suma+
Secciones
Noviembre 2012
71
pp. 65-74

Puzzles de equivalencias

Grupo Alquerque de Sevilla

El estudio de la Geometría tiene la particularidad de que cuando encuentras respuestas a un problema éstas te plantean nuevas preguntas e investigaciones. El tema que traemos hoy aquí es continuación de otros artículos que hemos presentado ya en esta sección. En concreto, el encontrar puzzles de figuras con el mismo área y distinta forma ya lo trabajamos en los números 48 (en 2005), 65 (en 2010) y 66 (en 2011) (véase bibliografía) de esta revista.

Al terminar el trabajo de las cuadraturas se nos despertó la curiosidad por buscar diferentes polígonos que se pudieran dividir en un número finito de piezas y que al recomponerlas adecuadamente se obtuviese otro polígono distinto. Pero en este caso descartábamos que alguna de las dos figuras fuese un cuadrado, pues ese caso estaba ampliamente trabajado.

Como indicábamos en el anterior artículo de cuadraturas, el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein dice que:

> Dados dos polígonos de igual área existe una disección de uno en un número finito de piezas poligonales que recubre exactamente el otro[1].

Después de ver la web de Gavin Theobald, donde muestra que este tema es inagotable, limitamos la

Juegos

Artículo solicitado por *Suma* en junio de 2012 y aceptado en septiembre de 2012

investigación al intercambio entre triángulo, pentágono y hexágono.

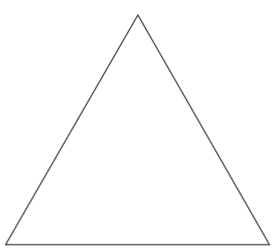
El punto de partida de este estudio fue: ¿Qué método de división o proceso de disección hay que seguir para obtener las piezas adecuadas de forma que partiendo de uno de los polígonos podamos construir el otro?

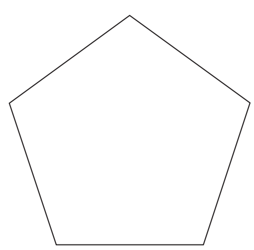
El método que hemos seguido es el de superposición de polígonos o trama de polígonos, con unos puntos de coincidencias y un ángulo de giro en uno de ellos, buscando que las divisiones que se producen entre los polígonos nos den las piezas necesarias, tratando de que sean las menos posibles.

En este proceso el rectángulo y el romboide son los polígonos más fáciles de superponer y de comparar sus áreas. Por eso, hemos transformado el triángulo, el pentágono y el hexágono en romboides.

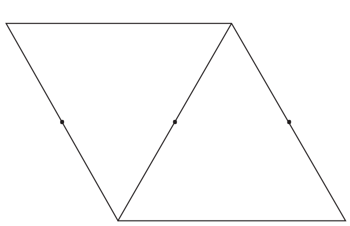
Triángulo-pentágono

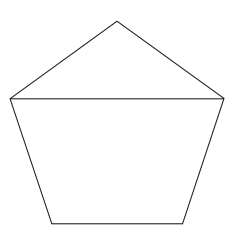
Partimos de un triángulo equilátero y un pentágono regular que tienen igual área.

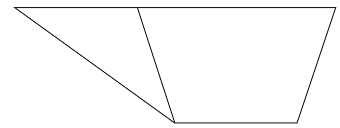


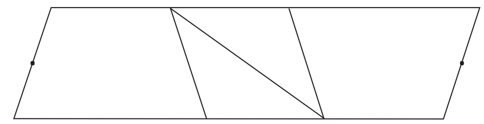


Para obtener un romboide a partir del triángulo hemos unido dos de ellos por un lado. Como hemos duplicado el área, tenemos que construir un romboide que provenga del pentágono, pero también con doble superficie.



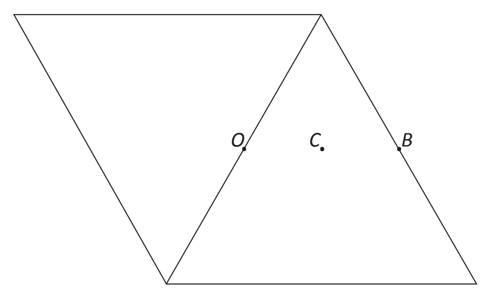




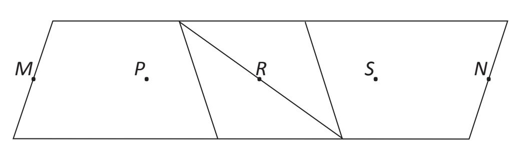


Y ahora viene la pregunta más importante en el proceso de esta investigación: ¿Al superponer los romboides, qué puntos hacemos coincidir y qué ángulo de giro les damos?

La respuesta anterior tiene infinidad de soluciones, por lo que hay que escoger alguna de ellas. Por eso, en el triángulo hemos señalado los puntos medios de dos lados contiguos (*O* y *B*) y el punto medio del segmento que forman (*C*).



