JUEGOS DE AZAR NO TRANSITIVOS

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *C.C. Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Majuelo.*

1. Introducción.

Muchas reglas matemáticas se pueden aplicar en la vida cotidiana; otras no. Por ejemplo, la propiedad conmutativa no siempre se cumple:no es el mismo resultado si nos duchamos y después nos secamos que si nos secamos antes de ducharnos. La propiedad transitiva es una propiedad que sí suele cumplirse con frecuencia (aunque no siempre). Las relaciones "ser más alto/grueso/viejo/rico/veloz/..." cumplen la propiedad transitiva: Si Juan es más alto/grueso/viejo/rico/veloz/... que Miguel y este lo es a su vez respecto de José, entonces Juan es más alto/grueso/viejo/rico/veloz/… que José.

Esta verificación de algunas propiedades en casos concretos de la vida diaria puede hacernospensar que es algo general, que siempre se cumplen; por ello, nos solemos encontrar con contradicciones cuando esas propiedades dejan decumplirse. Vamos a ver varios ejemplos en el campo del azar.

Los que nos dedicamos a la enseñanza de las matemáticas sabemos las dificultades que suelen tener las personas no entrenadas al trabajar con el azar y la probabilidad. Es un campo que da lugar a muchas paradojas, encontrándonos con resultados que contradicen nuestra lógica y es por eso que es bastante fácil equivocarse en las previsiones que expresamos antes de hacer un experimento. El ejemplo más conocido de esta contradicción a nuestra intuición, y del que pueden encontrarse numerosas entradas en internet, quizás sea el *Problema de Monty Hall.*

En este artículo vamos a mostrar ejemplos de juegos de azar que son no transitivos, es decir, nos vamos a encontrar con que un elemento A le gana a B, por su parte B le gana a C y, en contra de lo previsto, C le gana a A. Por eso, conociendo las posibilidades de ganar uno a otro, tendremos mayor probabilidad de ganar a nuestrocompetidor una vez que sepamos qué elemento,A, B o C,ha escogido él.

Hay muchos objetos de azar en los que nos podemos encontrar probabilidades que contradicen la propiedad transitiva: ruletas, dados, monedas, cartas, conjunto de bolas, etc. Vamos a presentar aquí los más conocidos.

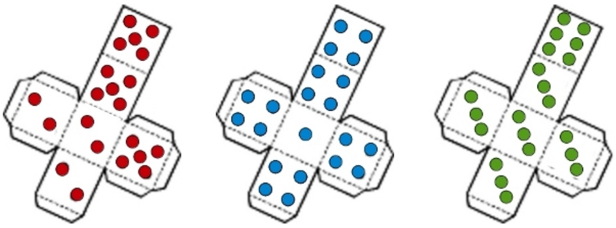
2. Juegos de dados.

La mayor variedad de juegos de azar no transitivos se da cuando utilizamos dados. En general vamos a tener una serie de dados, normalmente tres o cuatro, con distintos valores en sus caras, y que incumplen la propiedad transitiva como se ve al estudiar sus probabilidades.

2.1. Tres dados del 1 al 6

Disponemos de tres dados cúbicos en cuyas caras aparecen los números que se ven en la siguiente tabla:

Dado A	2	2	2	5	5	5
Dado B	1	4	4	4	4	4
Dado C	3	3	3	3	3	6



Si realizamos el estudio de las probabilidades de que un dado gane a otro[1]obtendremos las siguientes tablas, donde hemos indicado en su interior la letra del dado ganador en la comparación de valores.

		Dado B					
		1	4	4	4	4	4
Dado A	2	A	B	B	B	B	B
	2	A	B	B	B	B	B
	2	A	B	B	B	B	B
	5	A	A	A	A	A	A
	5	A	A	A	A	A	A
	5	A	A	A	A	A	A

		Dado C					
		3	3	3	3	3	6
Dado B	1	C	C	C	C	C	C
	4	B	B	B	B	B	C
	4	B	B	B	B	B	C
	4	B	B	B	B	B	C
	4	B	B	B	B	B	C
	4	B	B	B	B	B	C

