3
18	24	41	4	32	14	44

Cuadro 2º

3	44	11	34	16	46	29
43	25	14	8	19	35	40
32	1	12	31	23	47	20
17	49	36	7	4	38	28
13	30	2	41	39	22	48
9	42	24	5	26	45	15
27	10	6	21	37	18	33

El truco en este caso es muy fácil, los números están colocados como en una matriz, de manera que los elementos que están en la misma columna en el primer cuadro, están colocados en la misma fila en el segundo cuadro. Sabiendo en qué columna estaba en el primero y en qué columna en el segundo, se busca fácilmente. El segundo cuadro, con el fin de despistar un poco, tiene las columnas del primero en orden inverso, es decir, la primera columna del cuadro 1 es la séptima fila del 2º, la segunda columna del 1er cuadro es la segunda fila por debajo, y así sucesivamente.

Así, si un espectador nos dice que en el cuadro 1 el número elegido está en la columna 3, y en el segundo cuadro está en la columna 4, el número será el 41.

Hallar la raíz quinta de un número.

Otra manera de engañar al público, es hacerle creer que el mago se sabe todas las potencias quintas de los números de dos cifras, o bien que es capaz de calcular la raíz quinta de un número que sea una potencia exacta.

Un truco parecido (hallar la raíz cúbica) fue presentado en la anterior edición de estas jornadas por el profesor Francisco González (ver referencia).

Si consideramos un número de dos cifras, y calculamos su potencia 5ª tendríamos:

$(ab)^5=(10\cdot a+b)^5=10^5\cdot a^5+5\cdot 10^4\cdot a^4\cdot b+10^4\cdot a^3\cdot b^2+10^3\cdot a^2\cdot b^3+5\cdot 10\cdot a\cdot b^4+b^5$

Las unidades de ese desarrollo dependen exclusivamente de la terminación de b^5. Pero si hallamos las potencias quintas de las cifras, teniendo en cuenta que $0^5=0$ y que $1^5=1$, tendremos:

a	a^5
2	32
3	243

a	a^5
4	1024
5	3125

a	a^5
6	7776
7	16807

a	a^5
8	32768
	59049

Como puede apreciarse, la potencia quinta de un número acaba siempre con las mismas unidades que el número. Luego, sin más que mirar la solución, sabemos cuál es la cifra de las unidades del número buscado. Para hallar la cifra de las decenas, necesitamos recordar la tabla anterior y tener en cuenta las siguientes desigualdades:

$10\cdot a+0 < 10\cdot a+b=ab < 10\cdot a+10=10\cdot(a+1) \Rightarrow (10\cdot a)^5 < (ab)^5 < [10\cdot(a+1)]^5$

$\Rightarrow 10^5\cdot a^5 < (ab)^5 < 10^5\cdot(a+1)^5$ si dividimos por 10^5 obtendremos

$\Rightarrow a^5 < \frac{(ab)^5}{10^5} < (a+1)^5$

Es decir, descartamos las últimas cinco cifras del número, y nos fijamos entre qué dos potencias quintas se encuentra lo que nos queda.

Por ejemplo, si nos dan el número 380204032 sabemos que acaba en 2, y si eliminamos las cinco últimas cifras nos queda 3802 que es mayor que $3125=5^5$ y menor que $7776=6^5$ luego la raíz quinta de ese número es el 52.

Restar un número múltiplo de 9.

El trabajar con números da un cierto halo de misterio a los trucos. No olvidemos que la mayoría de la gente que observa un truco de magia, no tiene gran soltura en el manejo de los números (quizás lo contrario que en un taller como este) y además, los números siempre han tenido algo de misteriosos. Ya desde Pitágoras los números se consideraban como un poco mágicos, y no olvidemos que existe toda una numerología esotérica que tiene una gran legión de adeptos. Por eso, los trucos con números son atractivos siempre y cuando las personas no tengan que hacer grandes operaciones, si no disponen de calculadora (aunque hoy día los alumnos echan mano rápidamente del móvil).

Veamos un truco muy fácil y sin embargo muy atractivo. Se le pide a un espectador que piense en un número de dos cifras, lo multiplique por 10 y le reste un múltiplo de 9, el que él quiera, menor de 90. Al decirle el resultado al mago, éste inmediatamente adivina el número.