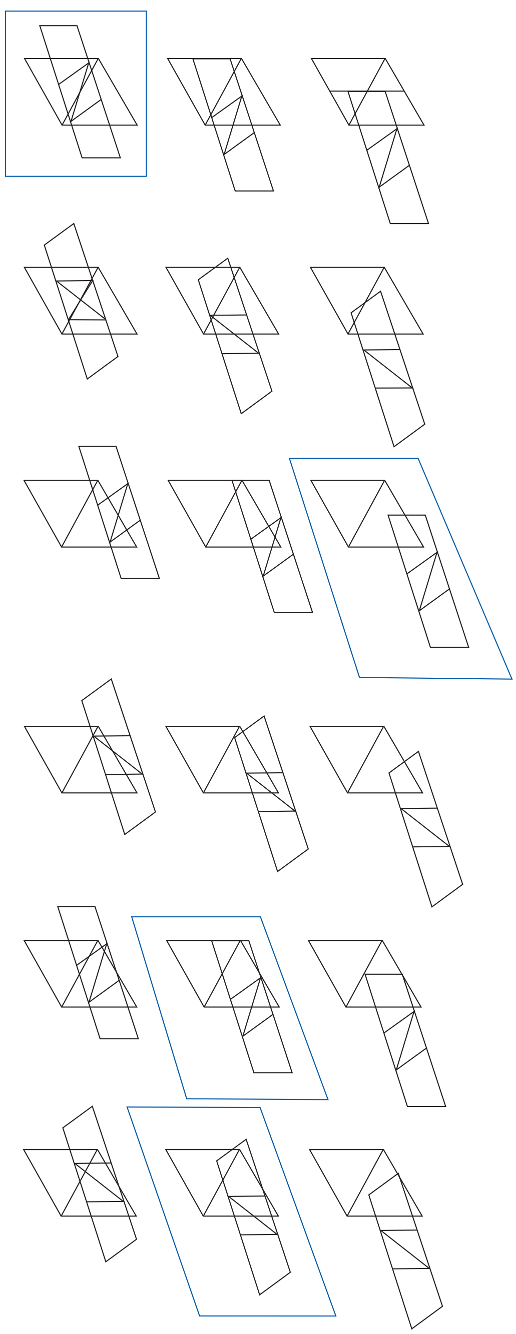
En los romboides que obtenemos a partir de dos pentágonos hemos hecho algo similar: se han señalado los puntos medios de los lados más cortos (*M, N*), el punto medio entre estos dos (*R*) y el punto medio entre este último y los dos primeros (*P, S*).



Nos falta por decidir el ángulo de giro. En nuestro estudio y después de algunas pruebas, decidimos escoger el de 72° (suplementario de 108º, ángulo interior del pentágono regular).

Estudiando todas las posibilidades de superponer los romboides y variando el sentido de orientación del romboide construido a partir del pentágono hemos encontrado 18 disposiciones distintas, haciendo coincidir en cada caso uno de los puntos *O, B, C* con uno de los puntos *R, P* y *M.*

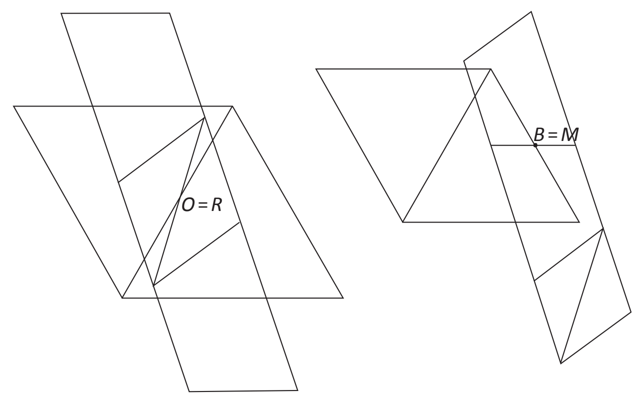
Están enmarcadas las imágenes que nos dan algunas de las soluciones que desarrollamos a continuación.



Superposición de romboides

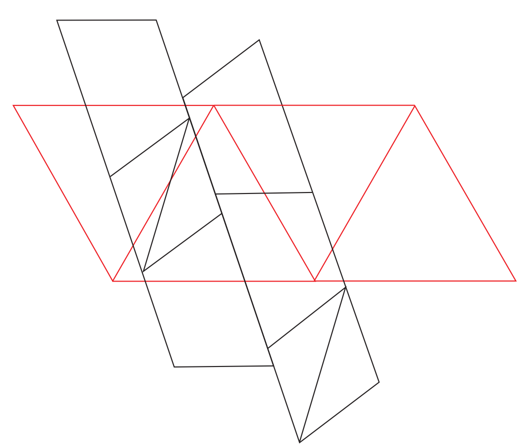
Primera disección

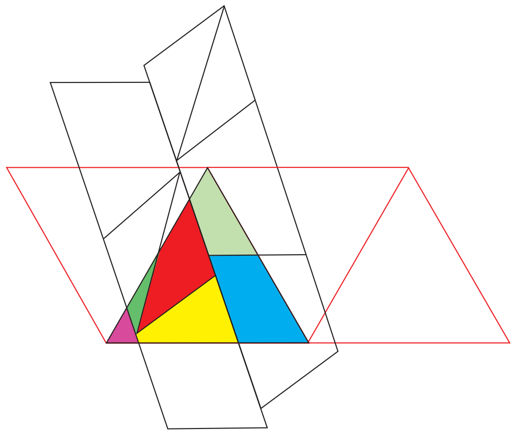
Observamos que al superponer los romboides coincidiendo en el punto *O,* cualquiera de los puntos *R, P* o *M* se divide la parte izquierda del triángulo (dibujos de primera y segunda fila) y al hacer coincidir en el punto *B* (dibujos de la tercera y cuarta fila) se divide la parte derecha, por lo que para dividir plenamente al triángulo se necesitará una división de cada lado. De esas 12 disposiciones nos dan solución al problema las dos que aparecen en la imagen siguiente.