		Dado A					
		2	2	2	5	5	5
Dado C	3	C	C	C	A	A	A
	3	C	C	C	A	A	A
	3	C	C	C	A	A	A
	3	C	C	C	A	A	A
	3	C	C	C	A	A	A
	6	C	C	C	C	C	C

Y resumiendo las probabilidades de ganar de cada dado en una sola tabla, tenemos:

Dado / Frente a	**A**	**B**	**C**
A	-	7/12	5/12
B	5/12	-	25/36
C	7/12	11/36	-

Tal como puede apreciarse, el dado A gana al B con una probabilidad[2] de 7/12 = 58%, el B gana al C con una probabilidad de 25/36 = 69% y el dado C gana al A con un 7/12 = 58% de probabilidad.

Estos dados tienen además una curiosa propiedad. Si se lanza dos veces el mismo dado y se suman los resultados, entonces las ventajas de invierten.

Dado / Frente a	**A**	**B**	**C**
A	-	59/144	86/144
B	85/144	-	625/1296
C	58/144	671/1296	-

Ahora el dado C gana al B con una probabilidad del 52%, el B gana al A con un 59% y, por último, el A gana al C con una probabilidad del 60%.

[1] Se dice que *un dado gana a otro* si al tirar ambos dados el primero muestra más puntos que el segundo la mayoría de las veces.

[2] La probabilidad se mide con un número entre 0 y 1; sin embargo, para facilitarla comprensión y, sobre todo, la comparación vamos a expresar estos valores en forma de porcentaje.

2.2. Tres dados del 1 al 18

En el caso anterior, los dados tenían en sus caras los números habituales del 1 al 6.

Vamos a ver otro ejemplo con dados pero ahora utilizando todos los números del 1 al 18 sin repetir ninguno.

Dado A	5	7	8	9	10	18
Dado B	2	3	4	15	16	17
Dado C	1	6	11	12	13	14

Ahora, al hacer el correspondiente estudio de las probabilidades de ganar, nos encontramos que todas son iguales entre unos dados y otros: los porcentajes de un dado respecto al que pierde con él son siempre del 58%.

El resumen de las probabilidades de ganar es el siguiente:

Dado / Frente a	**A**	**B**	**C**
A	-	7/12	5/12
B	5/12	-	7/12
C	7/12	5/12	-

Luego de nuevo, el dado A gana al B, el B gana al C y este al A.

2.3. Dados de Efron

Lo que hemos visto en los dos apartados anteriores podemos plantearlo para cuatro dados en lugar de tres, con el mismo desarrollo, primero mostrando una distribución donde solo aparecen los números desde el 0 hasta el 6, repitiéndose varias veces, y después otro modelo de distribución numérica en los dados con valores desde el 1 al 24 donde no se repiten los números.

El primer caso es conocido como *Dados Efron* debidos al matemático estadounidense Bradley Efron (1938 -), profesor de la Universidad de Stanford, especialista en Estadística y creador de las técnicas de muestreo llamadas *bootstrap*.

En este caso el juego se compone de cuatro dados con las siguientes distribuciones:

							Suma
Dado A	0	0	4	4	4	4	12
Dado B	3	3	3	3	3	3	18
Dado C	2	2	2	2	6	6	20
Dado D	1	1	1	5	5	5	18

Si comparamos estos dados con los anteriores nos encontramos con una primera diferencia; en los dos casos anteriores, si sumamos todas las caras de cada dado siempre obtenemos el mismo valor: en el primer caso suman 21 y en el segundo 57. Sin embargo, en los *Dados de Efron* no suman lo mismo. Esto, en un primer momento, nos puede hacer elegir uno de ellos en función de la suma de sus caras (el dado C tiene la suma mayor), pero podemos estudiar, como en los anteriores, la tabla de relaciones probabilísticas entre los dados y nos encontramos con lo siguiente:

Dado / Frente a	A	B	C	D
A	-	2/3	2/3	1/3
B	1/3	-	2/3	1/2
C	1/3	1/3	-	2/3
D	2/3	1/2	1/3	-

En este caso, el dado A gana al B con una probabilidad del 67%, y gana al C con la misma probabilidad.El dado B gana al C de nuevo con la probabilidad del 67% y empata con el D.El dado C gana al D con el 67% de probabilidad.Y, por último, el dado D gana al A con la misma probabilidad del 67%, además de empatar con el B.