El mago lo único que tiene que hacer es quitarle al número obtenido la última cifra, y sumársela a las dos que quedan.

Por ejemplo, si se piensa en el 37, se multiplica por 10 y se obtiene 370, si ahora se le resta por ejemplo el 54 obtendremos 370-54=316, luego el mago al recibir el 316, suma 31+6=37, que era el número pensado.

La explicación es muy fácil. Si x es el número pensado y se le resta $9\cdot a$ (siendo $a<10$), lo que se ha hecho es $10\cdot x-9\cdot a$ si sumamos y restamos "a" obtendremos lo siguiente $10\cdot x-10\cdot a+a = 10\cdot(x-a)+a$

Si quitamos la última cifra del número (que debe ser a la fuerza "a") y consideramos las dos primeras como un número de dos cifras, es como si dividiésemos por 10 por lo que nos quedaría x–a, luego si ahora le sumamos "a", nos queda el número inicial x.

Pudiera darse el caso de que el número que se le dice al mago sea sólo de dos cifras en lugar de tres (eso ocurre si el número que piensa el espectador es menor que 19 y le resta un múltiplo de 9 grande) entonces basta sumar las dos cifras, siguiendo la explicación anterior.

La cifra tachada.

El siguiente truco puede hacerse con todo el público a la vez pues es muy rápido, fácil y sin embargo muy efectivo.

Un espectador piensa un número de cuatro cifras y calcula la suma de esas cuatro cifras. A continuación tacha una de las cifras resultantes (que no sea un cero) y le dice al mago las cifras restantes en el orden que quiera. Inmediatamente el mago indica cuál ha sido la cifra tachada.

La justificación de este truco vuelve a basarse en la divisibilidad por 9. Si a un número cualquiera se le resta la suma de sus cifras, el resultado siempre es un múltiplo de 9. La forma de verlo es inmediata. Si consideramos el número $abcd=1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d$ la operación que hacemos es:
$(1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d)-(a+b+c+d) = 999\cdot a+99\cdot b+9\cdot c$

Por lo tanto, si se tacha una de las cifras de ese número, el mago sólo debe sumar mentalmente las cifras que se le van diciendo y cuando lo tenga, sólo debe buscar qué cantidad falta para que esa suma sea múltiplo de 9. Esa cantidad es la cifra tachada.

Por ejemplo si se ha pensado el 5293 se realiza la operación 5293–19=5274, si ahora tachamos el 7 y sumamos las demás cifras 5+2+4=11 nos faltan 7 unidades para el siguiente múltiplo de 9, luego ese número es el tachado.

Podría darse el caso de que al sumar las cifras resultantes, nos saliese directamente múltiplo de 9, entonces la cifra tachada tendría que ser un 9 (otra posibilidad sería el 0 pero ese lo hemos descartado de principio).

Este truco puede presentarse también de otra forma. Se le pide al espectador que piense un número de cuatro cifras donde no sean todas iguales, a continuación debe reordenar de distinta manera las cifras para obtener otro número, y a continuación resta los dos números. Con el resto hace lo mismo que en el caso anterior.

Es decir si parte de 5293 podría escribir el 2539 y al efectuar la diferencia obtendríamos 5293 – 2539 = 2754, que vuelve a ser múltiplo de 9.

El siempre previsible 1089.

Uno de los trucos que pueden encontrarse con más facilidad en cualquier relación de recreaciones matemáticas, es el del 1089.

Se pide al espectador que piense un número de tres cifras que no tenga iguales las cifras, al menos que no sea capicúa. A continuación, el mago, como si le hubiese leído el pensamiento, escribe un número en un papel y, doblado, se lo entrega a otro espectador que hará de secretario.

A continuación se le pide que haga las siguientes operaciones.

1) Cambie la primera y última cifra entre sí.
2) Reste los dos números que tiene, (al mayor se le resta el menor).
3) Al resultado de la resta le vuelva a cambiar la primera y última cifra.
4) Los dos últimos números los sume.
5) El resultado de la suma (1089) coincide con el número que el mago había escrito en el papel.