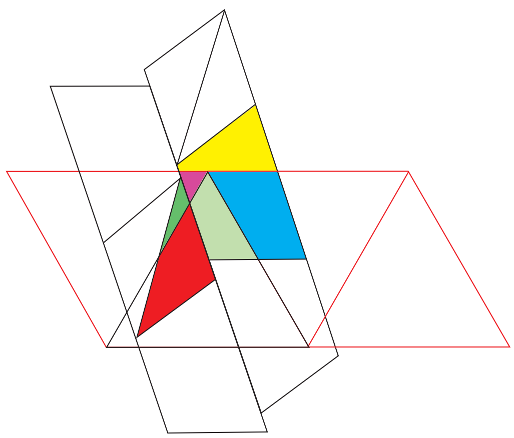


De la primera fila hemos tomado la superposición donde coinciden los puntos *O* y *R.* De la tercera fila aquella en que coinciden *B* y *M.* En este dibujo hemos cambiado de sitio uno de los trapecios para ver claramente la división que produce sobre la parte derecha del triángulo.

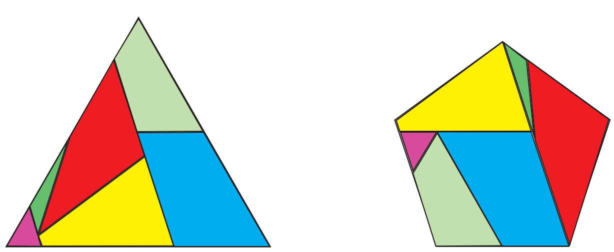
Unimos los dos dibujos en uno y tenemos el triángulo y el pentágono divididos en seis piezas que podemos ver claramente en las imágenes coloreadas.





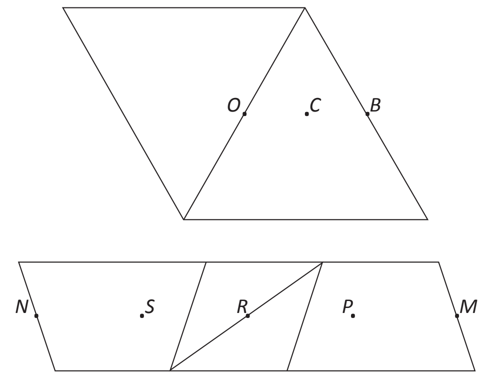


A continuación tenemos el triángulo equilátero y el pentágono regular de igual área divididos en las mismas piezas (seis):

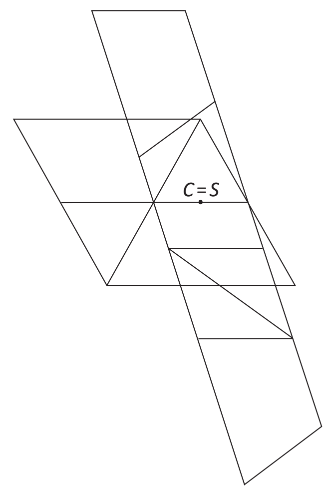


De las otras seis posibilidades, correspondientes a la superposición de romboides, haciendo coincidir el punto *C* del romboide de los triángulos con los puntos *S* o P del romboide de los pentágonos y girando el romboide de los pentágonos 72° con centro en el punto *C* y en sentido de las agujas del reloj, obtenemos otras dos nuevas disecciones.

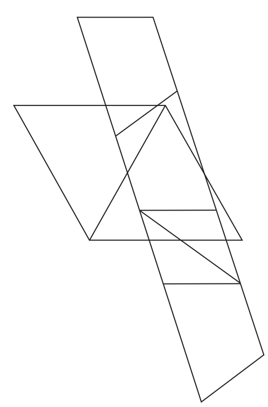
Segunda disección

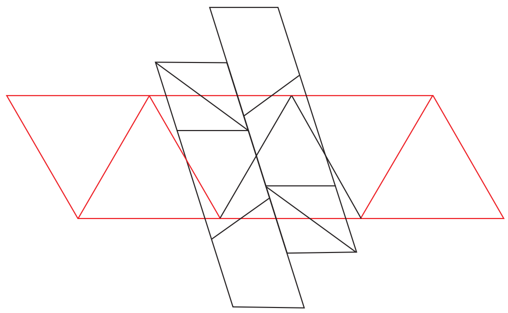


Hacemos coincidir el punto *C* con *S*.