Como vemos en este caso, las probabilidades de un dado de ganar al que le sigue (considerándolos en un sentido cíclico -después de A viene B,…, después de D viene A-) es siempre la misma (2/3) y además superior a la probabilidad de ganar a cualquiera de los dados anteriores.

2.4. Dados de Quimby

Veamos ahora la versión de cuatro dados en los que aparecen repartidos todos los números del 1 al 24 sin repetir en ningún momento.

Esta distribución, conocida como *Dados de Quimby*, se asocia al físico Shirley L. Quimby, profesor de la Universidad de Columbia. Tiene la siguiente asignación de valores numéricos:

							Suma
Dado A	3	4	5	20	21	22	75
Dado B	1	2	16	17	18	19	73
Dado C	10	11	12	13	14	15	75
Dado D	6	7	8	9	23	24	77

Al hacer la tabla de doble entrada comparando las probabilidades de cada dado respecto a los otros encontramos los siguientes valores:

Dado / Frente a	A	B	C	D
A	-	2/3	1/2	1/3
B	1/3	-	2/3	4/9
C	1/2	1/3	-	2/3
D	2/3	5/9	1/3	-

Como podemos ver, de nuevo obtenemos una probabilidad del 67% de unos dados respecto a otros. Así el dado A gana al B, este al C, el C gana al D y, cerrando el círculo, el dado D gana al dado A.

Además de lo anterior, los dados A y C empatan a probabilidades y el dado D gana también al B aunque con una probabilidad menor, en este caso un 56%.

2.5. Versión Alquerque de los dados de Quimby

Si nos fijamos en la distribución de Quimby observamos que no todos los números que forman cada dado suman lo mismo.

Nosotros proponemos una pequeña variación de forma que todos los números que están en cada dado suman 75 y se sigue manteniendo la propiedad cíclica de ganancia en los dados.

Hacemos la siguiente distribución de valores:

							Suma
Dado A	2	3	7	20	21	22	75
Dado B	1	4	16	17	18	19	75
Dado C	10	11	12	13	14	15	75
Dado D	5	6	8	9	23	24	75

Al hacer la tabla de doble entrada, comparando las probabilidades de cada dado respecto a los otros, encontramos los siguientes valores.

Dado / Frente a	**A**	**B**	**C**	**D**
A	-	11/18	1/2	7/18
B	7/18	-	2/3	4/9
C	1/2	1/3	-	2/3
D	11/18	5/9	1/3	-

El dado A gana al B con una probabilidad del 61%, la misma con la que el D gana al A. El dado B gana al C con la probabilidad del 67%, la misma con que gana C al D.

2.6. Dados tetraédricos

Hasta el momento, todos los ejemplos que hemos mostrado se han jugado con dados cúbicos, pero también podemos encontrar ejemplos con dados de otras formas. En concreto tenemos construido un juego con dados tetraédricos que sigue la misma filosofía que los anteriores.

En este caso la distribución de valores es la siguiente:

Dado A	3	3	3	6
Dado B	2	2	5	5
Dado C	1	4	4	4

Si vemos la suma de las cuatro caras de cada uno de los dados, A suma 15, B, 14 y C, 13, lo que nos puede dar una pista de que A gana a B y este a C. Como siempre,en los ejemplos que estamos proponiendo, la propiedad transitiva se rompe cuando estudiamos las posibilidades y vemos que el dado C gana a su vez al A. Veamos ese estudio probabilístico:

Dado / Frente a	**A**	**B**	**C**
A	-	5/8	7/16
B	3/8	-	5/8
C	9/16	3/8	-

El dado A gana al B con una probabilidad del 62%, la misma con la que el B gana al dado C, pero este último gana al A con una probabilidad del 56%.

2.7. Construcción del material

La mayoría de los dados anteriores son fáciles de construir. Existen dados cúbicos blancos en los que se puede escribir con un rotulador permanente los números que nos interesan. Siempre sale más barato construirlos en cartulina o en madera y colocarles los números adecuados, aunque los de cartulina hay que rellenarlos de peso o no se puede trabajar con ellos. Quizás lo más rápido sea comprar un juego de dados de póker, que se puede encontrar muy barato y colocaren las caras pegatinas con los números correspondientes.