Veamos un ejemplo concreto. Si el espectador ha pensado el número 734 los pasos a seguir son:

1) Obtengo 437.
2) Resto 734 – 437 = 297.
3) Ahora tengo 792.
4) Por último sumo 297 + 792 = 1089.

La demostración de que siempre ocurre así la veremos a continuación.

Consideremos el número abc (donde partiremos del supuesto que $a>c$).
Al cambiar las cifras obtenemos cba y si restamos (descomponiéndolo según las cifras) obtendremos:
$(100a+10b+c) - (100c+10b+a) = 100(a-c) + (c-a)$ como $a>c$ entonces $c-a$ es negativo. Restamos 100 unidades para anular ese número negativo, realizando las siguientes operaciones:

$$100(a-c) + (c-a) = 100(a-c-1) + 100 + (c-a) = 100\,(a-c-1) + 90 + (10+c-a)$$

de esta manera $10+c-a$ ya es un entero positivo comprendido entre 1 y 9.
Se puede apreciar que este número tiene siempre como segunda cifra el 9 y la suma de la primera y la tercera es también siempre 9 pues $a-c-1+10+c-a = 9$.
Si ahora cambiamos entre sí la primera y la última cifra y sumamos tendremos:

$[100 (a–c–1) + 90 + (10+c–a)] + [100 (10+c–a) + 90 + (a–c–1)] =$
$= 100 (10+c–a+a–c–1) + 180 + (10+c–a+a–c–1) = 900 + 180 + 9 = 1089$

La puesta en escena en este truco es fundamental para crear expectación y dejar al público realmente asombrado. Podemos escribir una palabra en el papel en lugar de un número. Cuando el espectador piensa el número se le da un libro, se le pide que haga las operaciones pertinentes y se le dice que busque en el libro de la siguiente forma. Localice la página correspondiente a las dos primeras cifras del número obtenido. Dentro de esa página la línea correspondiente a la siguiente cifra y dentro de esa línea la palabra que corresponda a la última cifra del número hallado. Esa palabra se encontrará escrita en el papel.

La cifra preferida.

Este truco es muy bien recibido cuando trabajamos con alumnos de primaria o incluso de primer ciclo de secundaria. Se le pide a una persona que diga cuál es su cifra preferida, a continuación se le entrega una calculadora donde debe escribir el número 12345679 (sin el 8) y multiplicar por el número que indique el mago. Al hacerlo le saldrá un número compuesto por todas las cifras iguales a la cifra preferida.

Por ejemplo si nos dicen que la cifra preferida es el 3, basta multiplicar 12345679 por 27 y obtenemos 333333333.

El motivo es que si multiplicamos 12345679 x 9 se obtiene 111111111. Si en lugar de multiplicar por 9, lo hacemos por un múltiplo de él, nos sale la cifra por la que hemos multiplicado el 9 para obtener el múltiplo.

Números que verifican esta propiedad existen varios, aunque no tienen la regularidad del número 12345679.

Otro ejemplo es el número 37037 que si lo multiplicamos por 3 obtenemos 111111. Y otro es el 15873 en cuyo caso el factor mágico es el 7, pues 15873 x 7 = 111111.

Adivinar la edad y el número de familiares.

Dentro de los trucos de números, los más corrientes y aquellos que seguramente nos habrán hecho muchos a lo largo de nuestra vida, son aquellos de pensar un número, multiplicar por dos, sumarle 7, restar......

Vamos a ver uno de ellos donde vamos a adivinar el número de personas que viven en su casa y la edad de un espectador. Igual que alguno de los vistos anteriormente, puede hacerse con todo el público a la vez y después ir adivinando persona a persona.

Los pasos a seguir son los siguientes:

a) Escriba el número de personas que viven en su casa.
b) Lo multiplica por dos y le suma 4.
c) Al resultado de la suma lo multiplica por 50.
d) Al resultado del producto le suma 1568.
e) A lo obtenido se le resta el año del nacimiento.
f) Por último, el mago recibe el resultado de la operación anterior, se le pregunta al espectador si en el año presente ha cumplido ya años e inmediatamente el mago indica la edad y el número de personas que viven en casa del espectador.

El truco consiste en añadirle al número obtenido 235 (ó 236 si ya ha sido su cumpleaños) y obtenemos un número de tres cifras, la primera es la cantidad de personas que viven en la casa y las otras dos su edad.