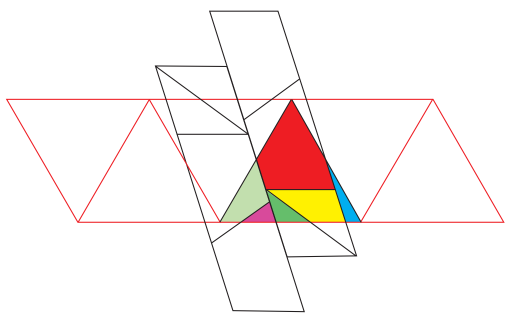


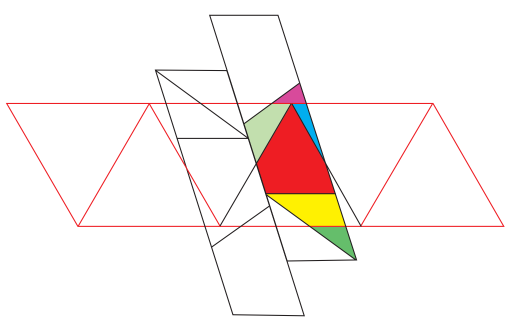
Los romboides del triángulo y del pentágono han quedado divididos en partes. Para ver bien las partes que se obtienen añadimos un trapecio en la parte superior y superponemos otro romboide de pentágono paralelo al anterior.



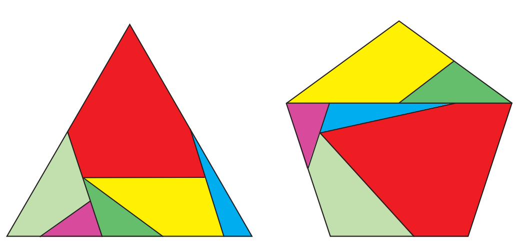


El triángulo y el trapecio que se obtuvo al dividir el pentágono han quedado divididos en seis piezas que podemos ver claramente en las siguientes imágenes coloreadas.

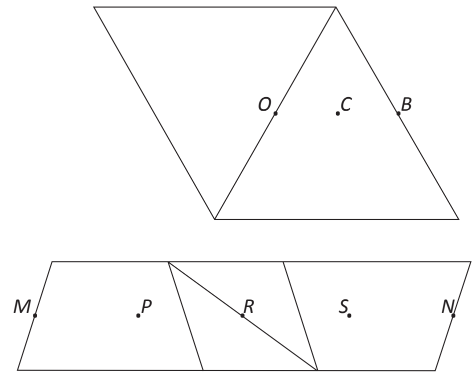




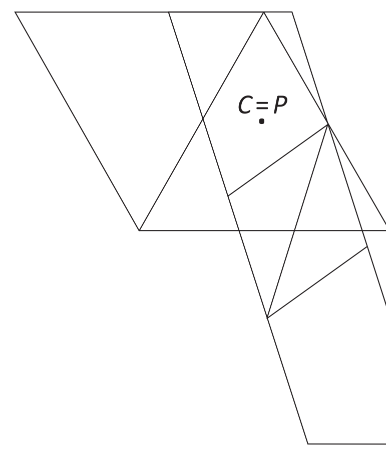
A continuación tenemos una nueva disección del triángulo equilátero y del pentágono regular de igual área divididos en las mismas piezas (seis):



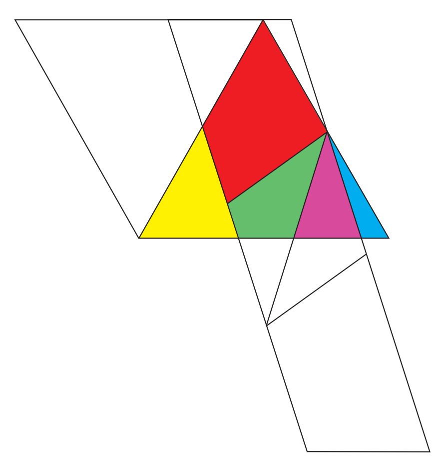
Tercera disección

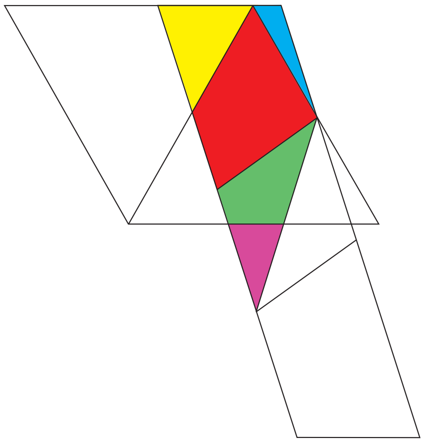


Si superponemos los dos romboides, haciendo coincidir el punto *C* del romboide de los triángulos con el punto *P* del romboide de los pentágonos y el romboide de los pentágonos lo hacemos girar 72° con centro en el punto *P* y en sentido de las agujas del reloj, obtenemos:

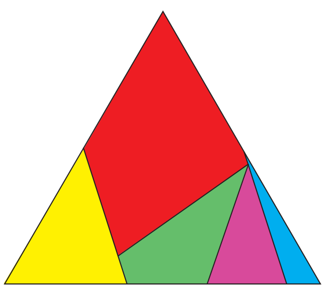


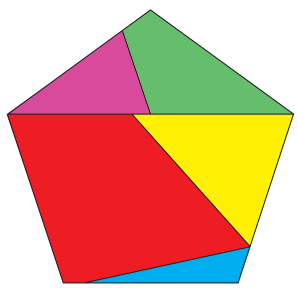
El triángulo y el trapecio que se obtuvo al dividir el pentágono han quedado divididos en cinco piezas que podemos ver claramente en las siguientes imágenes coloreadas.