El problema se plantea en la construcción de los dados tetraédricos. Nosotros no conocemos dados de cuatro caras que estén en blanco para escribir y en los que existen comercializados hay que escribir el número muy pequeño para poder jugar. Para resolver este problema lo que hicimos fue construir prismas de base cuadrada y que en sus lados figuraran los números correspondientes, dejando las bases en blanco. Al lanzar estos "dados" sólo se admite como tirada válida la obtención de una de las cuatro caras rectangulares. El resultado final lo podemos ver en la imagen siguiente:

3. **Ruletas**.

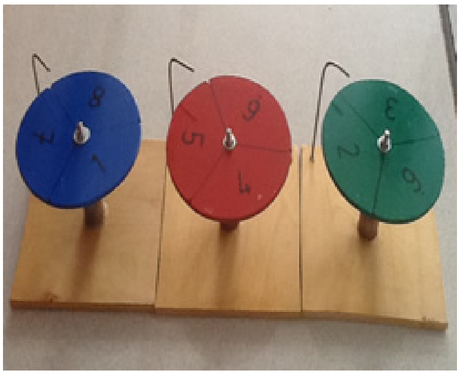
Una forma de resolver el problema planteado con la construcción de dados tetraédricos es usar ruletas. Podemos construir ruletas con cualquier cantidad de números, lo único necesario es dividir el círculo de la ruleta en las partes adecuadas y asignar a cada sector el número correspondiente.

De esa manera podríamos tener ruletas divididas en cuatro partes y construir fácilmente el juego anterior. Bastaría dibujarlo en un papel y con un clip abierto que girara alrededor de la punta de un bolígrafo colocado sobre el centro del círculo, tendríamos simulada la ruleta.

Pero veamos un juego no transitivo con ruletas.Necesitamos tres ruletas cada una con tres números. La distribución sería la siguiente:

Ruleta A	1	7	8
Ruleta B	4	5	6
Ruleta C	2	3	6

En la imagen siguiente vemos las tres ruletas construidas en madera.



Si estudiamos las probabilidades de que una ruleta gane frente a las otras dos tenemos los siguientes valores:

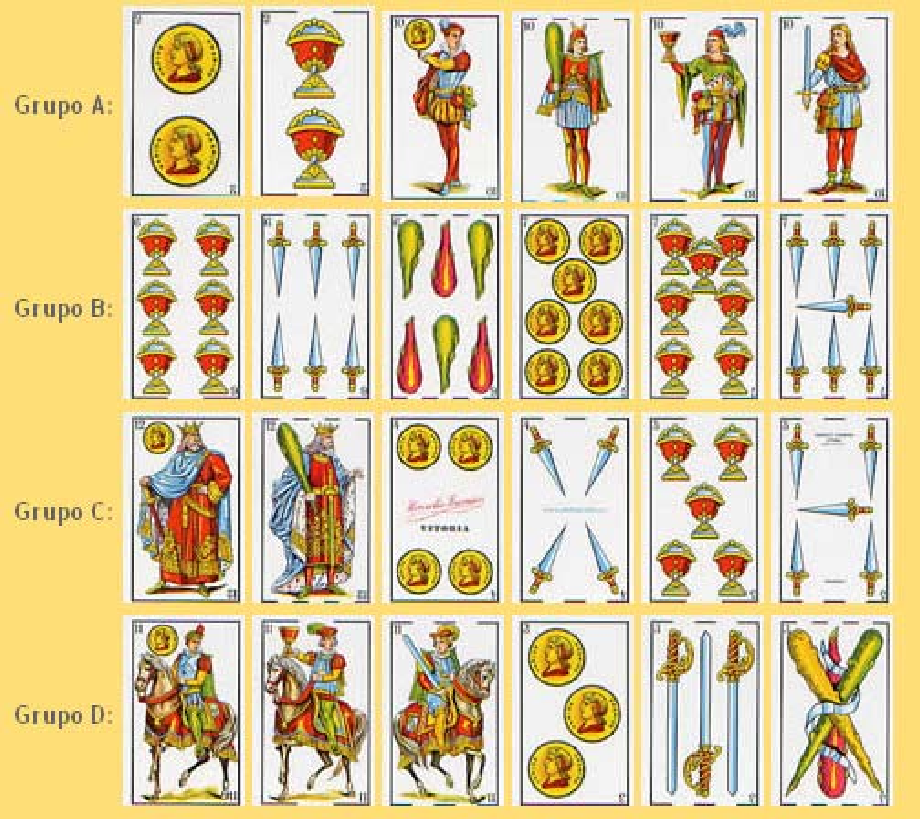
Ruleta / Frente a	**A**	**B**	**C**
A	-	2/3	4/9
B	1/3	-	2/3
C	5/9	1/3	-