El álgebra nos va a permitir descubrir cuál es el número oculto que debemos sumar.

Supongamos que es x el número de personas que viven en la casa e y el año de nacimiento de la persona. Los pasos seguidos son

Multiplica por 2 y suma 4	$2 \cdot a+4$
Multiplica por 50	$(2 \cdot a+4) \cdot 50 = 100 \cdot a+200$
Suma 1568	$100 \cdot a+200 + 1568 = 100 \cdot a+1768$
Resta el año de nacimiento	$100 \cdot a+1768-y$
Ahora el mago suma 235	$100 \cdot a+1768-y+235=100 \cdot a+2003-y$

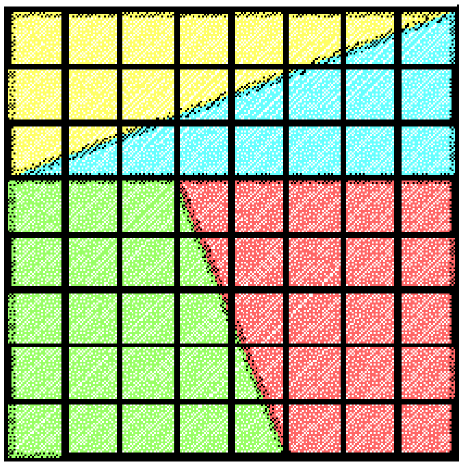
Luego, obtenemos un número de tres cifras, la primera es a (número de personas) y la diferencia 2003-y será un número de cifras que indica la edad de la persona (suponiendo que aún no ha cumplido años en 2004).

Si este truco se va a utilizar más adelante, hay que tener en cuenta que la cifra que sumamos es para obtener el año en que estamos (ahora mismo 2004), si se va a hacer en años posteriores a 2004, hay que modificar convenientemente el valor que suma el mago.

El cuadro que aparece y desaparece.

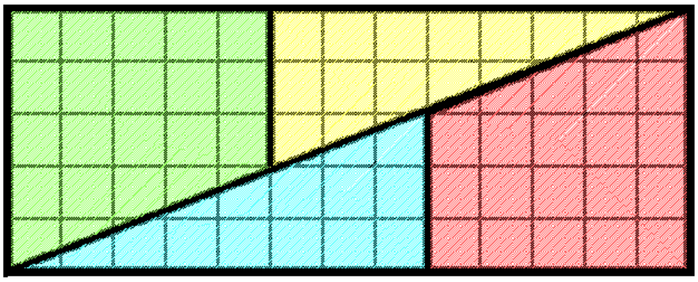
Vamos a dejar los números y vamos a ver un truco geométrico. Está adjudicado a Sam Loyd, uno de los mayores creadores de acertijos y pasatiempos de todos los tiempos. Desde mediados del siglo XIX, primero Sam Loyd padre, y posteriormente su hijo, estuvieron encargados de una sección de pasatiempos en una revista americana, y en ella plantearon multitud de acertijos famosos.

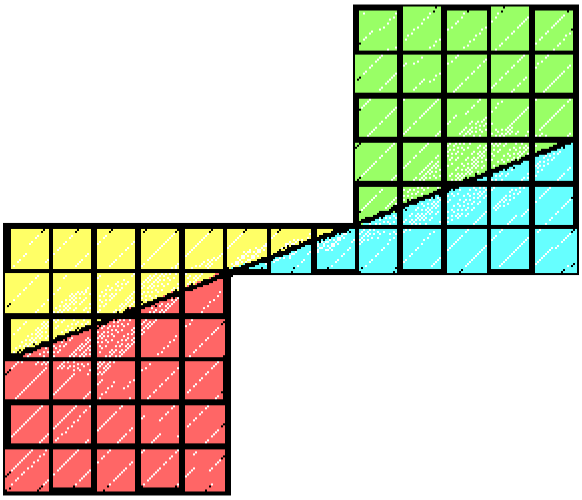
En este truco geométrico partimos de un cuadrado de 64 unidades de superficie, dividido de la siguiente forma.



Lo cortamos primeramente en dos rectángulos, uno de 3x8 y otro de 5x8. El pequeño se divide a su vez por la diagonal, y el mayor de la forma que aparece en el dibujo.