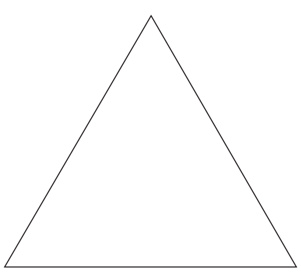
A continuación tenemos otra disección tanto del triángulo equilátero como del pentágono regular en las mismas piezas (en este caso cinco):

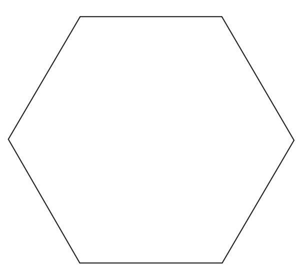




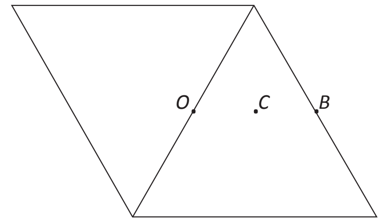
Triángulo-hexágono

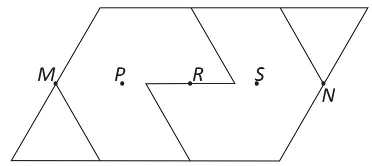
Partimos de un triángulo equilátero y un hexágono regular que tienen igual área.





Convertimos tanto el triángulo como el hexágono en romboides. Para ello tomamos dos polígonos de cada tipo y formamos los siguientes romboides.

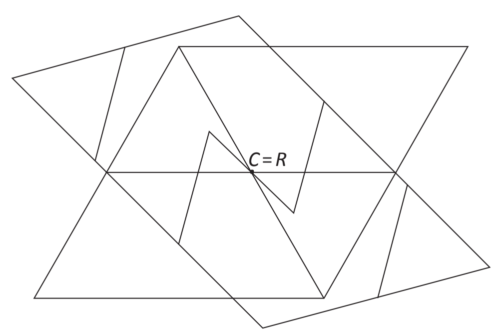




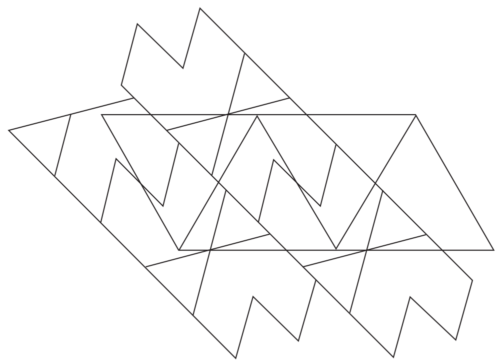
Siguiendo el mismo método de superposición de romboides, en el triángulo hemos señalado los puntos medios de dos lados contiguos (*O* y *B*) y el punto medio del segmento que ellos determinan (*C*); y en el romboide que obtenemos a partir de hexágonos, hemos hecho algo similar: se han señalado los puntos medios de los lados más cortos y enfrentados (*M, N*), el punto medio entre estos dos (*R*) y el punto medio entre este último y los dos primeros (*P* y *S*).

Después de muchas pruebas el mejor ángulo de giro que hemos encontrado es el de 45°.

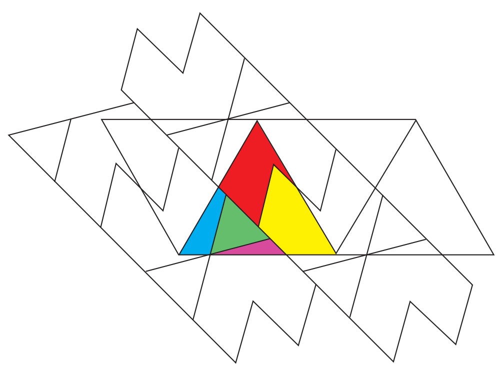
La solución más clara y con menos piezas la obtenemos al superponer y hacer coincidir el punto *C* del triángulo y el punto *R* del romboide de hexágonos.

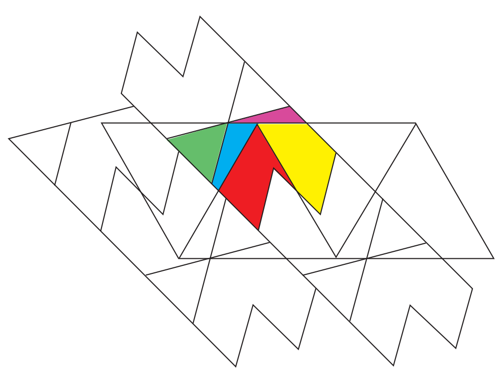


Para distinguir mejor las piezas en que queda la disección, añadimos algunos polígonos más.

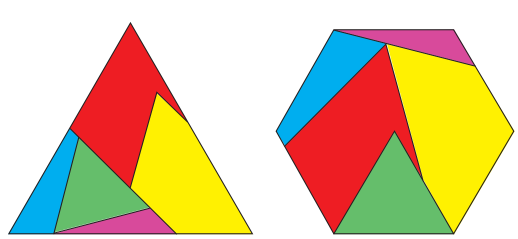


El triángulo y el hexágono quedan divididos en cinco piezas que podemos ver claramente en las siguientes imágenes coloreadas.