Vemos por tanto que la ruleta A gana a la B con un 67% de probabilidades, la B gana a la ruleta C con las mismas probabilidades y la ruleta C gana a la A con un 56% de probabilidades.

4. Cartas.

Para terminar con este artículo vamos a ver un juego basado en cartas. Este juego ha sido creado por el campeón sueco de magia Lennart Green (1941 -).

Consiste en tener un total de 24 cartas agrupadas en cuatro bloques de seis cartas cada uno. La distribución de los grupos es la siguiente.



La metodología de este juego es un poco diferente de los anteriores.

Un jugador elige un grupo de cartas y el segundo jugador elige otro cualquiera. A continuación cada uno baraja sus cartas y comienzan a jugar colocando cada uno en la mesa, boca arriba, una carta de su mazo. El jugador cuya carta tenga mayor valor se anota un punto. Gana el jugador que al terminar las cartas tiene mayor puntuación.

Si realizamos el estudio comparativo entre cada grupo de cartas obtenemos las siguientes probabilidades.

Grupo / Frente a	A	B	C	D
A	-	2/3	2/3	1/3
B	1/3	-	2/3	1/2
C	1/3	1/3	-	2/3
D	2/3	1/2	1/3	-

Vemos que las probabilidades son exactamente las mismas que en los dados de Efron. El grupo A gana al B con un 67% de probabilidades, las mismas con las que gana el grupo B al C, el grupo C al D y el grupo D al A.

Además los grupos B y D empatan entre sí y el grupo A también gana al C con un 67% de probabilidad.

5. ¡Ojo con el azar!

En el caso de la ruleta y los dados, la forma de jugar es siempre la misma, un jugador elige un elemento, el contrario elige otro de los que quedan, se lanzan los dos elementos y gana el que saque mayor puntuación.

Tal como están planteados los juegos, el segundo jugador en elegir, si conoce las distribuciones, tiene siempre mayor probabilidad de ganar, por lo que sería un juego de estrategia ganadora. Si no fuera por el azar.El problema de trabajar con el azar, como todos sabemos, es que aunque haya mayor probabilidad de salir un número que otro, el azar puede hacer que salga el número con menor probabilidad de ganar y gane al contrario. Mayor probabilidad no quiere decir certeza absoluta, para ello haría falta que la probabilidad fuese 1, es decir, 100 % en término de porcentajes. En aquellos juegos como las cartas o los dados Efron donde la probabilidad es de 2/3, es bastante seguro que se acierta con la elección. Pero siempre nos podemos encontrar con sorpresas.

Por ello, y dado que las partidas son muy rápidas, lo que solemos hacer es que, una vez que se han elegido los elementos, estos se lanzan cinco veces seguidas, anotándose en cada caso un punto el jugador que gana. Al final de las cinco rondas gana quien tenga más puntuación.

Lo curioso es cuando le ofrecemos al jugador que elija otro dado o ruleta (y suele escoger la que hemos tenido nosotros antes)y se asombra cuando nosotros elegimos otra y sin embargo seguimos ganándole.

6. Bibliografía.

Gardner, Martin (1985): *Ruedas, Vida y otras diversiones matemáticas*. Labor. Barcelona.

Alegría, Pedro (2007): Todos ganan a todos. Página Divulgamat. El rincón matemático.
Versión digital en:
http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10640:45-diciembre-2007-todos-ganan-a-todos&catid=63:el-rincatemco&directory=67