Si ahora reconstruimos con las cuatro piezas una nueva figura, podemos conseguir el rectángulo siguiente, que como puede apreciarse tiene 5x13=65 cuadrados de superficie.





Pero si las cuatro piezas iniciales se colocan de distinta forma, como en la nueva imagen, obtendremos ahora una superficie de sólo 63 cuadraditos.

Este truco puede hacerse dibujando en transparencias las cuatro partes y proyectando los movimientos o incluso haciendo construir en cartulina el cuadrado original y dividiendo en cuatro partes, según los cortes previos.

Yo poseo un juego publicitario de mediados de los años 60 del pasado siglo, basado en este rompecabezas.

El fundamento del truco consiste en que cuando se construye el rectángulo de 5x13, la diagonal no coincide exactamente, a lo largo de ella aparece un romboide, pero tan fino que es difícil observarlo a simple vista. Por eso puede aparecer un cuadrado más.

Cuando se pasa a la última figura, las líneas sobre la diagonal se montan unas sobre otras de forma inobservable, pero consiguiendo que la superficie correspondiente a un cuadradito desaparezca.

Basada en esta idea, el propio Sam Loyd creó un puzzle titulado ¡Fuera de este mundo! (Get off the earth) que tuvo un éxito apoteósico, llegándose a vender millones de ejemplares. En ese puzzle (que podemos ver en la imagen) si se corta por la línea correspondiente al borde del mundo y se gira el círculo interior, según hacia donde señale la flecha central, aparecen 13 (si señala a N.E.) ó 12 figuras (si señala hacia N.W.).

Este puzzle puede encontrarse junto con muchos otros ejemplos en el libro de magia de Martin Gardner. También es fácil encontrarlo en Internet. En concreto la imagen que acompaña estas líneas está sacada de la dirección:
http://ccins.camosun.bc.ca/~jbritton/jbgetoffearth.htm
en la que aparece un gif animado del puzzle, donde puede verse en las dos posiciones, y además una plantilla para fotocopiar y utilizar el puzzle.

Trucos con cartas.

Una de las partes más llamativa de cualquier espectáculo de magia lo componen los trucos de cartas. En lo concerniente a la matemagia no podía ser menos. Muchos trucos de cartas (en general los que no se componen de cartas que aparecen o desaparecen de forma “misteriosa”) llevan detrás una estructura matemática. La posibilidad de ordenación, de agrupación por colores o números, la utilización del valor de la carta, etc… permiten realizar muchos trucos fáciles de hacer, pero muy espectaculares.

a) Orden en el Universo.

Este truco está presentado por el profesor Pedro Alegría en la página de divulgamat (ver referencia) y aunque muy simple, deja al público realmente asombrado.

Se toman, boca abajo, las cartas del 1 al 9 de cualquier palo y se colocan ordenadas en orden decreciente. La primera el as, debajo de ella el dos, luego el tres y así sucesivamente.

El mago muestra al público las cartas para que vean que están ordenadas y a continuación se sacan tres personas del público y se les pide que cada una de ellas realice los siguientes pasos:

1) Corte el mazo y complete el corte.
2) Divida el mazo en dos montones carta a carta, es decir la primera carta a un montón, la segunda a otro, la tercera al primer montón y así todas.
3) Por último coloque uno de los dos montones encima del otro.

Después de que los tres voluntarios han realizado lo anterior, y siempre teniendo las cartas boca abajo, el mago muestra la última carta del mazo y pasa, una a una de abajo hasta arriba del mazo, tantas cartas como indique el valor de la carta mostrada.

Después de realizado lo anterior, el mago muestra de nuevo las cartas al público y asombrosamente las cartas vuelven a estar en orden.

El truco es meramente combinatorio. Cuando colocamos las cartas de la manera anterior, da igual como se hagan los cortes, porque obtenemos un bucle formado por las nueve cartas. Al dividir las cartas en dos montones, las cartas en lugar de ir consecutivas, van de dos en dos, al realizar el segundo corte van de cuatro en cuatro y al tercer corte van de ocho en ocho. Pero al tener nueve cartas, si después de una va la correspondiente a ocho cartas después, al ser cíclico cada carta lleva aparejada la anterior. De esa manera las cartas vuelven a estar en orden después de los tres cortes. Únicamente puede ser que no comience en el 1, para ello es por lo que se mira la última carta y se trasladan de abajo hacia arriba tantas como indique ese número.

b) <u>Los cuatro ases</u>.