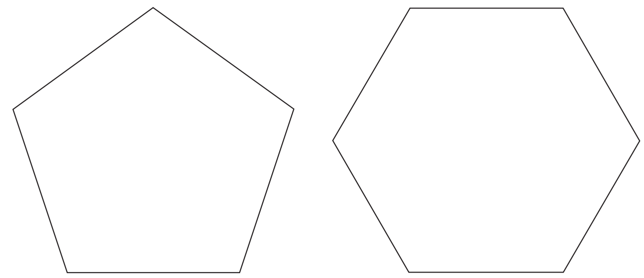


El triángulo queda dividido en cinco partes que colocándolas adecuadamente dan lugar al hexágono regular de igual área.



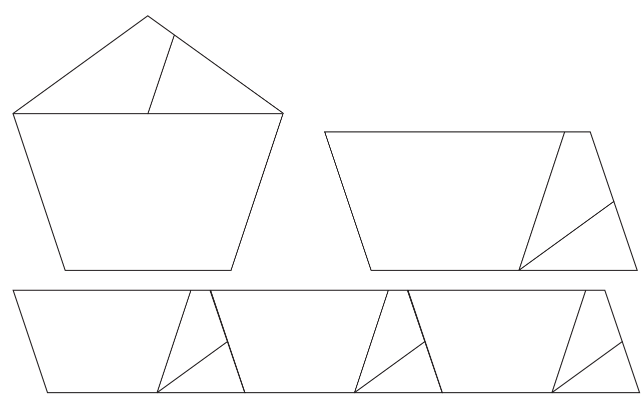
Pentágono-hexágono

Partimos de un pentágono regular y un hexágono regular que tienen igual área.

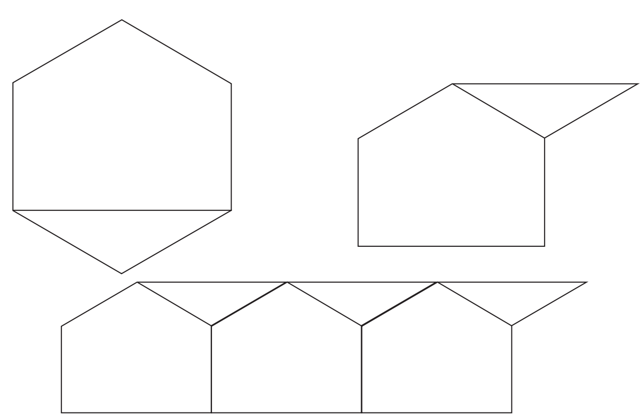


Dividimos el pentágono y el hexágono en las partes necesarias para crear unas tiras que teselen el plano. Para ello realizamos los siguientes pasos:

El pentágono lo dividimos en un trapecio isósceles y un triángulo también isósceles. El triángulo lo dividimos en dos partes trazando un segmento desde el punto medio de la base y paralelo a uno de los lados iguales del trapecio que nos ha salido anteriormente. Después reordenamos los tres polígonos obtenidos formando un romboide.



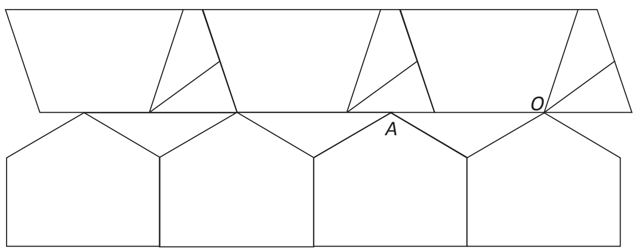
El hexágono lo dividimos en un pentágono (no regular) y un triángulo, que después reordenamos.



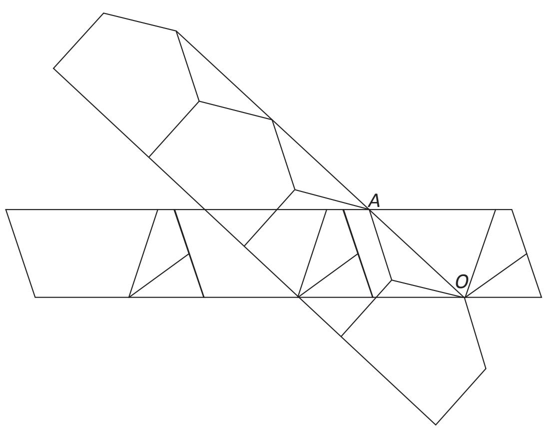
Con estas tiras de teselación podemos obtener dos tipos de disecciones.

Primera disección

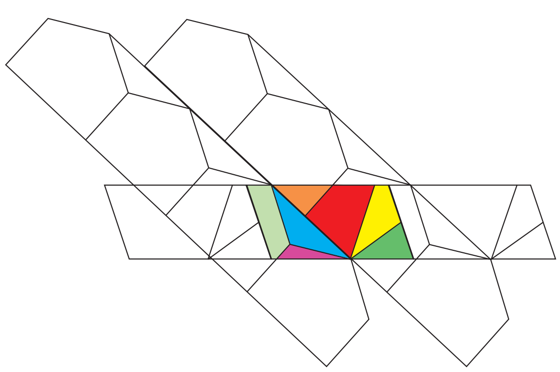
Colocamos las tiras como muestra la imagen, haciéndolas coincidir en el punto *O*, vértice en las tiras de teselación.

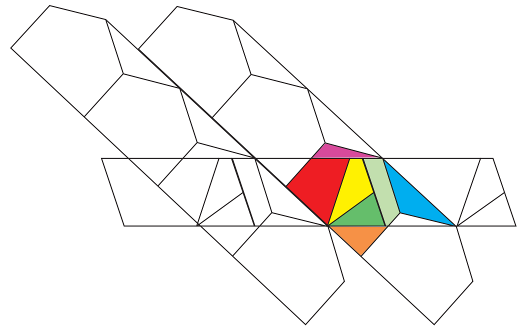


La tira de proveniente de los hexágonos la hacemos girar 43° con centro en el punto *O* y en sentido de las agujas del reloj, que es el ángulo que nos hace coincidir el punto *A* con un punto de la base mayor del trapecio que contiene las tiras de los pentágonos.

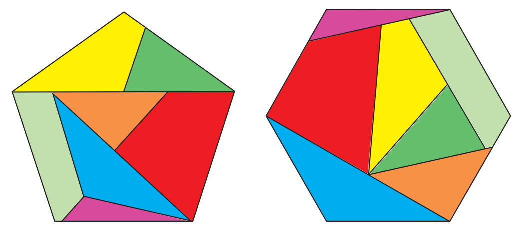


Para distinguir bien las partes en que se divide el pentágono, añadimos otra tira de hexágonos y coloreamos las piezas.

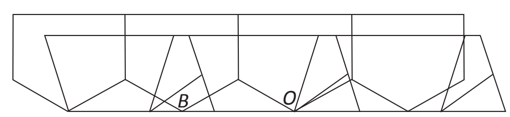




Se obtienen siete piezas que colocándolas adecuadamente dan lugar tanto a un pentágono regular como a un hexágono regular.

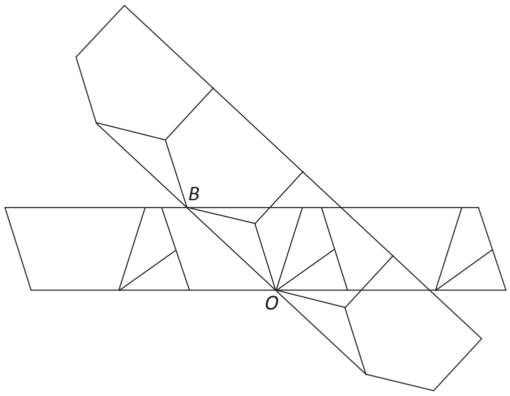


Segunda disección

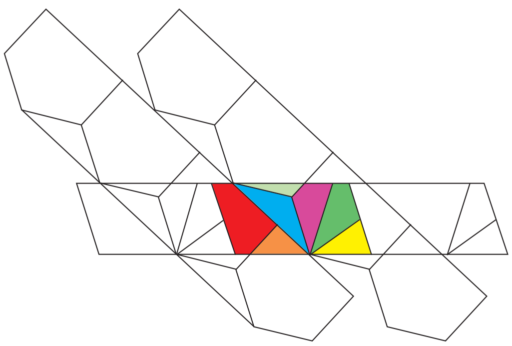


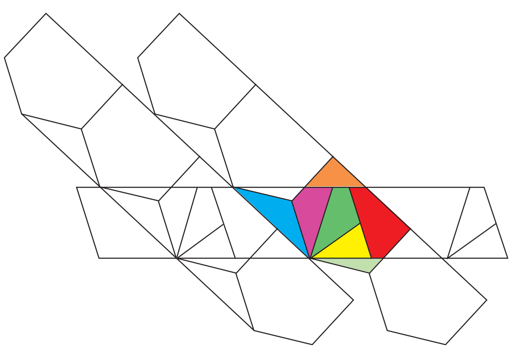
Disponemos las tiras como muestra la imagen, haciéndolas coincidir en el punto *O*. Como puede apreciarse lo que hacemos es situar las dos piezas anteriores de la misma forma, pero girando 180° la correspondiente a los hexágonos.

La tira de hexágonos la hacemos girar 43º con centro en el punto O y en sentido de las agujas del reloj, pues es el ángulo que nos hace coincidir el punto B con un punto de la base mayor del trapecio que contiene las tiras de los pentágonos.

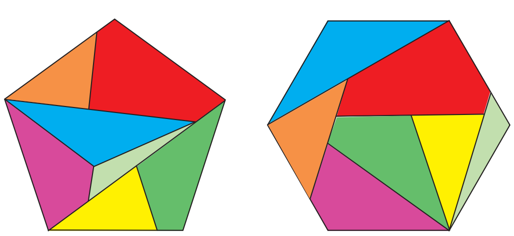


Para distinguir bien las partes en que se divide el pentágono, añadimos otra tira de hexágonos y coloreamos las piezas.





Se obtienen siete piezas que colocándolas adecuadamente dan lugar tanto a un pentágono regular como a un hexágono regular.