El mago saca cuatro voluntarios y les pide que piensen un número entre el 10 y el 20 (menor que este último). Le pide el número pensado al primer espectador y va colocando tantas cartas como ese número indique, una a una sobre un montón en la mesa. Al acabar se da cuenta que no va a tener cartas para todas, entonces le pide al espectador que sume las cifras de su número y retira del montón de la mesa tantas cartas como la suma, colocándolas una a una sobre el mazo que tiene en la mano. La última carta que quedaba en el montón de la mesa se la entrega, sin que se vea, al espectador y el montón que quedaba sobre la mesa lo vuelve a colocar sobre el mazo.

Repite la misma operación con los otros tres espectadores y al acabar el número, los voluntarios del público muestran sus cartas y resulta que tienen los cuatro ases de la baraja.

El truco se basa en cómo tenemos preparadas las cartas y en lo que vimos antes de que si a un número le restamos la suma de sus cifras, el resultado es siempre un múltiplo de 9. Como hemos elegido número menores que 20, el resultado de la resta es siempre 9. Es decir, nosotros vamos a entregar siempre la novena carta desde el principio del mazo, independientemente del número que haya elegido el espectador. Por lo tanto, sólo tenemos que preparar las cartas, antes de comenzar, de forma que los cuatro ases ocupen los lugares 9, 10, 11 y 12 desde el comienzo del mazo.

c) <u>Las 9 (o 21, o 27) cartas</u>.

Hay un truco que suele ser conocido por mucha gente del público, pero que es posible modificar para dejar más asombrados a los que creen que lo saben.

Básicamente es lo siguiente. Tomamos 9 cartas cualesquiera y se las muestra a una persona del público, mientras vamos montando con ellas tres montones para que, sin decírnoslo, elija una de las 9 cartas. Al acabar, nos indica en qué montón ha quedado su carta elegida; el mago coloca los montones uno sobre otro y vuelve a repartir en tres montones enseñándolo al público y al acabar le indican en que montón ha quedado ahora la carta. El mago coloca los montones uno sobre otro y puede decir cuál es la carta que el espectador había elegido.

Si se tienen 21 o 27 cartas es necesario realizar una vez más el reparto en tres montones, para colocar en su lugar el sitio buscado.

En general, el truco se enseña de forma que el mago coloca en cada ocasión el montón donde está la carta elegida entre los otros dos, de esa manera, la carta queda al final en el centro del mazo.

Yo prefiero utilizar sólo nueve cartas, porque así el truco es más rápido y además, modificando el orden en que se colocan los mazos, se puede conseguir que la carta quede en el lugar que se quiera. En el siguiente cuadro vemos cómo colocar el montón donde está la carta buscada en cada reparto, según el lugar donde queramos que quede.

Lugar donde se quiere que acabe la carta buscada	1	2	3	4	5	6	7	8	9
El montón con la carta se coloca, después del primer reparto	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º
El montón con la carta se coloca, después del segundo reparto	1º	1º	1º	2º	2º	2º	3º	3º	3º

Por ejemplo, si queremos que la carta quede en el lugar 8, como colocamos uno sobre otro los tres montones que hemos hecho, necesitamos que la carta quede la penúltima del último montón que coloquemos en ese reparto. Para quedar la penúltima en el reparto, y como hay tres, quiere decir que queda la segunda, tiene que provenir del segundo montón colocado en el primer reparto.

Conseguir esto mismo con 21 ó 27 cartas también es posible, pero mucho más complicado ver el orden en que hay que colocar los montones en cada reparto.

d) Completar a 10.

Para este truco se necesita una baraja española de 48 cartas (con 8 y 9) o una baraja francesa de 52 cartas.

Supongamos que lo hacemos con la francesa. Se barajan las cartas y se colocan boca abajo sobre la mesa 12 cartas. Se le pide a un espectador que vuelva boca arriba cuatro de esas cartas. Las restantes se recogen y se colocan debajo del mazo.