Trabajo en clase

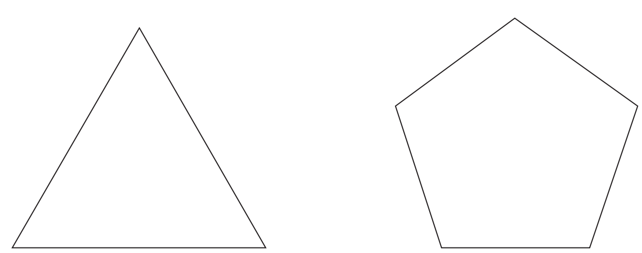
Volvemos a comentar que se puede poner la Tecnología al servicio de las Matemáticas o las Matemáticas al servicio de la Tecnología. Para nuestros compañeros tecnólogos puede ser un buen proyecto de trabajo el construir los puzzles a partir de una plantilla del polígono en papel.

Las plantillas pueden ser copiadas en cartulina, cartoncillo, cartón pluma, goma eva, panel, que es también muy fácil de cortar con un cutter o, mucho mejor, en madera, para su posterior corte con la sierra de marquetería, lijado, pintado y barnizado, quedando unos estupendos puzzles para su manipulación.

Al jugar con las piezas obtenidas en las disecciones del triángulo, pentágono y hexágono se puede plantear el siguiente cuestionario de trabajo o investigación:

— ¿Qué tipo de polígonos son las piezas obtenidas en cada disección?
— ¿Cuánto miden los ángulos interiores en un triángulo equilátero, un pentágono regular y un hexágono regular?
— ¿En un triángulo cuánto vale la suma de sus ángulos interiores? ¿Y en un pentágono regular? ¿Y en el hexágono regular?

Pero estos puzzles son también problemas en cuanto plantean un reto de transformación de un polígono en otro para el que de entrada no se conoce el camino de resolución más adecuado. Al jugar con ellos podemos comprobar su dificultad. Para evitar la frustración del alumno ante estos rompecabezas y que no abandone la resolución del problema que tiene delante, se le pueden dar como pistas unas plantillas con el contorno de los polígonos de área equivalente que intercambian sus piezas. Nos estamos refiriendo a que dispongan de la silueta, por ejemplo, en el caso del triángulo/pentágono sería:



La plantilla con el contorno sirve de ayuda, orienta y guía hasta la construcción que se debe realizar, al facilitar la medida del ángulo interior y del lado del polígono y poder medir comparando la amplitud de los ángulo y la longitud de las piezas con la longitud de los segmentos dibujados en la plantilla.

Aprovechando el puzzle se pueden trabajar en clase aspectos geométricos y numéricos planteando pregunta como la siguiente: ¿cuánto debe medir el lado del polígono regular para que tengan la misma área que otro dado?

En aquellas comunidades en las que los alumnos desde 5.° de Primaria a 2.° de Secundaria tienen su notebook personal con el programa *Geogebra* incorporado, como ha ocurrido hasta el momento en Andalucía, podemos interrelacionar las matemáticas manipulativas con la Geometría dinámica que nos permite dicho programa. Visiten las referencias web de la bibliografía.

Referencias bibliográficas

FREDERICKSON, G. (1997), *Dissections: Plane & Fancy,* Cambridge University Press. .

BOLTIANSKI, V. G. (1981), *Figuras equivalentes y equicompuestas,* Mir, Moscú.

HANS, J. A., J. MUÑOZ, A. FERNÁNDEZ-ALISEDA, J. BLANCO y J. ALDANA (2003), «Rompecabezas del Teorema de Pitágoras», *Suma,* n.º 43, 119-122.

HANS, J. A., J. MUÑOZ y A. FERNÁNDEZ-ALISEDA (2005): «Cuadraturas de polígonos regulares», *Suma,* n.º 48, 65-68.

— (2010), «Cuadraturas cruces, letras y estrellas», *Suma,* n.º 65, 49-52.

— (2011), «Puzzles de cuadraturas», *Suma,* n.º 66, 43-46.

VAN DELFT, P., y J. BOTERMANS (1995), *Creative puzzles of the World*, Key Curriculum Press.

Referencias web
(consultadas en julio de 2012)

http://www.cabri.net/abracadabri/abraJava/Dissection/ListDiss.html

http://geometriadinamica.es/Geometria/Disecciones/

http//docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/puzzles.htm

http://home.btconnect.com/GavinTheobald/Index.html [*Geometric Dissections.* Autor: Gavin Theobald.]

GRUPO ALQUERQUE DE SEVILLA
Constituido por

JUAN ANTONIO HANS MARTÍN
CC Santa María de los Reyes

JOSÉ MUÑOZ SANTONJA
IES Macarena

ANTONIO FERNÁNDEZ-ALISEDA REDONDO
IES El Majuelo

<juegos@revistasuma.es>

1 En 1833, P. Gerwein, teniente del ejército prusiano dio la solución a la pregunta sobre las disecciones planteada por el matemático húngaro y experto en geometría Wolfgang Bolyai (1775-1856). También llamado *Teorema de Bolyai-Gerwein* parece que sin embargo fue demostrado por primera vez en 1807 por el matemático escocés William Wallace (1768-1843). El teorema no se generaliza a tres dimensiones. En 1908 el matemático alemán Max Dehn (1878-1952) demostró que un cubo y un tetraedro regular del mismo volumen no son equivalentes por disección; aunque hay ejemplos de figuras que sí lo son.