A continuación, se van a completar con cartas del mazo las cartas que están sobre la mesa. Se colocan frente a cada una de las cuatro cartas, tantas cartas del mazo como hagan falta para completar desde el número de esa carta hasta 10 (las figuras se consideran que valen 10). Una vez realizado, se suman los valores de las cuatro cartas que hay sobre la mesa, y se sacan del mazo tantas cartas como el resultado de esa suma. Sin mirarla, el mago dice en voz alta qué carta es la última que ha puesto sobre la mesa.

El truco consiste en que una vez colocadas sobre la mesa las 12 cartas, el mago debe mirar sin que se note, qué carta hay al final del mazo. Esa es la carta que va a descubrir al final. El fundamento matemático es que cuando reparte las 12 cartas sobre la mesa, le quedan en el mazo 40 cartas, luego la carta vista es la número 40. Si ahora por cada carta primero completamos a 10 y después quitamos tantas cartas como indica el valor, realmente estamos quitando del mazo en total 10 cartas por cada una de la mesa, es decir, en total quitamos 40 cartas.

Para el final saquemos el conejo de la chistera.

Como hemos podido observar por las páginas anteriores, trucos matemáticos los hay de todos los gustos, y pueden ser aprovechables en clase, en primer lugar para centrar la atención, crear el interés y por último investigar en matemáticas. El nivel en el que queramos profundizar a la hora de trabajar con los trucos, depende de nuestros alumnos y de nuestros intereses. Con algunos alumnos nos bastará promover un poco de cálculo mental y de búsqueda de posibilidades, con otros podremos pedirles que busquen variaciones a esos trucos aprendidos, y con otros podremos hacer un estudio exhaustivo de cómo se desarrollan los trucos, tal como hemos visto en algunos.

La intención de este taller era, en primer lugar pasar un rato divertido y entretenido (algo fundamental para poder motivar a un público, aunque sea de alumnos) y en segundo lugar, abrir una vía de investigación para todo aquel que quiera profundizar en este apasionante mundo. En las referencias que vienen a continuación, puede encontrarse muchísimo más material que el señalado aquí para ahondar en este tema.

Y colorín colorado este espectáculo ha terminado.

Referencias para profundizar en el tema.

ALEGRÍA, PEDRO y RUÍZ DE ARCAUTE, J.C. (2002): “La matemagia desvelada”. *Sigma* 21, 145-174.

Puede consultarse una copia en PDF en la dirección:
http://www.berrikuntza.net/edukia/matematika/sigmaaldizkaria/sigma_21/10-LAMAT.PDF

El profesor Pedro Alegría presenta varios trucos en la sección de “El Rincón Matemágico” de la página de Divulgamat en la dirección siguiente:
http://www.divulgamat.net/weborriak/Cultura/MateMagia/matemagia.asp

ÁLVAREZ, VENANCIO, FERNÁNDEZ, PABLO y MÁRQUEZ, M.A. (   ): “Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos”. *Gaceta Matemática*

Puede consultarse una copia en PDF en la dirección:
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/magia.pdf

GARDNER, MARTIN (1992): *Magia inteligente*. Zugarto ediciones, Madrid.

GONZÁLEZ, FRANCISCO (2003): “Matemagia: la magia de las matemáticas”. En *Actas de las IV Jornadas de Educación Matemáticas de la Comunidad Valenciana*. 471-476

Puede consultarse una copia en PDF en la dirección:
www.ua.es/personal/SEMCV/Actas/pdf/Part81.PDF

LANDER, ISIDORO (1989): *Magia Matemática*. Labor, Barcelona. 2ª Edición

MUÑOZ, J.; HANS, J.A. y FERNÁNDEZ-ALISEDA, A. (2003): “La magia también se nutre de matemáticas”, en *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Zaragoza, pp. 801-805.

MUÑOZ, J.; HANS, A. y FERNÁNDEZ-ALISEDA A.(2003): “Matemáticas y magia”. En *Actas de III Jornadas Provinciales de Matemáticas*, Madrid, pp. 113-128.

MUÑOZ SANTONJA, JOSÉ (2003) *Ernesto el aprendiz de matemago*. Nivola, Madrid.

PERELMAN, Ya I. (1983): *Problemas y experimentos educativos*. Mir, Moscu, 2ª edición.